Jürgen Roth, Judith Ames (Hrsg.)

Beiträge zum Mathematikunterricht 2014

Band 1

Beiträge zur 48. Jahrestagung der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 10. bis 14. März 2014 in Koblenz

Tagungsleitung
Engelbert Niehaus
Renate Rasch
Jürgen Roth
Hans-Stefan Siller
Wolfgang Zillmer

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnd.ddb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Barsdorf
www.winterwork.de

ISBN 978-3-942197-27-4

Jürgen ROTH, Judith AMES, Landau

Vorwort zum Tagungsband „Beiträge zum Mathematikunterricht 2014“

Nach 1983 fand die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 2014 zum zweiten Mal in Koblenz statt. 1983 wurde die Tagung von der Erziehungswissenschaftlichen Hochschule Rheinland-Pfalz ausgerichtet, aus der 1990 die Universität Koblenz-Landau hervorging. Der Campus Koblenz liegt im Norden von Rheinland-Pfalz, der Campus Landau 180 km davon entfernt im Süden.

Die diesjährige Jahrestagung wurde vom Mathematischen Institut in Koblenz und dem Institut für Mathematik in Landau organisiert. Die gemeinsame Tagungsvorbereitung über eine solche Distanz fand in Form unzähliger Telefonate, E-Mails und Videokonferenzen statt. Technische Hilfsmittel wurden jedoch nicht nur im Vorfeld der Tagung zur Kommunikation zwischen den beiden Campi genutzt. Eine wesentliche technische Neuerung im Rahmen der diesjährigen Tagung war die Einführung des Tagungsmanagementsystems ConfTool. Das System wurde an die Struktur der GDM-Jahrestagungen angepasst und steht auch für künftige Tagungen zur Verfügung. So können sich bereits registrierte Benutzer über ein vertrautes System zu den Jahrestagungen anmelden, Beiträge hochladen und vieles mehr. Darüber hinaus lieferte die mobile App Conference4me einen schnellen und komfortablen Zugriff auf das gesamte Tagungsprogramm in ConfTool und die Möglichkeit der Zusammenstellung eines individuellen Vortragsprogramms. Aktuelle Ankündigungen konnten über den Twitter-Kanal der GDM-Tagung, die Conferenz4me-App sowie die Tagungshomepage abgerufen werden. Vortragsverlegungen und Vortragsausfälle wurden zusätzlich auf den Info-Bildschirmen am gesamten Campus angezeigt.

Neben technischen Innovationen gab es bei der Jahrestagung 2014 auch eine bedeutende Neuerung hinsichtlich des inhaltlichen Konzepts. Der *Tag der Nachwuchsförderung* wurde in das Programm der GDM-Jahrestagung aufgenommen. Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler konnten in Form eines 15-minütigen Vortrags Ideen zu einem Dissertationsprojekt vorstellen, das sich noch in den Anfängen befindet. An die Präsentation schloss sich jeweils eine 20-minütige Diskussion an, die von zwei erfahrenen Chairs moderiert wurde. In dem für den Tag der Nachwuchsförderung vorgesehenen Zeitfenster fanden ausschließlich Vorträge des wissenschaftlichen Nachwuchses statt. Wir möchten an dieser Stelle noch einmal allen Kolleginnen und Kollegen für ihre Unterstützung und die rege Teil-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. I–II). Münster: WTM-Verlag

nahme an den Diskussionen danken. Die Nachwuchsvertretung der GDM hat eine Umfrage zur Akzeptanz des neuen Konzepts erarbeitet und übernimmt deren Auswertung. Darüber hinaus organisierte sie ein vielfältiges Programm für den wissenschaftlichen Nachwuchs. Für ihr großes Engagement möchten wir der Nachwuchsvertretung herzlich danken.

Die Jahrestagung lebt von ihren Teilnehmerinnen und Teilnehmern sowie den zahlreichen Beiträgen, die Einblicke in unterschiedlichste Forschungsrichtungen erlauben. In diesem Jahr folgten 808 Personen der Einladung nach Koblenz. Es gab 410 Beiträge zur Tagung: 18 moderierte Sektionen, 15 Arbeitskreistreffen, 18 Posterbeiträge und 359 Vorträge. Besonders hervorheben möchten wir die Hauptvorträge von Rita Borromeo Ferri, Paul Drijvers, Stefan Götz, Silke Ruwisch und Wolfgang Schnotz.

In diesem Tagungsband drucken wir neben der Eröffnungsrede des 1. Vorsitzenden der GDM, Rudolf vom Hofe, auch das Grußwort von Frau Ministerialdirigentin Barbara Mathea vom rheinland-pfälzischen Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur ab. Als ausgebildete und vor ihrer Tätigkeit im Ministerium langjährig aktive Gymnasiallehrerin für Mathematik, Physik und Informatik steht sie der Mathematikdidaktik sehr nahe und begleitet die Bemühungen um die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts, nicht nur in Rheinland-Pfalz, sehr konstruktiv.

Wir möchten uns bei Ihnen allen ganz herzlich für Ihr Kommen, Ihr Mitwirken und den wissenschaftlichen Austausch bedanken. Auch über den strahlenden Sonnenschein und die gute Stimmung auf dem Campus haben wir uns sehr gefreut.

Wir hoffen, dass Ihnen die Beiträge in diesem Tagungsband interessante Einblicke in aktuelle Forschungsaktivitäten in der Mathematikdidaktik bieten.

Jürgen Roth und Judith Ames

Inhaltsverzeichnis

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. III–XXXII). Münster: WTM-Verlag

1 Grußworte

Rudolf VOM HOFE, Bielefeld

Grußwort des 1. Vorsitzenden zur GDM-Jahrestagung 2014

Sehr geehrte Ehrengäste, liebe Mitglieder der GDM,

ich freue mich, hier in Koblenz die 48. Jahrestagung der GDM offiziell eröffnen zu dürfen. Ich möchte bereits jetzt den Veranstaltern dafür danken, dass wir in dieser schönen Stadt zu Gast sein dürfen. Zu Beginn dieser Tagung möchte ich einige Worte zu einem Thema sagen, das alle von uns zurzeit in irgendeiner Weise betrifft, das Thema Inklusion.

(1) Inklusion in Deutschland

Am 13. Dezember 2006 wurde von den Vereinten Nationen ein Übereinkommen über die Rechte von Menschen mit Behinderungen verabschiedet. Bedenkt man, wie in der Vergangenheit in manchen Ländern und in manchen Zeiten mit behinderten Menschen umgegangen wurde, ist dies ohne Frage ein wichtiger Schritt im Zuge einer umfassenden Umsetzung der Menschenrechte. Am 21. Dezember 2008 stimmte der Deutsche Bundestag diesem Vertrag zu. Das zentrale Anliegen dieser Konvention im Bereich Bildung ist die Einbeziehung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in das allgemeine Schulsystem. Je nach Art der Behinderung soll dieses gemeinsame Lernen zielgleich oder zieldifferenziert erfolgen. Inklusive Bildung soll zum Regelfall werden; Eltern sollen grundsätzlich das Recht haben, dass ihr Kind mit Behinderung eine allgemeine Schule besucht.

Für Deutschland bedeutet dies erhebliche Änderungen der bisherigen Praxis. Hier gibt es etwa eine halbe Million Kinder und Jugendliche mit Behinderungen, nur 18 Prozent von ihnen besuchten im Jahr 2009 eine reguläre Schule. Die anderen gingen auf Sonder- oder Förderschulen und verließen diese meist ohne Abschluss und Berufsperspektiven. Im internationalen Vergleich sind laut einer Studie der Bertelsmann-Stiftung durchschnittlich 85 Prozent der behinderten Kinder und Jugendlichen ins allgemeine Bildungssystem integriert. Wohl kaum einer widerspricht der Idee eines auch für behinderte Menschen gerechten Bildungssystems. Und auch der Idee, dass es bei Inklusion nicht nur um die Integration der sonderpädagogischen Förderung geht, sondern darum, die individuelle Verschiedenheit der Lernenden zum Ausgangspunkt für die Gestaltung des Unterrichts zu machen, wird kaum jemand widersprechen. Doch wie ist inklusives Lernen konkret zu verwirklichen? An welchen Konzepten kann man sich orientieren? Und wer trägt die Kosten? Hier sind zurzeit sehr viele Fragen offen.

In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 3–6).
Münster: WTM-Verlag

(2) Offene Fragen und Probleme

Da ist zunächst die Frage der Ausstattung der Schulen mit Lehrkräften zu nennen: Viele Lehrer und Wissenschaftler fordern eine Doppelbesetzung für Inklusions-Klassen. Doch dies will kein Bundesland bezahlen. So stellt die Stadt Hamburg, die als eines der ersten Bundesländer die UNO-Konvention einer umfassenden Inklusion umsetzte, zurzeit 3,5 Stunden pro Kind und pro Woche für eine Tandembesetzung bereit. Nach Einschätzung vieler betroffener Lehrerinnen und Lehrer ist dies völlig unzureichend. Anders sieht das die KMK. So erklärt etwa Peter Wachtel, bei der KMK für Inklusion zuständig, im Januar 2013, dass eine Doppelbesetzung nicht in allen Fällen pädagogisch erstrebenswert sei. Die Kinder sollten ja wirklich gemeinsam lernen – durch zwei Lehrer könnten sie ja wieder aufgeteilt werden.

Ein weiteres Problem ist der Umgang mit der Vielfalt der Behinderungen und Lernprobleme: Am klarsten ist, wie die Integration bei körperlich Behinderten zu realisieren ist, hier muss durch bauliche Veränderung für einen entsprechenden Standard gesorgt werden. Doch diese Gruppe macht nur einen kleinen Teil der Förderschüler aus. Etwa 75 Prozent von ihnen haben vielmehr Probleme beim Lernen, beim Sprechen oder in ihrer sozialen und emotionalen Entwicklung. Hinzu kommen die manifesten Lernbehinderungen, die sich als Folge allgemeiner geistiger Behinderungen ergeben. Selbst für gut ausgebildete Sonderpädagogen ist dies ein außerordentlich weites und schwieriges Feld.

Damit stellt sich die Frage nach der Lehrerausbildung: Das Arbeiten mit behinderten Schülerinnen und Schülern haben die Lehrkräfte staatlicher Regelschulen nicht gelernt – und es ist fraglich, inwieweit sie dies durch Fortbildungskurse lernen können. Was in den Ländern hierzu geboten wird, sind – wie beispielweise in Niedersachsen – Kurz-Fortbildungen von 5 Tagen. Nach Berichten sind diese jedoch nicht immer zielführend und enden häufig mit Enttäuschungen: Es werde nicht genügend differenziert, weder nach Fächern noch nach Behinderungen, dabei brauchten Autisten doch eine ganz andere Ansprache als ADHS-Kinder.

Und natürlich stellt sich auch die Frage, inwieweit die für inklusiven Unterricht erforderlichen Kompetenzen in der universitären Lehrerausbildung vermittelt werden können. Hier hat die KMK in einer Rahmenvereinbarung vom Dezember 2012 vorgegeben, dass in der Ausbildung für alle Lehrämter, den pädagogischen und didaktischen Basisqualifikationen in den Themenbereichen Umgang mit Heterogenität und Inklusion sowie Grundlagen der Förderdiagnostik eine besondere Bedeutung zukommt.

Unklar ist jedoch bislang, wie diese neue Aufgabe konkret in universitären Veranstaltungen umgesetzt werden soll und inwieweit bisherige Ausbildungsinhalte dafür gestrichen werden sollen. Bedenkt man die Komplexität der unterschiedlichen Behinderungen und Förderschwerpunkte, so wird leicht klar, dass die Universitäten die hier erforderlichen Kompetenzen in der Lehrerausbildung nur begrenzt vermitteln können und dass in vielen Fällen eine seriöse Betreuung nur durch die gemeinsame Arbeit von Lehrern und zusätzlichen Fachkräften möglich sein wird.

(3) Entwicklung der Schülerzahlen mit Förderbedarf

Ich möchte noch auf einen anderen Aspekt eingehen, nämlich auf die Entwicklung der mit „sonderpädagogischem Förderbedarf" eingestuften Schülerzahlen. Die Bertelsmannstudie Inklusion in Deutschland stellt fest, dass im Schuljahr 2012, also einige Jahre nach Beginn der Umsetzung der Inklusion in Deutschland, der Anteil der behinderten Kinder, die eine Regelschule besuchen, von 18 % auf 25 % gestiegen ist. Dieser positiven Entwicklung steht eine andere gegenüber, die eher nachdenklich macht: Die Schülerzahl an den Sonderschulen nahm in diesem Zeitraum kaum ab, denn immer mehr Schüler wurden mit „sonderpädagogischem Förderbedarf" eingestuft.

Diese Entwicklung zeigt sich besonders deutlich in Hamburg, wo mittlerweile der größte Anteil behinderter Kinder auf die Stadtteilschulen geht. Schaut man sich hier die Zahlen der Kinder an, die mit „sonderpädagogischem Förderbedarf" eingestuft werden, so stellt man fest, dass diese sich in den letzten 6 Jahren nahezu verdoppelt haben. In manchen Bereichen haben sich diese Zahlen sogar vervierfacht. Dies betrifft die Gruppe der Mädchen und Jungen, :denen Defizite in den Bereichen Lernen, Sprache sowie emotionale und soziale Entwicklung attestiert werden. Für diese Gruppe hat sich bereits die Bezeichnung LSE-Schüler etabliert.

Man kann diese Zahlen sehr unterschiedlich interpretieren. So gibt es die Ansicht, dass diese Entwicklung zu einer besseren Betreuung von Lernenden führt, deren Lernprobleme man bislang nicht ausreichend beachtet hat. Es gibt aber auch Befürchtungen, dass dies zu einer Separierung einer neuen Schülergruppe von den allgemeinen Bildungs- und Benotungsstandards führen kann, mit der Gefahr, dass der Anteil der Schulabgänge ohne Abschluss nicht sinkt, sondern steigt.

(4) Ideen und ihre Missverständnisse

Der Kulturphilosoph Siegfried Kracauer schrieb 1973 folgende Worte: „Jegliche Idee wird plump, platt und verzerrt auf ihrem Weg durch die

Welt. Die Welt vereinnahmt sie nur nach der Maßgabe ihres eigenen Verstandes und Bedarfs (...) Die Geschichte der Ideen ist eine Geschichte von Missverständnissen“ (Siegfried Kracauer: Geschichte – Vor den letzten Dingen, 1973, S. 19). Hierin liegt wohl etwas Wahrheit, gerade wenn man an die Umsetzung so mancher Bildungsidee denkt. Und auch in der kurzen Geschichte der Inklusion in Deutschland deuten sich bereits eine Reihe solcher Missverständnisse an; Missverständnisse wie:

- „Die Umsetzung der Inklusion in den Schulen ist *kostenneutral* möglich“. Oder:
- „Die Kompetenzen für inklusiven Unterricht können in der Universität *zeitneutral* vermittelt werden“. Ein Missverständnis ist es auch, zu denken:
- „Die Änderungen im Mathematikunterricht können *konzeptionsneutral* erfolgen“; konzeptionsneutral in dem Sinne, dass bestehende Konzepte zur inneren Differenzierung einfach nur konsequenter als bisher umgesetzt werden.

Auch wenn wir von den bisherigen Bildungsreformen so manche Missverständnisse gewöhnt sind, ist es in diesem Falle doch etwas anderes als bei „G8“ oder der „Neuen Mathematik“. Es gibt vor allem zwei große Unterschiede: Zum einen handelt es sich bei „Inklusion“ nicht um eine inhaltliche oder methodische Bildungsidee, sondern um ein allgemeines Menschenrecht. Und zum anderen geht es hier nicht um eine Gruppe, die auch gescheiterte Bildungsreformen halbwegs robust übersteht, sondern um eine, die in ganz besonderer Weise auf gesellschaftliche Hilfe und Verantwortung angewiesen ist.

Unsere Aufgabe ist es nun, den Prozess der Inklusion – so gut wir es können – aus der Perspektive des Mathematikunterrichts mitzugestalten. Hierzu gehört die Entwicklung neuer Konzepte für Schule und Lehrerbildung. Es gehört aber auch dazu, die Grenzen unserer Möglichkeiten klar zu benennen. Und es gehört ebenfalls dazu, gegenüber den bildungspolitischen Handlungsträgern auf Entwicklungen hinzuweisen, die den mit Inklusion verbunden Ideen zuwiderlaufen können.

Liebe Kolleginnen und Kollegen, wir haben nun eine Woche Zeit über diese und viele andere Dinge zu diskutieren. Ich wünsche uns allen eine erfolgreiche Tagung mit viel Information, Diskussion und Austausch und zwischendurch vielleicht auch ein wenig Entspannung in dieser wunderschönen Stadt. Herzlichen Dank.

Barbara MATHEA, Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Weiterbildung und Kultur, Mainz

Grußwort zur Eröffnung der GDM-Tagung 2014 in Koblenz

Bevor ich Ihnen die Grüße von Frau Ministerin Ahnen überbringe, möchte ich mich kurz vorstellen. Ich bin Abteilungsleiterin im rheinland-pfälzischen Bildungsministerium. Zum Verantwortungsbereich meiner Abteilung gehören u.a. die Schulaufsicht über die Gymnasien, Kollegs, Abendgymnasien und deutschen Auslandsschulen sowie die Lehrpläne für die allgemeinbildenden Schulen für die Sekundarstufe I und die gymnasiale Oberstufe - und damit natürlich auch für die Umsetzung der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife, was mir ganz persönlich ein besonderes Anliegen ist – wie mir überhaupt der Mathematikunterricht ein besonderes Anliegen ist. Warum?

Nun, es ist der gleiche Grund, weshalb ich bei dem heutigen Termin Frau Ministerin Ahnen besonders gern vertrete. Ich bin von Hause aus Mathematik-, Physik- und Informatik-Lehrerin und dies trotz mittlerweile 25 Jahren im Bildungsministerium im Herzen und nach meiner Grundeinstellung auch immer geblieben. Ich habe mit sehr viel Herzblut und Freude viele Projekte zum Mathematikunterricht intensiv mit gestaltet. Eines der größten war sicher das Projekt SINUS, das wir in Rheinland-Pfalz auch nach Beendigung des länderübergreifenden Programms mit viel Erfolg weitergeführt haben.

Sie werden verstehen, dass mich deshalb mit einer Tagung wie dieser und mit so manchen Teilnehmern dieser Tagung vieles verbindet. Vorhin wurde erwähnt, dass die GDM-Tagung vor 30 Jahren schon einmal in Koblenz stattgefunden hat. Damals war ich auch schon dabei – als Lehrerin und Referentin beim Lehrertag. Ich freue mich sehr, dass die Jahrestagung der GDM 2014 wieder an der Universität Koblenz-Landau, konkret am Campus Koblenz stattfindet. Und ich möchte an dieser Stelle den Organisatoren ein ganz herzliches Danke schön sagen. 700 Teilnehmende und eine solche Vielzahl an Vorträgen zu organisieren, ist eine Herkulesaufgabe.

Im rheinland-pfälzischen Bildungsministerium liegt die Zuständigkeit sowohl für die Schulen aller Schularten als auch für die Hochschulen und die Lehrerbildung. Das ist, meine ich, eine sehr günstige Konstruktion, weil diese Bereiche ja doch sehr eng miteinander verknüpft sind. Und die Mathematikdidaktik betrifft alle drei Bereiche.

Mein Verhältnis zur Mathematikdidaktik ist ein enges und durch großes Interesse und Aufmerksamkeit geprägt. Denn einerseits haben Mathematik-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 7–10). Münster: WTM-Verlag

didaktiker mir als Lehrerin wie auch als Verantwortliche für Unterrichtsgestaltung, Lehrpläne und Abiturprüfung schon phantastische neue Ideen für den Unterricht in einem bestimmten Themenbereich beschert. Ich könnte dazu viele Namen nennen – einige davon sind heute auch hier - und Beispiele für Inhalte aus der Sekundarstufe I und der gymnasialen Oberstufe. Das würde den Rahmen dieses Grußwortes sprengen. Andererseits musste ich aber gelegentlich auch die Erfahrung machen, dass manche didaktischen Forschungsergebnisse oder Unterrichtsvorschläge doch ziemlich an der schulischen Wirklichkeit vorbei gingen. Das hat teilweise intensive Diskussionen provoziert, die – z.B. in SINUS – durchaus häufig am Ende beide Seiten weitergebracht und gute Ergebnisse hervorgebracht haben. Aufgrund dieser Erfahrungen gefiel mir der Bericht von Herrn Götz über die Ergebnisse einer Befragung so gut. Da wurden Beziehungen zwischen Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Schulpraxis durch Pfeile dargestellt, und die Dicke der Pfeile stand für die Stärke der Beziehungen. Ich habe genau hingeschaut: Der Pfeil von der Schulpraxis zur Fachdidaktik war eindeutig der dickste, der in der umgekehrten Richtung etwas dünner.

Und genau weil die Beziehungen zwischen Schule und Fachdidaktik so eng sind, begrüße ich sehr die Einrichtung des Lehrertages im Rahmen der GDM-Tagungen, die es – ich erinnere mich sehr gut – auch schon vor 30 Jahren gab. Dieser Tag bringt Fachdidaktik und Unterrichtspraxis eng zusammen, und ich bin vom Nutzen dieser Verbindung sehr überzeugt. Ein ganz konkretes Beispiel erleben wir morgen. Morgen findet die Auftaktveranstaltung zu dem Projekt HeMaS statt. HeMaS ist die unvermeidliche Abkürzung für den Titel "Mit Heterogenität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I konstruktiv umgehen". Der Umgang mit der zunehmenden Heterogenität in den Klassen beschäftigt Lehrerinnen und Lehrer in allen weiterführenden Schulen sehr. Und sie wünschen sich Unterstützung. Ein wenig haben wir schon im letzten Jahr von SINUS daran gearbeitet und diese Arbeit dann durch die Fachberaterinnen und Fachberater Mathematik fortgesetzt. Aber der Bedarf ist noch längst nicht gedeckt. Da kam das Kooperationsangebot des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung durch Herrn Ullrich als Vertreter von Rheinland-Pfalz und Herrn Törner sehr gelegen. So ist das Konzept für das Projekt HeMaS entstanden, an dem nun 30 von insgesamt rund 90 interessierten Schulen aller Schularten teilnehmen können. Pro Schule werden zwei Mathematiklehrkräfte über eineinhalb Jahre geschult und geben ihre Erkenntnisse und Erfahrungen weiter. Die Schulen sind auf 3 Teams verteilt, von denen jedes durch einen Hochschulvertreter und erfahrene schulische Mathematikberaterinnen und –berater begleitet wird. Ich bin sicher, dass die Teams bei den Herren Siller und Ullrich aus Koblenz und Herrn Roth aus Landau in guten Händen sind. Die Technische

Universität Darmstadt, insbesondere Frau Bruder, das rheinland-pfälzische Bildungsministerium, das Pädagogische Landesinstitut und das private Institut für Lehrerfort- und –weiterbildung (ILF) unterstützen die Arbeit in dem Projekt. Ich freue mich auf diese Arbeit, die unter anderem durch die enge Zusammenarbeit von schulischer Praxis und Mathematikdidaktik gekennzeichnet ist.

Ich habe sehr interessiert heute Mittag den Vortrag von Herrn Götz verfolgt. Schon der Titel, der eine Beschäftigung mit Stoffdidaktik ankündigte, hat mich neugierig gemacht. Man konnte ja in der letzten Zeit den Eindruck gewinnen, dass Stoffdidaktik von vorgestern ist. Mit ist gerade kürzlich ein Artikel aus dem Journal für Mathematikdidaktik in die Hände gefallen, in dem analysiert wurde, dass in den didaktischen Veröffentlichungen von den 1980er Jahren bis heute die Repräsentanz stoffdidaktischer Themen deutlich abgenommen hat, während die von Themen aus der quantitativen und qualitativen Empirie ebenso deutlich zugenommen hat. In diesem Zusammenhang hat mir die Formulierung von Herrn Götz sehr gut gefallen, der von einer "didaktisch sensiblen Fachkompetenz" sprach.

Es ist für mich sehr beeindruckend festzustellen, dass bestimmte Aussagen von Mathematikdidaktikern offenbar über Jahrzehnte unverändert ihre Gültigkeit behalten.

Ich denke z.B. an Heinz Griesel, der Mathematikdidaktik 1971 als "Wissenschaft von der Entwicklung praktikabler Kurse für das Lernen im Bereich der Mathematik sowie der praktischen und empirischen Überprüfung der Kurse einschließlich der Überlegungen zur Zielsetzung der Kurse und der Stoffauswahl" definiert hat. Dem ist auch heute kaum etwas hinzuzufügen.

Und ich denke an die brandaktuelle Diskussion um die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik. Diese Bildungsstandards, die – wie Sie alle wissen – im Oktober 2012 verabschiedet wurden, berufen sich ganz explizit auf die drei Grunderfahrungen, die Heinrich Winter 1995 in den GDM-Mitteilungen formuliert hat.

Konkret heißt es in den Bildungsstandards: "Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts sind der Allgemeinbildungsauftrag wie auch die Anwendungsorientierung des Unterrichtsfaches Mathematik. Demnach wird Mathematikunterricht durch drei Grunderfahrungen geprägt, die jeder Schülerin und jedem Schüler vermittelt werden müssen: …" Es folgen die Formulierungen nach Heinrich Winter aus den GDM-Mitteilungen, Heft 61, 1995.

Meine Damen und Herren, die Vortragsthemen dieser Woche zeigen, dass der Mathematikdidaktik die Themen nicht ausgehen. Und sie sind erfreulich klar auf ganz verschiedene Bereiche des Mathematiklernens bezogen, von der Kindertagesstätte über die Grundschule und die weiterführenden Schulen bis zum Hochschulstudium. Das ist aus meiner Sicht sehr wichtig. Gerade angesichts der Bedeutung, die die empirischen Wissenschaften für Schul- und Unterrichtsentwicklung gewonnen haben, wünsche ich mir von Ihnen als Mathematikdidaktiker, dass Sie immer und immer wieder den Bezug zum Fach, zu den Mathematikinhalten und zu den – um mit den Begriffen der Bildungsstandards zu sprechen – allgemeinen mathematischen Kompetenzen wie mathematisch argumentieren, modellieren, problemlösen als Themen in die Waagschale werfen. Dabei wünsche ich Ihnen, nicht nur in dieser Woche, viel Erfolg. Sie können auf die Bereitschaft und den Wunsch zur Zusammenarbeit aus dem Schulbereich rechnen.

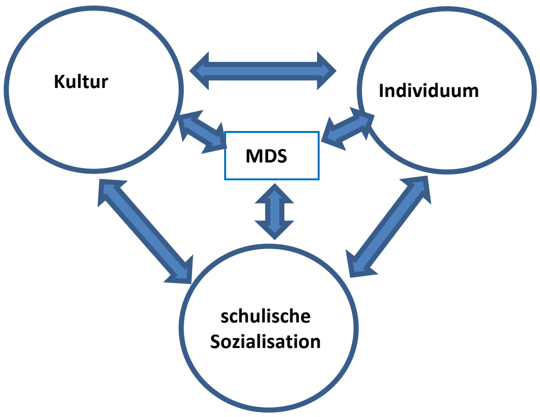
2 Beiträge zu den Hauptvorträgen

Rita BORROMEO FERRI, Kassel

Präferenzen oder Fähigkeiten? – Mathematische Denkstile im Spannungsfeld von Persönlichkeit, Kultur und schulischer Sozialisation

1. Das (Spannungs-) Feld öffnen

Das (Spannungs-) Feld zu öffnen bedeutet gleichzeitig zentrale Entwicklungsschritte der Theorie der Mathematischen Denkstile (in der Grafik und im Folgenden: MDS) darzulegen. In diesem Beitrag wird kurz die Theorie der MDS beschrieben sowie die rekonstruierten MDS von Individuen beschrieben. Weitere entscheidende Einflussfaktoren, die auf die MDS einwirken und hier aufgegriffen werden, sind schulische Sozialisation und Kultur. Interessant ist die Beleuchtung der Zusammenhänge bzw. die Frage nach den Auswirkungen des „matching“ oder „mismatching“, gemeint ist die Übereinstimmung oder nicht Übereinstimmung von MDS von Lernenden und Lehrenden beispielsweise auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler. Spannend ist ebenfalls die Frage nach kulturellen Unterschieden der MDS von Individuen. Weitere Aspekte fallen darunter, wie etwa die kulturelle Auffassung von Bildung, die Rolle der Lehrenden und Lernenden in verschiedenen Systemen, curriculare Besonderheiten etc., die hier aber nicht in der notwendigen Tiefe aufgegriffen werden können. Wie viel „Freiraum“ bleibt aber für ein Individuum, um seine präferierte Art und Weise Mathematik zu durchdenken und zu verstehen, wenn es kulturelle, curriculare sowie (schulische) sozialisationsbedingte Rahmenbedingungen gibt? Einige Antworten können auf der Basis bereits durchgeführter Studien gegeben und sollen hier in Kürze dargelegt werden.



2. Mathematische Denkstile (MDS)

Ausgangsfragestellungen der ersten Studie im Jahr 2001 waren unter anderem, welche theoretisch tragfähigen und empirisch rekonstruierbaren Erklärungsmuster/Phänomene zu finden sind, die den Erfolg bzw. Misserfolg beim mathematischen Lernen nicht vorrangig, wie es traditionell von Pädagogen und Psychologen vertreten wurde und wird, durch individuelle

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 13–20). Münster: WTM-Verlag

Unterschiede in den Fähigkeiten zu begründen. Des Weiteren bestand ein Forschungsdesiderat dahingehend, ob visuelle, analytische und konzeptuelle Denkweisen bzw. Denkstile bei 15- und 16-jährigen Lernenden empirisch rekonstruiert und charakterisiert werden können, da es zwar viele Klassifikationen des Denkens in der Mathematik, Mathematikdidaktik und Psychologie, u.a. nach Klein (1987), Hadamard (1945), Burton (1995), Riding (2001), Skemp (1987) existierten, die jedoch nicht explizit bei Schülerinnen und Schülern untersucht wurden und zudem nicht den Fokus hatten, dass es sich um „mathematische Denk*stile*" handeln sollte. Der „Stilbegriff" ist, ähnlich wie der Begriff der „Intelligenz", ein schwer zu greifendes Konstrukt und findet sich in unterschiedlichen Charakterisierungen in vielen Wissenschaftsdisziplinen wieder. Der Begriff des *Denkstils*, wie er von dem Kognitionspsychologen Sternberg (1997) entwickelt wurde, bildet die Grundlage für das Konstrukt des *mathematischen* Denkstils. Sternberg definiert den Begriff des „Denkstils" wie folgt: „A style is a preferred way of thinking. It is not an ability, but rather how we use the abilities we have. (…) People may be practically identical in their abilities and yet have different styles." (Sternberg, 1997, 19) Sternberg definiert einen Stil als eine Präferenz bezüglich der Denkweise, die nicht eine Fähigkeit beschreibt, sondern eine Präferenz dafür, wie ein Individuum seine Fähigkeiten nutzt. So können zwei Personen, welche die gleichen Fähigkeiten besitzen, dennoch ganz unterschiedliche Denkstile haben. Nach Sternberg können Denkstile per se nicht als „gut" oder „schlecht" bezeichnet werden, hingegen es bei Fähigkeiten um die Erreichung eines hohen Niveaus handelt, mit Fähigkeiten also wirklich eine Qualität beschrieben wird.

Auf der Basis der ersten Studie bzw. weiteren Fallstudien, die zunächst qualitativ angelegt waren, konnten analytische, visuelle und integrierte Denkstile bei 15-19-jährigen Lernenden mit Hilfe des „Dreistufendesigns" (Busse/Borromeo Ferri 2003) rekonstruiert werden in Verbindung mit der Methodologie der Grounded Theory (Strauss/Corbin 1990). Vor allem sollte ergründet werden, was genau das Konstrukt des mathematischen Denkstils bzw. seiner einzelnen Stilarten charakterisiert. Generell wird ein mathematischer Denkstil beschrieben als „die von einem Individuum bevorzugte Art und Weise, mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge durch gewisse interne Vorstellungen und/oder externe Darstellungen zu repräsentieren und durch gewisse Vorgehensweisen zu verarbeiten, genauer: zu durchdenken und zu verstehen. Demnach basiert ein mathematischer Denkstil auf zwei Komponenten: 1) der internen Vorstellung und der externen Darstellung, 2) der (ganzheitlichen bzw.

zergliedernden) Vorgehensweise.“ (Borromeo Ferri 2004, S. 50). Für die Auswertung und Operationalisierung mathematischer Denkstile wurde ein Modell abduktiv entwickelt, in welchem die Präferenzen für Vorgehensweisen oder internen formalen oder bildlichen Vorstellungen in Kombinationen möglich sind:

	Intern orientierte Typen:			*Extern orientierte Typen:*				
				kongruent			inkongruent	
1) / 2)	bildlich	gemischt	symbolisch	bildlich-bildlich	gemischt	symbolisch-symbolisch	bildlich-symbolisch	symbolisch-bildlich
ganzheitlich								
kombinierend								
zergliedernd								

(vgl. BORROMEO FERRI 2004, 52)

3. Das Individuum

Das Individuum hat entweder ausgeprägte Präferenzen für einen der jeweiligen mathematischen Denkstile oder vereint mehrere Komponenten in sich, so dass von einem integrierten Denkstil gesprochen wird. Im Folgenden eine kurze Beschreibung der MDS (siehe u.a. Borromeo Ferri 2004): Analytische Denkstile zeichnen sich durch eine Ausprägung von internen formalen Vorstellungen und externen formalen Darstellungen in Kombination mit einem zergliederten Vorgehen aus. Visuelle Denkstile sind durch interne bildliche Vorstellungen und externe bildliche Darstellungen in Kombination mit einer ganzheitlichen Vorgehensweise charakterisiert. Integrierte Denkstile manifestieren sich als gemischt in den Vorstellungen und Darstellungen sowie kombinierend in der Vorgehensweise. Des Weiteren konnten noch sogenannten formultane Denkstile (formal-ganzheitlich) und piktorielle Denkstile (bildlich-zergliedernd) qualitativ und quantitativ erfasst werden. Mathematische Denkstile sind individuumsbezogene Persönlichkeitseigenschaften. Obwohl es sich um eine Präferenz handelt, verknüpft mit positiven Affekten, ist diese dem Individuum oft nicht bewusst. Analytische Denker sind natürlich in der Lage geometrische Aufgaben zu bearbeiten oder Visualisierungen von Inhalten zu folgen, dennoch entspricht dieser Weg nicht unbedingt der präferierten Denk- und Verstehensweise der Person. Fallstudien haben gezeigt (Borromeo Ferri, im Druck), dass sich ein Lehrerwechsel im Fach

Mathematik zum Teil konkret auf die Leistung bzw. vor allem auf das Verständnis der zu vermittelten Inhalte auswirkt. Lukas beispielsweise, der ein ausgeprägter analytischer Denker ist, der zwei Jahre von Herrn S., ebenfalls einem analytischen Denker, unterrichtet wurde beschrieb nach dem Lehrerwechsel zu Frau M., visuelle Denkerin, folgendes: „Herr S. hatte eine andere Art das zu erklären und vielleicht hatten die anderen damit Probleme weil sie anders als Herr S. gedacht haben. Ich hatte so, ich war auf der gleichen Wellenlänge sozusagen wie er.“ Lukas beschreibt in Bezug auf Herrn S., dass seinem Empfinden nach die Passung („matching“) zwischen dessen und seinem eigenen Denkstil optimal war. Ein Lehrer, der seit 5 Jahren zwei Klassen desselben Jahrgangs unterrichtete, fragte sich, warum die eine Klasse durchweg bessere Leistungen erzielte und die andere Klasse nicht. Aus der Sicht der MDS konnte statistisch nachweisbar erfasst werden das der Lehrer, selber analytischer Denker, besser zu der einen Klasse, die aus ¾ analytischen Denkern bestand „passte“, als zu den Lernenden der anderen Klasse, die sehr stark visuell ausgeprägt war (Borromeo Ferri, im Druck).

4. Schulische Sozialisation

Der MDS eines Individuums wird nicht ausschließlich als ein stabiles und unveränderliches Persönlichkeitsattribut angenommen, da die schulische (mathematische) Sozialisation einen großen Einflussfaktor auf die Kognitionsprozesse im Mathematikunterricht hat. Darunter fällt bereits die Tatsache, dass Lehrende mit ihrem bevorzugten MDS dementsprechend (und oft unbewusst) ihren Unterricht*stil* so ausrichten und somit bestimmte MDS bei Lernenden, die ihren MDS teilen mehr fördern, die restlichen Lernenden jedoch nicht gleichwertig partizipieren können. Veronika Reiss hat sich schon Ende der 70-ziger Jahre mit Sozialisationsphänomenen im Mathematikunterricht auseinandergesetzt und formuliert treffend: „Es kommt im Mathematikunterricht aber nicht nur darauf an, was man weiß sondern auch, wie man es weiß und wie man sein Wissen darstellt.“ (Reiss 1979, 277) Bezogen auf die MDS bedeutet das also, dass im Unterricht nicht nur das Ergebnis eines Kognitionsprozesses, sondern auch der Prozess selbst eine Rolle spielt. Reiss fasst Sozialisationsprozesse weniger als eine Prägung von außen auf, sondern vielmehr als eine Anpassung der Handlungsorientierung an (subjektiv) wahrgenommene Beziehungsgefüge. So „passen“ sich Lernende, die einen anderen MDS als ihr Lehrer bevorzugen den Gegebenheiten (Vermittlung der Inhalte, Aufgabenauswahl, Lehrmaterialien, Klassenarbeiten) an. Spezifischer formuliert bedeutet das: „Interaktionsbeziehungen zwischen Lehrern und Schülern (und der Schüler untereinander) steuern nicht nur den Erwerb spezifisch ‚sozialer’ Inhalte, z.B. sozialer Verhaltensweisen, sondern bestimmen auch scheinbar rein kognitive Lerninhalte in ihrer Qualität mit." (Reiss 1979, 277) Die Ergebnisse einer durchgeführten Fallstudie zeigen deutlich die Anpassung der einen Klasse an den durch seinen Denkstil und seine Vor- und Einstellungen geprägten Unterrichtsstil des erwähnten Lehrers Herrn S. Obwohl bei Schüler Lukas' und Herrn S. ein „matching" der MDS festgestellt wurde, hat Lukas sich trotz seiner starken Präferenz für intern orientierte Verarbeitung mathematischer Sachverhalte an die Erwartungen der Mathematiklehrpersonen angepasst und erstellt daher in geringem Maße auch externe Darstellungen. Der Einbezug der schulischen Sozialisation verdeutlicht einerseits die Schwierigkeit MDS als Konstrukt in Gänze zu fassen, aber andererseits zeigt es auch auf Mikro-Ebene die Einschränkungen von Lernenden ihren präferierten Verstehens- und Denkweisen von Mathematik im Unterricht tatsächlich nachzugehen.

5. Kultur

Die bis 2011 vorwiegend durchgeführten qualitativen Studien ermöglichten einen tiefen Einblick, u.a. wie sich MDS bei Individuen äußern, welchen Einflüssen sie unterliegen oder wiederum welchen Einfluss MDS auf Modellierungsprozesse von Lehrenden und Lernenden im Unterricht haben (Borromeo Ferri 2011). Das führte zum besseren Verständnis des Konstrukts und auch zur Abgrenzung zu anderen Klassifikationen oder Begrifflichkeiten. Viele Forschungsfragen konnten jedoch alleine durch ein qualitatives Vorgehen nicht beantwortet werden. 2012 wurden daher folgende 6 Skalen, die sich bereits in dem Modell von 2004 wiederfinden, mit insgesamt 27 items mit einer 4-stufigen Likertskala entwickelt, um das Konstrukt des MDS quantitativ zu erfassen: bildlich, formal (Arten der Repräsentationen); ganzheitlich, zergliedernd (Art der Vorgehensweise); interne Orientierung; externe Orientierung (Art der Verarbeitung von Informationen). Die Skalen wurden nicht nur für Lernende (Zielgruppe; 15-16 Jahre), sondern auch für Lehrende und Studierende angepasst. Der cronbachs α der Skalen bildlich/formal reichte von .75 bis .90 und ist daher gut bis zufriedenstellend. Drei offene Problemstellungen sowie weitere Skalen u.a. zu beliefs und Selbsteinschätzung wurden zu einem Fragebogen ergänzt. Die quantitative Erfassung ermöglicht es Fragen nach kulturellen Unterschieden von MDS nachzugehen oder Zusammenhänge von MDS und der Mathematiknote oder etwa beliefs herzustellen. Im Projekt MaDenK (Mathematische Denkstile in der Schule und kulturellem Vergleich) nehmen folgende Länder teil: In Deutschland, Süd-Korea, Japan, Türkei ist die Datenerhebung und -analyse von insgesamt 1370 Lernenden und 38 Lehrenden abgeschlossen. Chile, Thailand und die USA befinden sich noch in der Datenerhebung. Mit dem Wissen um die diversen Auffassungen von Bildung und Lernen in den verschiedenen Kulturen, der unterschiedlichen Ausbildung von Mathematiklehrkräften, der Rolle von Schule und Curricula, können sich die MDS der Individuen durchsetzen oder gibt es kulturell geprägte MDS?

Neben dem Ergebnis, dass das Konstrukt des MDS quantitativ messbar ist, liegen einige Ergebnisse der Datenanalyse von Deutschland, Süd-Korea, Japan und der Türkei vor. Beim Vergleich der Mittelwerte bezüglich formalen und bildlichen Denkens wurde eine stärkere Ausprägung in Japan und Türkei erfasst als in Deutschland und Süd-Korea. Andererseits gibt es höhere Mittelwerte für Deutschland und Türkei hinsichtlich der ganzheitlichen Vorgehensweise als in Süd-Korea und Japan. Die Korrelationen der Mittwerte der bildlichen und formalen Skalen zeigen gleich starke Signifikanzen in Süd-Korea und in Japan, was im Vergleich zu den anderen Ländern für den integrierten Denkstil spricht. In Deutschland zeichnen sich stärker die zwei Pole des analytischen und visuellen Denkstils ab, genauso wie in der Türkei. Die Korrelationen zwischen der Mathematiknote und dem Denkstil zeichnen ein überdenkenswertes Ergebnis ab: Lernende mit Präferenzen für formales Denken haben die besten Schulnoten in Deutschland und Japan (negative Korrelationen ergeben sich bei Japan, Süd-Korea und Türkei durch die Notenskalen in den Ländern, denn dort bedeutet eine hohe Punktzahl eine bessere Note, demnach umgekehrt, wie in Deutschland): Deutschland: .418**, Japan: -.164**. In Süd-Korea und in der Türkei haben auch die Individuen mit Präferenzen für visuelles Denken Bestnoten: Süd-Korea: -.293**, Türkei: -.106* (**Korrelation ist signifikant auf dem Niveau 0.05 (2-seitig). Die latente Klassenanalyse ergab für Deutschland zwei Klassen, das heißt eine bildliche und eine analytische. Zwischen diesen beiden Gruppen konnten bezüglich der Note keine signifikanten Unterschiede gemessen werden. Für Süd-Korea konnten 3 Klassen im Sinne von Niveaustufen unterschieden werden, d.h. die Individuen, die niedrig, mittel und stark bildlich und formal zustimmen. Das interessante zeigte sich hinsichtlich der Korrelation mit der Note. Diejenigen, die am stärksten beiden Richtungen zustimmten, haben auch die besseren Noten. Dementsprechend werden die Noten schlechter, je weniger Zustimmung gezeigt wird. Das deutet darauf hin, dass die Flexibilität der integrierten Denker sich auf die Noten auswirkt. Hinsichtlich der kulturellen Reflexion war das Ergebnis für die Türkei überraschend. Ohne hier jetzt auf Details eingehen zu können, ist der Mathematikunterricht in der Türkei sehr formal, kleinschrittig und ergebnisorientiert ausgerichtet (Schröder 2010). So kann vermutet werden, dass trotz der Einflussfaktoren die starke individuelle Präferenz durchschlägt. Betrachtet man Deutschland mit den asiatischen Staaten als Ost-West-Vergleich bezüglich mathematischer Denkprozesse (siehe u.a. Cai 2002), dann ist das Profil des ausgeprägten integrierten Denkstils entgegen der Vermutung einer Ausprägung hin zum analytischen Denkstil tatsächlich überraschend und fordert nach tieferen Erklärungen. Nachdenklich stimmen die Ergebnisse zum Zusammenhang Note und Präferenzen für den analytischen Denkstil. Eine einleuchtende Interpretation ist einerseits der Blick auf die bestehenden und eingesetzten Lehr- und Lernmaterialien, die zum Teil eher eine formale Orientierung aufweisen und andererseits die Konzeptionen Tests und Klassenarbeiten, in denen die formale Bearbeitung gefordert ist und weniger visuelle Aspekte in Vor- und Darstellungen im Fokus sind. Hinzu kommen noch die beschriebenen mathematischen Sozialisationsaspekte im Zusammenhang mit der „Passung“, dem „matching“ von MDS der Lehrenden und Lernenden. Da sich bis auf die Türkei dieser signifikante Zusammenhang zeigte könnte eine Empfehlung für die Schülerinnen und Schüler lauten: „Versuche Mathematik analytisch-formal zu durchdenken, zu verstehen und darzustellen, denn das ist der erfolgreiche Weg.“ Ob es allerdings der verständlichste Weg für einige Individuen mit anderen Präferenzen ist, muss bezweifelt werden.

6. Präferenzen oder Fähigkeiten?

Mathematische Denkstile sind auf der Basis der empirisch rekonstruierten Phänomene und statistisch erfassten Ergebnisse sowie auch von der theoretischen Auslegung her in Anlehnung an Sternbergs Theorie der Denkstile keine Fähigkeiten, sondern Präferenzen, wie wir unsere Fähigkeiten nutzen. Dennoch zieht sich die über das ganze Spannungsfeld grundlegende Frage: Wann und ich welchem Kontext handelt es sich bei MDS tatsächlich mehr um Präferenzen, wann mehr um Fähigkeiten? Übertragen wir die Frage zunächst auf den alltäglichen Mathematikunterricht. Vorausgesetzt die Lehrenden kennen ihren MDS und haben reflektiert, wie sich der MDS auch auf ihren Unterrichtsstil auswirkt, dann sind sie in der Lage, da sie ihre Schülerinnen und Schüler kennen, nicht nur deren MDS im Blick zu haben, sondern gezielt auf die verschiedenen Präferenzen einzugehen, um die Fähigkeiten der Lernenden zu nutzen. Denn wenn beispielsweise die Passung zwischen Aufgabenstellung und Denkstil nicht gegeben ist, werden, so nach Sternberg, Fähigkeiten und Denkstile häufig verwechselt: “Often, the tasks people face could be arranged better to fit their styles, or they could modify their styles to fit the tasks.” (Sternberg 1997, 19) Daher ist nicht immer zu erkennen, wozu das Individuum wirklich fähig wäre. Daher fordert er, dass, wenn die Fähigkeiten eines Individuums beurteilt werden sollen, die Aufgabe auch dem Denkstil entsprechen sollte, da sonst nicht die Fähigkeit, sondern die Passung zwischen Stil und Aufgabenstellung beurteilt würde. Die signifikante Korrelation zwischen Bestnoten in Mathematik und dem analytischen Denkstil verdeutlicht, neben den erwähnten Interpretationen, dass genau bei diesen Individuen die Passung zwischen MDS und Fähigkeiten vorhanden scheint. Sternberg (1997, 80) beschreibt ebenfalls dass eine Person, deren persönliche Vorlieben zu ihren Fähigkeiten passen, weit mehr leisten kann als eine, deren Fähigkeiten zwar die gleichen sind, die aber einen nicht passenden Denkstil bevorzugt. Genauso sind die Leistungen einer Person natürlich auch von ihren Fähigkeiten abhängig, da der Denkstil nur eine Vorliebe für Verarbeitungsweisen ist.

Das Lernen und Lehren von Mathematik aus dem Blickwinkel der MDS zu betrachten bedeutet die Vorlieben, das „gerne Tun", die Präferenzen der Lernenden für bestimmte Vorstellungen und Vorgehensweisen zu erkennen, aufzugreifen, mit ihnen in den Diskurs treten und somit die Lernenden bestmöglich zu fördern und zu fordern.

Literatur

Borromeo Ferri, R. (2004). *Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirischen Studie.* Hildesheim: Franzbecker.

Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens. - Kognitive Analysen von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Borromeo Ferri, R. (im Druck). Mathematical Thinking Styles in School and Across Cultures. Regular Lecture, ICMI-12, Seoul, Süd-Korea.

Burton, L. (1995). Moving towards a Feminist Epistemology of Mathematics. In *Educational Studies in Mathematics,* 28 (2) 275-291.

Busse, A. & Borromeo Ferri, R. (2003). Methodological reflections on a three step design combining observation, stimulated recall and interview. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35 (6), 257-264.

Cai, J. (2002). Assessing and Understandig U.S. and Chinese Students‘ Mathematical Thinking: Some Issues from Cross-National Studies. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (6), 278-290.

Schröder, R. (2010). A comparison of upper secondary school mathematics between Germany and Turkey. *In Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 53, 4-7.

Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Hillsdale NJ: Erlbaum.

Sternberg, R. (1997). *Thinking Styles*. New York: Cambridge University Press.

Strauss, A. & Corbin J. (1990). *Basics of Qualitative Research*. London: Sage.

Paul DRIJVERS, Utrecht

Digital technology in mathematics education: a reflective look into the mirror

1. Introduction

Nowadays, we are surrounded by a diversity of digital tools and devices. Digital technology includes visible tools, such as smartphones and tablets, as well as technology embedded less visibly in, for example, cars or medical equipment; in both cases, however, digital technology drastically affects daily life as well as professional practice. As a consequence, one might expect education to be in a process of transformation, too: on the one hand, education should prepare for a technology-rich future, and on the other, it might benefit from the opportunities that digital technology offers.

But is this really the case? Is education, and in our case mathematics education in particular, involved in a fundamental process of change due to the availability of digital tools? And, if the answer is yes, do we have evidence that this change leads to improvements in mathematics achievement? These are the questions that we want to reflect upon in this contribution.

2. Inversion as an example

It is beyond any doubt that digital tools may invite, or at least can be used for, interesting mathematical activities. As an example, we look at a well-known lithograph, made in 1935 by the Dutch artist M.C. Escher, entitled 'Hand with reflecting sphere' (see http://en.wikipedia.org/wiki/Hand_with_Reflecting_Sphere). Inspired by this spherical self-portrait I set up a two-dimensional variant using Geogebra (http://www.geogebra.org/). Figure 1 shows a very rough sketch of a face, as well as its image under a kind of reflection in the unit circle with centre M. More precisely, this mapping is called an inversion, and the im-age A' of a point A (not M) lies on the ray starting in M through A, such that MA' equals $1/MA$.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 21–28). Münster: WTM-Verlag

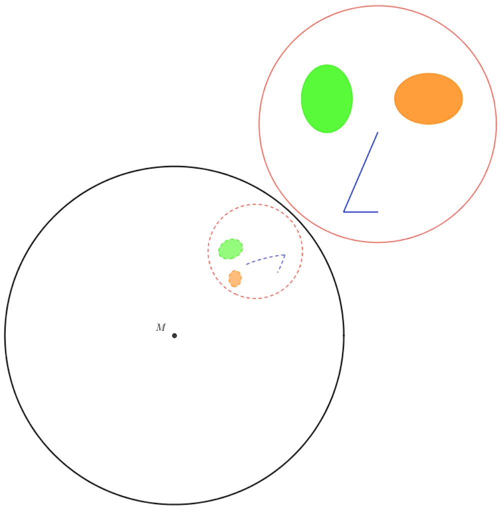


Figure 1. Inversion in the unit circle

A careful look at the image of the nose reveals that straight line segments do not remain straight under inversion. We can understand that at least something needs to change: if a straight line lies completely outside the unit circle, its inversion will be completely inside the circle, so it cannot be a straight line anymore. In Figure 2, we investigate the inverse of a straight line, which appears to be a circle through the centre *M*. Of course, as the distance *MA* is approaching infinity while point *A* on the line is moving away, the distance *MA'* will approach 0. This explains *M* being on the image of the line. The proof that lines are mapped into these circles (and vice versa) can be obtained through algebra.

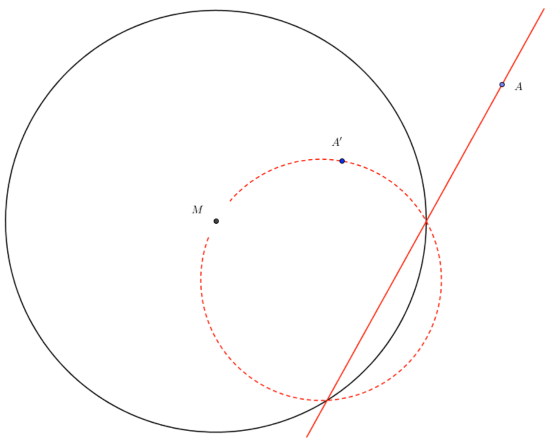


Figure 2. Inversions of lines and circles

Finally, we investigate the inversions of more complicated curves: Pascal's limacons or snail curves. If we use $R = 1 + a \cdot \cos(\theta)$ as polar equations of these curves, Figure 3 shows these curves for $a>1$, $a=1$, and $a<1$, respectively. The images suggest that the inversions are the conics. Indeed, $R = 1/(1 + a \cdot \cos(\theta))$ is a polar equation of the conics!

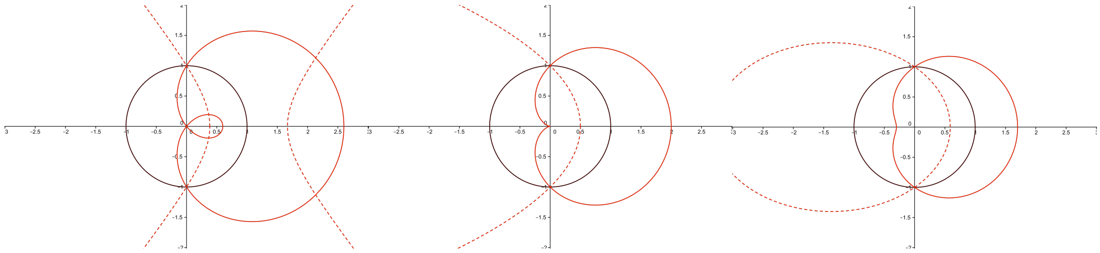


Figure 3. Pascal's snail curves and conics as inversions

This example, which I previously used with students (Drijvers, 1992), shows how exploration with digital technology, in this case a dynamic geometry tool, may lead to conjectures, invite proof and provide insight in mappings such as inversions, which without such a digital tool would have been less accessible.

3. What is known about the effect of using ICT on mathematical achievement?

If we have had inspiring examples around for many years, one might expect that they are intensively used in mathematics education and that this has led to students' improved understanding and mathematical achievement. Is this impression backed up by research data?

This is only the case to a limited extent. In spite of the impressive number of research studies devoted to the use of technology in mathematics education, there are not so many review studies or publications that synthesize the findings in a somewhat generic way. I found three recent review studies (Cheung and Slavin, 2011; Li and Ma, 2010; Rakes, Valentine, McGatha, and Ronau, 2010). These three studies report positive effects of the use of digital technology in mathematics education. Rakes, Valentine, McGatha, and Ronau (2010) speak about small but significant positive effects, specifically for algebra. For mathematics in general, Li and Ma's (2010) review includes 41 studies and similarly report "… a moderate but significant positive effect of computer technology on mathematics achievement" (Li & Ma, 2010, p. 232). Cheung and Slavin in their 2011 study set the criteria for studies to be included higher, including an experimental design and long duration. Their final conclusion refers to a modest difference: "Educational technology is making a modest difference in learning of mathematics. It is a help, but not a breakthrough." (Cheung & Slavin, 2011, p. 20). In short, the effect of the use of digital resources on mathematics achievement seems to be positive, but modest. This is not an overwhelming result.

If we consider these review studies in more detail, it is interesting to notice that the effect sizes reported in the different research reports did not significantly increase over time. This suggests that, even if digital tools became more sophisticated and more widespread, and while teachers became more used to exploiting them in their courses, the benefits for student achievement did not seem to increase. Other findings from the reviews studies are that small-scale studies have bigger effect sized than large-scale ones – which makes sense as small-scale studies are easier to control – and that short interventions do not necessarily lead to smaller effect sizes. The Rakes et al. (2010) review study also claims that the largest effect sizes are found in studies on conceptual understanding rather than on procedural skill acquisition (Rakes et al., 2010). The latter finding is interesting, as it has often been suggested that digital tools are particularly efficient for practicing procedural skills.

All in all, we conclude that there is modest support for the claim that the use of digital technology may have a positive effect on student achievement. However, little is known about decisive factors that explain these effects, or about successful approaches in teaching that may optimize the possible benefits.

As an aside, we notice that the above review studies only included experimental quantitative studies, whereas an important body of research concerns qualitative, often explorative studies. It is a challenge to researchers to design studies on the use of digital technology in mathematics education that combine the affordances of both methodological paradigms.

4. Promising perspectives

The previous section shows that our knowledge on fruitful integration of technology in mathematics education is limited. What perspectives can help us to further proceed in this direction? In the following, we briefly address the notions of instrumental genesis and instrumental orchestration, and the issue of digital assessment.

Instrumental genesis

The interplay between the user and the digital tool for solving a mathematical task is a subtle bi-directional phenomenon: the user decides on howway he wants to use the tool, but the opportunities and constraints of the tool also guide how the user will use it. Techniques for using the tool will co-emerge with the user's mathematical thinking. This process of co-emergence is called instrumental genesis (Artigue, 2002). It is based on the distinction between an artefact, the (in our case technological) object that the students use, and an instrument, i.e., the artefact together with the mental schemes that the user puts into action while using the artefact (Verillon and Rabardel, 1995). Examples of such schemes can be found in literature (Drijvers, 2003; Drijvers and Gravemeijer, 2004).

The reason why I consider the notion of instrumental genesis important is that it offers a lens to observe and to become aware of the interplay between the techniques to use a digital tool and the mathematical thinking involved. If we, as teachers, educators or researchers get our fingers behind this interaction, we will be better able to understand student learning with technology and to exploit the potential digital tools offer for learning. As soon as we really understand the process of instrumental genesis in specific situations (i.e., for specific tools and tasks), we can generalize this knowledge towards the relationship between tool use and mathematical learning in general.

Instrumental orchestration

Instrumental genesis is an important lens to look at student learning with technology. However, students' instrumental genesis usually needs guidance by a teacher. For this, Trouche (2004) introduced the notion of instrumental orchestration. An instrumental orchestration is the teacher's intentional and systematic organisation and use of the various artefacts available in a learning environment in a given mathematical task situation, in order to guide students' instrumental genesis. An instrumental orchestration consists of different layers: the layer of didactical configuration, the layer of exploitation mode, and the layer of didactical performance (Drijvers et al., 2010). The model has been used to set up a tentative taxonomy of ways in which teachers can use digital tools in their teaching (Drijvers et al., 2013).

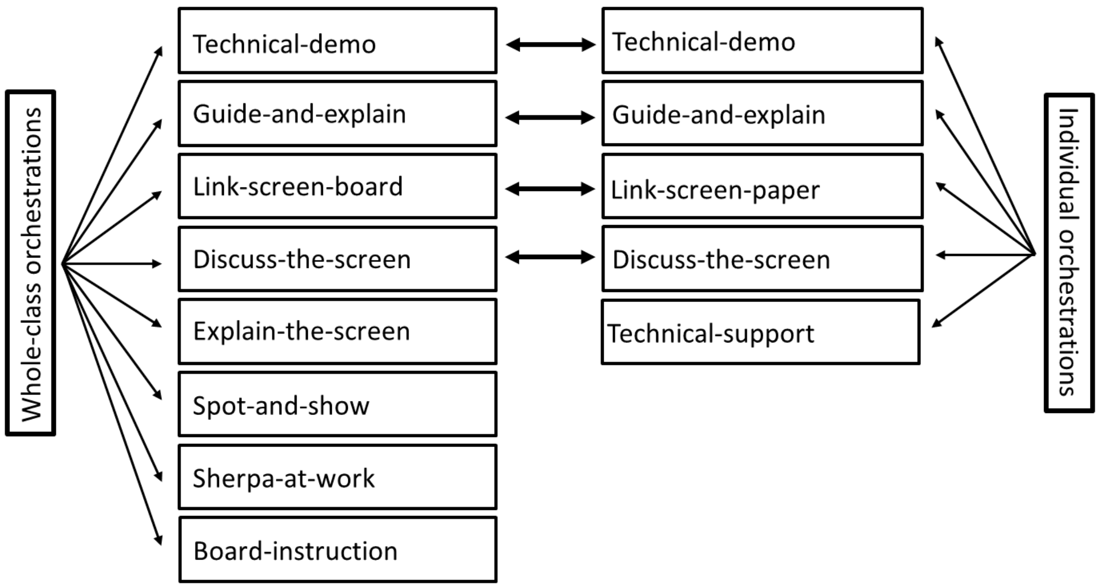


Figure 4. Tentative taxonomy of orchestrations (Drijvers et al., 2013)

The reason why I consider the notion of instrumental orchestration important is that the integration of digital tools in mathematics teaching is far from straightforward to teachers. The orchestration model offers a means to observe and classify teaching arrangements, and to use this lens for teacher professional development. If teachers become aware of their orchestrational decisions, this may help them to make appropriate choices in the future and to develop ways of teaching that match their preferences and that make optimal use of the opportunities digital tools offer.

Digital assessment

The final important perspective we now discuss is digital assessment. If the availability of digital tools affects mathematics learning and teaching, it will certainly also affect assessment. Digital assessment offers opportunities for formative and summative tests that are flexible in time, adaptive, and can be scored automatically. In the nearby future, we expect assessment to be more and more to be delivered through digital means.

However, the point to make here is that we should put high demands on environments for digital assessment, so that we are sure not to lose the advantages of paper-end-pencil assessment, including manual grading by the teacher:

> Yet there is much more to mathematics than producing such simple responses: ideally assessment across the full bandwidth of mathematics should deal with multiple-step calculations, checking each step as a teacher might, analysing arguments and explanations, and certainly, as in the example above, providing full credit for solutions that are mathematically correct but differ in mathematical form from that expected by the setter of the question. (Stacey and Wiliam, 2013, p. 729)

As a consequence, environments for digital assessments should

- provide students with appropriate mathematical tools for entering equations, making tables, drawing graphs, and making geometrical constructions;
- provide students with means to show their problem solving strategy and to explain their reasoning;
- provide intelligent means of scoring, i.e., provide partial credits for partial solutions and full credits for solutions that are correct but unforeseen, or equivalent to the correct solution.

If environments for digital assessment have important weaknesses on the above features, one might wonder if digital assessment is appropriate. It is my conviction that we should insist on environments that offer full mathematical functionality and to support this development.

5. Conclusion

In this paper we set out to investigate whether mathematics education is involved in a fundamental process of change due to the availability of digital tools, and, if the answer is yes, whether we have evidence that this change leads to improvements in mathematics achievement.

Even if we saw that technological tools may support an explorative inquiry of a mathematical situation, we conclude that changes in mathematics education seem to take place only slowly. There is modest support for a positive effect of using ICT on mathematics achievement, but we do not know enough about decisive factors and successful approaches.

Instrumental approaches should inform us in more detail about the subtle relationship between tool use and mathematical thinking. Instrumental orchestrations may help us to identify productive ways to exploit this relationship in teaching. Digital assessment seems a logical next step, but requires a further development of appropriate environments.

As a tentative research agenda, therefore, we should work on generalizable and replicable results in the domain of ICT use in mathematics education; on suitable transformations of research findings into teaching approaches and educational policies; and on a critical scientific attitude within our community.

Literature

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245–274.

Cheung, A., & Slavin, R. E. (2011). *The effectiveness of education technology for enhancing reading achievement: A meta-analysis*. Retrieved from http://www.bestevidence.org/reading/tech/tech.html.

Drijvers, P. (1992). *Wiskunde leren met Derive, docentenboek*. Groningen, the Netherlands: Wolters-Noordhoff.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Dissertation. Utrecht, the Netherlands: CD-bèta press. http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/886

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213–234.

Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., Doorman, M., & Boon, P. (2013). Digital resources inviting changes in mid-adopting teachers' practices and orchestrations. *ZDM Mathematics Education, 45*(7), 987–1001.

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. P. E. (2004). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 163–196). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review, 22*, 215–243.

Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., & Ronau, R. N. (2010). Methods of instructional improvement in Algebra: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research, 80*(3), 372–400.

Stacey, K., & Wiliam, D. (2013). Technology and Assessment in Mathematics. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 721–751). New York / Berlin: Springer.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281–307.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education, 9*(3), 77–101.

Stefan GÖTZ, Wien

Was kann Stoffdidaktik heutzutage (noch) leisten?

Einleitung

In der modernen mathematikdidaktischen Literatur sind „reine“ stoffdidaktische Beiträge immer seltener zu finden. Die Zeitschrift „Didaktik der Mathematik“, in der vor allem stoffdidaktische Artikel veröffentlicht wurden, gibt es beispielsweise schon lange nicht mehr. Bereits 1985 wurde bei der Lektüre von „Mensch und Mathematik“ klar, dass „didaktisches Denken und Handeln“ immer auch die Reflexion des Verhältnisses zur Mathematik mit einschließt.

Zehn Jahre später fragte dann Hans-Christian Reichel auf der 29. Tagung für Didaktik der Mathematik in Kassel: „Hat die Stoffdidaktik Zukunft?“

Fast zwanzig Jahre danach sollen aktuelle Indikationen – Vernetzungen (im Mathematikunterricht), die Schnittstellenproblematik und der Kompetenzaufbau beim Begründen im Mathematikunterricht – für stoffdidaktische Überlegungen aufgezeigt werden. Dabei sind „didaktisch orientierte Sachanalysen“ (Heinz Griesel) gefragt, um eine Beschreibung und Bewertung der Unterrichtstauglichkeit a priori zu ermöglichen. Erich C. Wittmann erweitert den Ansatz der traditionellen Stoffdidaktik zur „strukturgenetischen didaktischen Analyse“, die ausdrücklich auch Prozesse mit einbezieht (Wittmann 2014). Das Konzept der „mathematischen Miniatur“ bildet mathematisches Tun möglichst unverzerrt ab („vereinfachen, ohne zu verfälschen“) und ist ein Grundsatz für die Darstellung der folgenden Themen aus Stochastik, Analysis und Geometrie.

Vernetzungen am Beispiel Stochastik – Analysis

Das Paradoxon des Schenkens (vgl. Székely 1990, S. 30 ff.): Eine Gesellschaft bestehe aus n Personen, von denen jede ein Geschenk mitbringt. Diese n Geschenke werden eingesammelt und zufällig wieder verteilt, so dass jede Person genau ein Geschenk bekommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass niemand sein Geschenk zurückerhält?

Mit Hilfe der Ein-Ausschaltformel erhält man $p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$ für $n > 2$. Aus der Analysis ist $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}$ bekannt. „Diese faszinierende Verbindung von Stochastik und Analysis“ (Kratz 2005, S. 15) kann auf für die Mathematik typische Weise verallgemeinert werden.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 29–36).
Münster: WTM-Verlag

Jetzt ist die Wahrscheinlichkeit p_n^k gefragt, dass genau *k* Personen ihr Geschenk zurückbekommen. Durch Zurückführen auf das vorige Problem (auch eine typische mathematische Herangehensweise) ergibt sich $p_n^k = \frac{1}{k!} \cdot [\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}]$. Nun lehrt die Analysis, dass $p_\infty^k := \lim_{n\to\infty} p_n^k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{e}$ gilt. Der inhaltliche stochastische Kontext führt zu $\sum_{k=0}^{n} p_n^k = 1$, denn entweder bekommt niemand sein Geschenk zurück, oder eine Person, oder zwei, oder …, oder alle *n* Personen. Da diese Beziehung für alle *n* gilt, ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} p_\infty^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot e^{-1} = 1$ einzusehen, oder $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ (>1!).

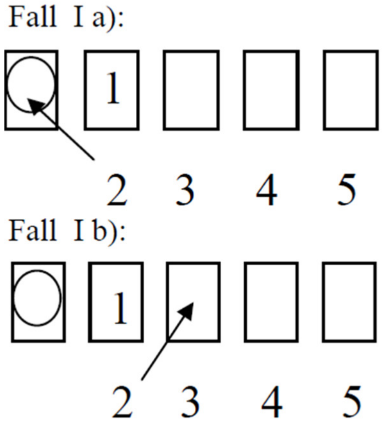
Ein veränderter Verteilungsvorgang sieht vor, dass jedes der *n* Geschenke unter denn *n* Personen fair verlost wird. Es kann also passieren, dass eine Person mehrere Geschenke erhält, eine andere dafür gar keines. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit q_n, dass eine bestimmte Person kein Geschenk bekommt? Nun ergibt sich $q_n = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Bekanntlich ist $\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1}{e}$. Schulrelevante Begründungen dieser beiden „populären" Darstellungen von $\frac{1}{e}$ fußen einerseits auf der Eigenschaft $(e^x)' = e^x$ (damit gelingt eine Abschätzung von e^x mittels Summen der Gestalt $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ durch Bildung von Ober- und Untersummen) und $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, andererseits auf $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. In einer Analysis-Vorlesung (vgl. Steinbauer 2012, S. 98) wurde aber die Exponentialfunktion als $\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ definiert mit $e := \exp(1)$. Hier ist also ein „lokales Ordnen" der Begründungsstruktur (Argumentationsbasis) der Lehrenden gefragt, was schon eine Andeutung auf die Schnittstellenproblematik darstellt.

In Götz 1993 finden sich weitere Verallgemeinerungen wie z. B. eine Veränderung der Ausgangssituation: *n* Personen bringen *m* Geschenke mit und $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \lambda > 0$. Dann führt die eben gestellte Frage auf die Poisson-Verteilung.

In der Reihe „Mathe vernetzt" findet sich im Band 1 auf S. 14 (Brinkmann, Maaß, Ossimitz & Siller 2011) in der Kategorie „Innermathematische Vernetzungen" die hierzu passende Beschreibung „Anbindung von Sätzen […] an Probleme […], die mit ihrer Hilfe gelöst werden können […]". Im Problemlösen sieht auch Kießwetter (1993, S. 5) einen Wert des Vernetzens:

„Unverzichtbar sind Vernetzungen der Wissenselemente […] in der Mathematik, wenn man diese primär als produktiven Prozeß versteht, bei dem es ja u. a. um die Lösung von Problemen geht.“

In Kratz 2005 finden SchülerInnen der Jahrgangsstufe 12 eine rekursive Darstellung der Anzahl der Möglichkeiten A_n, n Briefe so in n dazugehörende Kuverts zu stecken, dass kein Brief in einem richtigen Kuvert landet: $A_n = (n-1) \cdot (A_{n-1} + A_{n-2})$ und $A_1 = 0$ und $A_2 = 1$. Die Abbildung rechts zeigt eine mögliche Begründung dafür. Kiesl (2013) zeigt, dass dieses Problem auch bei der Berechnung der Anzahl der möglichen Achtelfinalpaarungen in der Champions-League eine Rolle spielt.



In Rasfeld (2001) wird bei der Behandlung dieses Rencontre-Problems der Bogen von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe 2 gespannt. Zu Beginn wird unter einen Satz von sieben paarweise verschiedenen Kärtchen ein zweiter identer (zufällig) gelegt und gezählt, wie oft wenigstens eine Übereinstimmung passiert (enaktiver Zugang). In der Sekundarstufe 2 schließlich wird die Verteilung p_n^k $(k = 0, \dots, n)$ der Anzahl der Fixpunkte S_n in einer Permutation analysiert. Mit Hilfe der zweipunktverteilten Zufallsvariablen X_i mit $X_i = 1$, falls die Stelle i ($i = 1,\dots,n$) ein Fixpunkt ist und 0 sonst, können Erwartungswert und Varianz von S_n ausgerechnet werden: beide Male ergibt sich der Wert 1 unabhängig von n (Engel 1973, S. 151 f.)! So „wird aus kleinen Bächen ein Fluß“ (Székely 1990, S. 31): es ist zwar $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_i = 1) = 0 \;\forall i$, aber $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(S_n \geq 1) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$.

Die Schnittstellenproblematik in der Analysis

Das im vorigen Abschnitt präsentierte Problemfeld erfordert die Formulierung mehrerer analytischer Grenzwertsätze, wie z. B. dass $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = a^b$ für zwei konvergente Folgen a_n und b_n mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ unter gehörigen Voraussetzungen gilt. Damit wird eine Transferproblematik angesprochen: können analytische Konzepte von Lehramtsstudierenden selbstständig angewendet werden? Eine eventuelle positive Antwort ist aus empirischen Gründen in Zweifel zu ziehen. Lehramtsstudierende reihen die Fachwissenschaft an vorletzte (vierte) Stelle in einer Relevanzbewertung der Wissensbereiche ihrer Ausbildung (Etzlstorfer 2010, S. 105). Und ein aktuelles Zitat eines/r Lehramtsstudierenden: „Besonders in Analysis konnte ich keine Parallelen zur Schule mehr sehen.“ (Nikodim 2013).

Für das Kapitel „Folgen und Reihen" treffen wir eine gezielte Auswahl an (drei) „Grundkenntnissen", die Schulrelevanz aufweisen: Konvergenz einer monotonen, beschränkten reellen Folge, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$ und die explizite Berechenbarkeit der geometrischen Reihe unter entsprechenden Voraussetzungen (Götz 2013, S. 365 f.). Ebenda findet sich auch eine innermathematische Anwendung für Grundkenntnis 1, die Approximation des Kreisumfanges durch regelmäßige Polygone nach Archimedes.

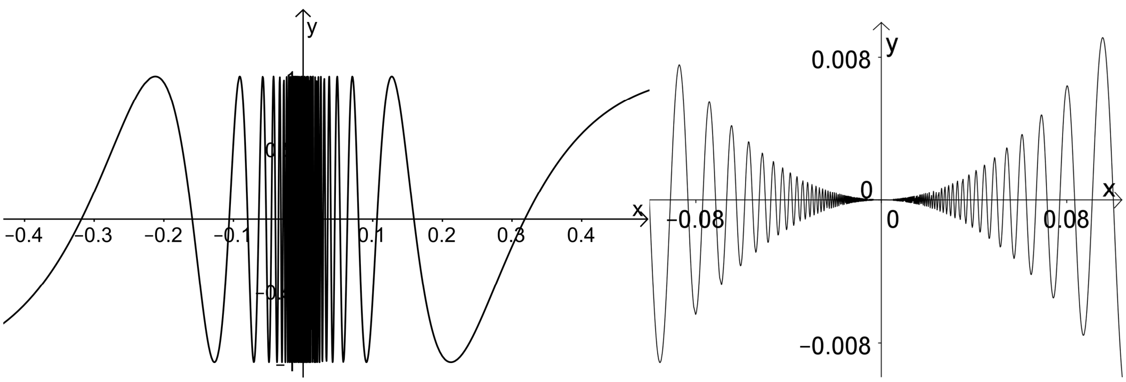
Das Auslosungsverfahren für den Palio, das traditionelle Pferderennen in Siena, wählt wegen der Enge der Rennbahn zehn aus den 17 startberechtigten Contraden (Bezirke) aus. Die sieben am n-ten Rennen nicht startenden Contraden sind beim nächsten Rennen sicher dabei, die restlichen drei werden durch Los aus den verbleibenden zehn bestimmt (Fruttero & Lucentini 1995, S. 18 f.). Wenn wir für eine bestimmte Contrade eine Zufallsvariable X_i definieren, die den Wert 1 annimmt, wenn die Contrade am i-ten Rennen teilnimmt, sonst 0 wird, dann sind die Anfangswahrscheinlichkeiten $p_1 = \mathrm{P}(X_1 = 1)$ und $q_1 = 1 - p_1 = \mathrm{P}(X_1 = 0)$ zwar unbekannt (der Palio in Siena wird seit dem Mittelalter veranstaltet), sehr wohl aber sind die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Rennen auf das nächste klar: $p_{00} := \mathrm{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 0 = 1 - \mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) =: 1 - p_{01}$ und $p_{10} := \mathrm{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \frac{7}{10} = 1 - \mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) =: 1 - p_{11}$. Mit $p_n := \mathrm{P}(X_n = 1)$ und $p := p_{11} = \frac{3}{10}$ ist $p_{n+1} = p_{11} \cdot p_n + p_{01} \cdot (1 - p_n) = 1 + (p - 1) \cdot p_n$. Das ist eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung, die mit Hilfe der geometrischen Reihe (Grundkenntnis 3) gelöst werden kann (vgl. Götz & Reichel 2013, S. 8 f.). Die explizite Darstellung ist $p_n = \frac{1-(p-1)^{n-1}}{2-p} + (p-1)^{n-1} \cdot p_1$. Grundkenntnis 2 führt zu $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2-p} = \frac{10}{17}$. Das heißt die Teilnahmewahrscheinlichkeit für eine bestimmte Contrade konvergiert mit der Anzahl der Rennen gegen jene Teilnahmewahrscheinlichkeit, die bei Losentscheid bei jedem Rennen der Fall wäre. Auch der Erwartungswert des zufälligen Bruchteils an Teilnahmen $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n} X_i$ konvergiert gegen diesen Wert $\frac{10}{17}$. Das und andere Beschreibungsmöglichkeiten für dieses Auslosungsverfahren (u. a. als Markoff-Kette) finden sich in Götz & Grosser 1999.

Es wird also hier der zweite Teil der von Felix Klein beschriebenen doppelten Diskontinuität angesprochen: „Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so muß er eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, […]" (Klein 1908, S. 1 f .).

Der schon angedeutete Gap zwischen Differential- und Integralrechnung in der Schule und Analysis an der Universität kann noch an vielen anderen Beispielen beobachtet werden: die Definition der Sinusfunktion etwa, einerseits als Verhältnis von Länge der Gegenkathete zu Länge der Hypotenuse im rechtwinkeligen Dreieck, andererseits als Imaginärteil der komplexen Exponentialreihe (z. B. Steinbauer 2012, S. 158). Die Überwindung dieser Kluft fordert neben universitärem Hintergrundwissen eine „didaktisch sensible Fachkompetenz“ (Leufer & Prediger 2007, S. 272). Dazu werden drei Bausteine vorgeschlagen:

- Grundvorstellung: analytische Eigenschaft ruft „passende“ Bilder hervor,
- Grundkenntnis: Fakten, Zusammenhänge bezogen auf ein bestimmtes (analytisches) Thema, die „hinreichend“ weit tragen,
- Grundeinsicht: Abruf „passender“ Methoden bei (analytischen) Tätigkeiten.

Als typische Unstetigkeitsstellen sollten neben den Sprungstellen auch Oszillationen wie sie z. B. bei der reellen Funktion $f: f(x) = \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ vorkommen (Abbildung links), als Grundvorstellungen abrufbar sein.



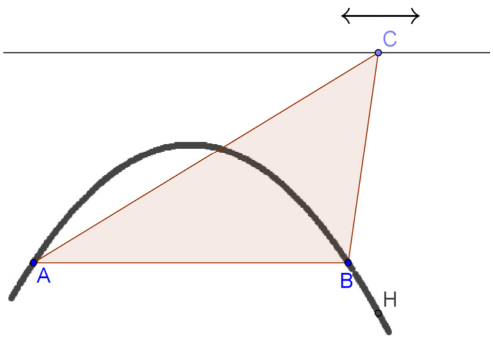
Die reelle Funktion $g: g(x) = x^2 \cdot \sin\frac{\pi}{x}$ für $x \neq 0$ und wieder $g(0) = 0$ dagegen ist überall stetig und sogar differenzierbar (Abbildung rechts). Um das einzusehen, genügt es nicht, die Ableitungsregeln auf den Funktionsterm anzuwenden. Die Differenzierbarkeit im Ursprung nachzuweisen bedarf es des Rückgriffes auf den Differenzen- bzw. Differentialquotienten, eine wichtige Grundeinsicht.

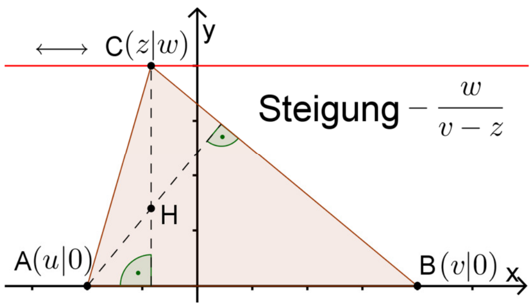
Diese drei Bausteine finden sich im Grundvorstellungskonzept vom Hofes wieder (vom Hofe 1995, S. 97 f.):

„Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen, (Grundkenntnis)
- Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen', die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, (Grundvorstellung im engeren Sinne)
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur." (Grundeinsicht)

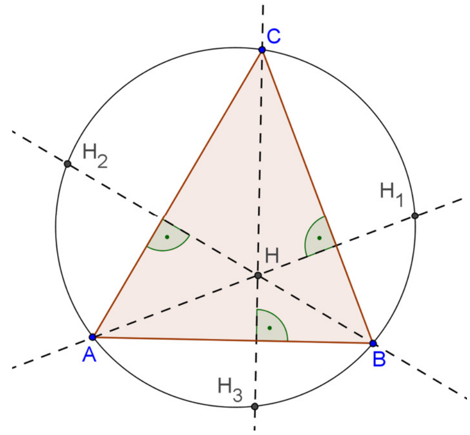
Kompetenzaufbau beim Begründen in der Geometrie





Der Eckpunkt C eines Dreiecks bewegt sich parallel zur gegenüberliegenden Dreiecksseite AB. Welche Spur verfolgt dabei der Höhenschnittpunkt (vgl. Krauter 2005, S. 278)? Die Abbildung links zeigt die Spur, die an eine Parabel erinnert. Die Bereitschaft sich auf mathematische Aufgabenstellungen einzulassen, die eine (einfache) Begründung einfordern, ist die erste Stufe eines möglichen Kompetenzmodells (vgl. Bürger 1979 und Bruder & Pinkernell 2011, S. 5). Wenn das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem gelegt wird (Abbildung rechts: $A(u|0)$, $B(v|0)$ und $C(z|w)$), dann kann die geometrische Bewegung von C als numerische Veränderung der x-Koordinate z von C beschrieben werden: Stufe 3 des Kompetenzmodells sieht vor, mathematische Begründungen in Kommunikationssituationen darlegen und argumentieren zu können. Der Schnitt der Höhen durch A bzw. C ergibt $y_H = \frac{v-x_H}{w} \cdot (x_H - u)$ als Zusammenhang der Koordinaten x_H und y_H des Höhenschnittpunktes H. Als Vorübung können für den Spezialfall $z = 0$ die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H als einfache Aufgabe (Schnitt zweier Geraden) ausgerechnet werden: $H(0|-\frac{uv}{w})$ (Götz & Hofbauer 2012, S. 36). Die damit angesprochene Stufe 2 verlangt, vorgegebene

Begründungen zu verstehen, nachvollziehen und erklären zu können. Das Erkennen der Argumentationsbasis ist dabei wesentlich. Als letzte Stufe (4) ist das eigenständige Finden einer Begründung einer mathematischen Aussage definiert, inklusive Wahl der Argumentationsbasis. In Bürger 1979, S. 121, findet sich dazu: „Das selbständige Führen von Beweisen wird im allgemeinen aber nur dann möglich sein, wenn dem Schüler zumindest ein Beweis bekannt ist, der eine starke Ähnlichkeit mit dem zu führenden Beweis hat […]“. In Krauter 2005, S. 75 findet man: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den drei Seiten des Dreiecks, dann liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis des Dreiecks.



Analoge Berechnungen am Dreieck im Koordinatensystem zeigen, dass der Umkreismittelpunkt von C genausoweit entfernt ist wie vom an AB gespiegelten Höhenschnittpunkt $H_3(0|\frac{uv}{w})$. Das genügt, denn jede Seite des Dreiecks kann zu jener werden, die auf der x-Achse liegt (Götz & Hofbauer 2012, S. 36).

Literatur

Brinkmann, A., Maaß, J., Ossimitz, G. & Siller, H.-St. (2011). Vernetzungen und vernetztes Denken im Mathematikunterricht. In: A. Brinkmann, J. Maaß & H.-St. Siller (Hrsg.): *Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht.* Band 1 (S. 7–21). München: Aulis.

Bruder, R. & Pinkernell, G. (2011). Die richtigen Argumente finden. *mathematik lehren*, Heft 168, 2–7.

Bürger, H. (1979). Beweisen im Mathematikunterricht – Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In: W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht*. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 2 (S. 103–134). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky und Stuttgart: B. G. Teubner.

Engel, A. (1973). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Band 1. Stuttgart: Klett.

Etzlstorfer, S. (2010). $a^2 + b^2 = c^2$ – *¿Qué significa eso? Vergleich der Fachdidaktiken in Mathematik und Romanistik an der Universität Wien*. Universität Wien: Diplomarbeit.

Fischer, R. & Malle, G. (unter Mitarbeit von H. Bürger) (1985). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* Mannheim u. a.: Bibliographisches Institut.

Fruttero, C. & Lucentini, F. (1995[2]). *Der Palio der toten Reiter*. München: Piper.

Götz, S. (1993). Eine mögliche Verbindung von Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht und ein alternativer Zugang zur Poisson-Verteilung mit Hilfe eines Paradoxons. *Didaktik der Mathematik 21*, 182–206. Erratum im PM Jahresverzeichnis 2001, 4.

Götz, S. (2013). Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien. In*: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Für die GDM herausgegeben von G. Greefrath, F. Käpnick und M. Stein. Band 1 (S. 364–367). Münster: WTM.

Götz, S. & Grosser, M. (1999). Über das Pferderennen in Siena. *Mathematische Semesterberichte 46*, 77–92.

Götz, S. & Hofbauer, F. (2012). Immer geradeaus in Dreiecken! Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft. *Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 44 / *54. Jahrgang,* 35–39.

Götz, S. & Reichel, H.-C. (Hrsg.) (2013). *Mathematik 8* von R. Müller und G. Hanisch. Wien: öbv.

Kiesl, H. (2013). Match me if you can. Mathematische Gedanken zur Champions-League-Achtelfinalauslosung. *Mitteilungen der DMV 21*, 84–88.

Kießwetter, K. (1993). Vernetzung als unverzichtbare Leitidee für den Mathematikunterricht – und warum mathematikdidaktische Bemühungen sehr oft in kurzschrittige und kurzsichtige Einspurigkeit münden. *mathematik lehren*, Heft 58, 5–7.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Leipzig: B. G. Teubner.

Kratz, H. (2005). Das Problem der vertauschten Briefe – zwei Wege zur Herleitung einer Rekursionsformel. *Stochastik in der Schule 25*, 11–15.

Krauter, S. (2005). *Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken*. München: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag.

Leufer, N. & Prediger, S. (2007). „Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule“. Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung. In: A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann & S. Prediger (Hrsg.): *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag* (S. 265–276). Hildesheim: Franzbecker.

Nikodim, M. (2013). *Motivation und Erwartungshaltung von Mathematikstudierenden – Auswertung der Fragebögen zu „Einführung in die Analysis“* an der Universität Wien. Unveröffentlichtes Manuskript, Wien 2013.

Rasfeld, P. (2001). Das Rencontre-Problem, eine Quelle für den Stochastikunterricht von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2001*, für die GDM herausgegeben von G. Kaiser (S. 496–499). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Steinbauer, R. (2012*). Einführung in die Analysis*. Skriptum zur Vorlesung, Universität Wien. http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem12/EidA_Vo_2012-06-14.pdf, 25.2.2014.

Székely, G. (1990). *Paradoxa. Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik*. Budapest: Akadémiai Kiadó.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Texte zur Didaktik der Mathematik (herausgegeben von N. Knoche und H. Scheid). Heidelberg u. a.: Spektrum Akademischer Verlag.

Wittmann, E. Ch. (2014). Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art. Erscheint in *mathematica didactica.*

Silke RUWISCH, Lüneburg

Mathematik lernen und unterrichten in der Grundschule

Einleitung

Anlass für diesen Beitrag ist die Frage, was in der Mathematikdidaktik seit Verabschiedung der Bildungsstandards 2004 eigentlich erreicht wurde und welche Forschungslücken zu konstatieren sind.

Mein Blick auf dieses Thema ist ein spezifischer: Als Sonderpädagogin blicke ich primär psychologisch auf das individuelle Lernen, als Soziologin dann sekundär auf dieses individuelle Lernen im sozialen Umfeld.

Mit diesem Fokus betrachte ich die *prozessbezogenen* Kompetenzbereiche der Bildungsstandards. Diese Konzentration auf die allgemeinen Kompetenzen ist vorrangig motiviert als Gegengewicht zu dem häufig inhaltlichen Blick, in welchem die prozessbezogenen Kompetenzen lediglich begleitende Funktion einnehmen. Alle fünf Kompetenzbereiche sollen betrachtet werden. Ausgehend von den formulierten Erwartungen in den Bildungsstandards werden wenige Hauptpunkte des jeweiligen Gebietes thematisiert und grundlegende offene Fragen aufgeworfen. Insofern warne ich davor, Vollständigkeit zu erwarten.[1]

Problemlösen

Erwartungen: Die Schülerinnen und Schüler können a) mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden, b) Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren) und c) Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen. (KMK 2005, 10)

Problemlösestrategien sind wesentlich zum Lösen mathematischer Probleme. Strategiekeime verschiedener Strategien, z.B. Rückwärtsarbeiten, Extremalprinzip, Ausschlussprinzip, sind bereits im Grundschulalter erkennbar (Stein 1999; Burchartz 2003). Probieren ist jedoch die wesentliche Strategie dieses Alters. Sie kann in der Grundschulzeit zum systematischen Probieren unter bewussterem Nutzen von z.B. Zahlbeziehungen, Operati-

[1] Die folgenden Ausführungen könnten den Eindruck erwecken, mathematikdidaktische Forschung im Grundschulalter sei theorielos. Dies ist weder den angeführten Literaturquellen zu unterstellen noch gilt dies insgesamt für die deutsche Mathematikdidaktik der Grundschule. Aufgrund des eingeschränkten Platzes verweise ich bezüglich langfristiger Theoriestränge auf meine Ausführungen in http://www. didaktik-der-mathematik.de/ pdf/PME37_National_ Presentation.pdf. Aus demselben Grund findet man das umfangreiche Literaturverzeichnis zum Beitrag unter http://www.leuphana.de/ueber-uns/personen/silke-ruwisch/publikationen. html

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 37–44). Münster: WTM-Verlag

onswissen oder geometrischen Beziehungen ausgebaut werden, so dass sich unterschiedliche Niveaustufen beschreiben lassen (Rasch 2001). *Frage:* Wie situiert sind Problemlöseaktivitäten im Grundschulalter bzw. wie abstrakt, verallgemeiner- und übertragbar sind sie bereits?

Problemsituationen sind durch *Komplexität* gekennzeichnet. Die geringe Kapazität des Arbeitsgedächtnisses und das noch geringe mathematische Wissen lassen die Kinder zu Beginn der Grundschulzeit noch sehr kurzschrittig arbeiten. Beides nimmt im Verlauf der Grundschulzeit zu, so dass zunehmend mehr, teilweise auch alle Bedingungen eines Problems berücksichtigt und komplexere Problemstellungen bewältigt werden können.

Dazu sind *metakognitive und selbstregulierende Aktivitäten* notwendig. Diese hängen wesentlich von einer konstruktivistisch gestalteten Unterrichtskultur und dem intensiven fachlichen Diskurs unter den Peers ab (z.B. Sjuts 2003). Metakognitive Aktivitäten, wie Planen, Lösungsprozesse Überwachen und Kontrollieren sowie Reflektieren, sind in entsprechend gestaltetem Unterricht bereits zu Schulbeginn zu beobachten. Im Verlauf der Grundschulzeit ist eine Zunahme von Häufigkeit und Komplexität, Ausführlichkeit und Begründungstiefe sowie ein vermehrter Bezug auf die sachlichen Bedingungen und die Beiträge der Mitschülerinnen und Mitschüler festzustellen (Winkel 2012). *Fragen*: Wie bewusstseinsfähig sind die beobachteten metakognitiven Aktivitäten bereits in der Grundschulzeit? Lassen sich *heuristische* Lösungsbeispiele (Collet 2009) bereits in der Grundschule fruchtbar machen zur Förderung der Problemlöseaktivitäten?

Für den *Problemlöseprozess* insgesamt zeigt sich, dass dieser in der Grundschulzeit eher intuitiv und ganzheitlich verläuft. Längsschnittstudien zeigen, dass Grundschulkinder – jedenfalls mathematisch begabte – schon früh recht konstante bevorzugte Vorgehensweisen erkennen lassen (Fuchs 2006). Zwar erweist sich das Verstehen des Problems häufig als größte Hürde und hängt erwartungsgemäß sehr eng mit dem Lösungserfolg zusammen. Doch Planungsaktivitäten sowie die Rückschau oder eine bewusste Ausweitung auf weitere Probleme sind i.d.R. auch zu Beginn der SI eher selten zu beobachten (Rott 2013). *Frage*: Wie kann das implizite Nutzen und eigenständige Entwickeln von Problemlösefähigkeiten mit expliziter Thematisierung einhergehen (Bruder 2003; Bruder & Collet 2011)?

Darstellen

Erwartungen: Die Schülerinnen und Schüler können a) für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen, b) eine Darstellung in eine andere übertragen und c) Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten. (KMK 2005, 10)

Didaktisches Material dient der Veranschaulichung und Anschauung für Lehrpersonen wie für Lernende (Krauthausen & Scherer 2007). Als Veranschaulichungsmittel nutzen Lehrerinnen und Lehrer didaktische Materialien zur Einführung mathematischer Ideen und Handlungen. Für die Schülerinnen und Schüler bieten didaktische Materialien die Möglichkeit, ihre mathematischen Ideen mitzuteilen und zu begründen. Werden didaktische Materialien unter dem Aspekt der Anschauung betrachtet, stellen sie für Lernende ein Werkzeug zur (Re)konstruktion von Mathematik dar und dienen Lehrpersonen als diagnostisches Instrumentarium, um die mathematischen Konstruktionen der Schülerinnen und Schüler genauer zu erfassen. Diesen diskursiven Prozessen im Unterricht unterliegen permanent unterschiedliche Deutungen von Materialien (Gellert & Steinbring 2014). *Fragen*: Wie konstruieren Kinder eigentlich „ihre" Mathematik mit Hilfe von didaktischen Materialien (Steenpaß & Steinbring 2014)? Welche metakognitiven und selbstregulativen Prozesse spielen hierbei eine Rolle?

Grundlegend für den Umgang mit Arbeitsmitteln und Darstellungen scheint die *visuelle Strukturierungsfähigkeit* zu sein. Söbbeke (2005) unterscheidet vier Ebenen. Werden Kinder aufgefordert, Arbeitsmittel und Darstellungen zu deuten, so können sie dies eher konkret empirisch mit stark dinglicher Einzeldeutung oder aber strukturiert tun. Wenn Kinder strukturiert deuten, dann zeigt sich eine zunehmende Flexibilität in den Deutungen, die auch durch die Fähigkeit zur Umstrukturierung und vor allem relationale Deutungen bestimmt ist. Bei gedanklichen Umstrukturierungen gelingen zunächst Zerlegungen, bevor auch das Zusammenfügen oder sogar beide Prozesse in einer Bearbeitung möglich sind (Beutler 2013). *Fragen:* Wie lassen sich visuelle Wahrnehmungs- und Strukturierungsprozesse anregen, fördern und der bewussten Fokussierung zugänglich machen? Wie domänenspezifisch bzw. allgemein und übertragbar sind die beschriebenen Ebenen?

Darstellungswechsel: Es ist schon lange unbestritten, dass die Brunerschen Repräsentationsmodi sich sowohl auf das Darstellen – die äußere Präsentation – als auch auf das Vorstellen – die innere Repräsentation – beziehen (Bruner 1988; Franke 1998). Beide lassen nur bedingt Rückschlüsse auf das jeweils andere zu. So führt das Handeln mit didaktischem Material nicht unbedingt zu vorgestellten Handlungen (Lorenz 2011). Ebenfalls unstrittig ist, dass die Brunerschen Repräsentationsmodi keine feste Lernfolge von enaktiv über ikonisch zu symbolisch darstellen (Bruner 1996), sondern sich die verschiedenen Darstellungsformen gegenseitig bereichern (Bruner 1988) und insbesondere der Darstellungswechsel bzw. die gleichzeitige Verfügbarkeit mathematischer Zusammenhänge in verschiedenen Modalitäten als fruchtbare Lösungsstrategie gilt (Fritzlar & Heinrich 2010). Deshalb ist auch in Hinblick auf das Operationsverständnis eine möglichst hohe Flexibilität im inter- aber auch intramodalen Transfer wünschenswert (Bönig 1995; Moser-Opitz 2007). Während vielfach Produkte von Darstellungswechseln bzgl. verschiedener Kriterien analysiert wurden (Radatz 1991; Bönig 1995; Ruwisch 2001), erlangt der Prozess des Darstellungswechsels erst in jüngerer Zeit Aufmerksamkeit. Die Untersuchung von Kuhnke (2013) zeigt auf, dass Grundschulkinder unterschiedliche Fokussierungen in diesem Prozess vornehmen: Sie richten die Aufmerksamkeit entweder auf einzelne Elemente, auf das Ergebnis oder auf Beziehungen zwischen Elementen bzw. Teilstrukturen. *Fragen:* Wie hängen diese Fokussierungen mit den Strukturierungsfähigkeiten der Kinder zusammen? Welche anderen Einflussfaktoren wirken auf die Prozesse des Darstellungswechsels? Wie sind gleichzeitige Repräsentationen in verschiedenen Modalitäten, sog. Doppelrepräsentationen (Fritzlar & Heinrich 2010; Schnotz et al. 2012) anzuregen?

Bezüglich *spezifischer Darstellungstypen*, welche insbesondere im Bereich Daten sowie bei geometrischen Projektionen in der Grundschule eine Rolle spielen, liegen zwar z.B. zur Komplexität der Diagrammkompetenz verschiedene theoretische Modelle vor (Schnotz 2002; Phillipp 2008), jedoch kaum empirische Daten für das Grundschulalter (Stecken 2013, Plath 2014). *Fragen*: Wie entwickelt sich das Darstellungsverständnis in verschiedenen Inhaltsbereichen? Welche Spezifika der Darstellungstypen wirken wie auf Verarbeitung und Interpretation?

Modellieren

Erwartungen: Schülerinnen und Schüler können a) Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen, b) Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen und c) zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren. (KMK 2005, 10)

Kinder, Welt und Mathematik: Je jünger Kinder sind, umso stärker begegnen sie der Welt ganzheitlich und mit permanentem Interpretationsbedarf auf der Grundlage ihres aktuellen Wissensstandes. Dies bedeutet für die Unterscheidung von Sachebene und Mathematik zunächst kaum eine entsprechende Trennung. Anfangs dient die Sachebene eher als Modellebene für das mathematische Lernen der Kinder; später durchdringen sich beide wechselseitig und werden zur Stützung herangezogen (Peter-Koop 2003). *Fragen*: Welches Verhältnis von Sachebene und Mathematik ist in welchem Alter angemessen, d.h. wie implizit entwickeln sich Modellierungskompetenzen bzw. inwieweit sollen sie explizit thematisiert werden?

Ausgehend von verschiedenen Modellen des *Modellierungsprozesses* in der Mathematikdidaktik der SI der 1980er und 1990er Jahren (z.B. Blum 1985; Schupp 1994), finden sich für die Grundschule Vorschläge, aufgrund der Kurzschrittigkeit der Argumentation zu einem dreischrittigen Prozess zu verkürzen (Guder & Schwarzkopf 2001). Dagegen wurde in der SI-Didaktik eine stärkere Ausdifferenzierung vorgenommen: Das Situationsmodell ist ein Zwischenschritt, welcher verstärkt auf die Verstehensprozesse der Schülerinnen und Schüler fokussiert (Blum & Leiss 2005). Daran schließt sich die theoretische wie empirische Frage an, ob beim Verstehen einer Situation und dem Bilden des Realmodells eher Informationen reduziert und vereinfacht werden müssen oder ob beim elementaren Modellieren eher *Prozesse der theoretischen Anreicherung zur strukturellen Erweiterung* der Situation im Vordergrund stehen (Schwarzkopf 2006).

Modellieren lernt man durch Modellieren. Dies ist zwar eine sicher häufig zutreffende Aussage, doch lässt sich ebenso die Frage stellen, inwieweit *Teilschritte* gezielt angesprochen und gefördert werden können. Viele sog. Bearbeitungshilfen werden im Unterricht thematisiert, doch ist nach wie vor ungeklärt, wie Schülerinnen und Schüler lernen können, sich diese als Werkzeuge beim Modellieren nutzbar zu machen. Genauso liegen kaum Erkenntnisse bzgl. der Interpretation und Validierung von Lösungen vor. An dieser Stelle ist die Frage nach möglichen und notwendigen metakognitiven und selbstregulativen Aktivitäten erneut zu stellen. Gerade in diesem Zusammenhang ist dann zu fragen, welche Anregungen beim Modellieren wie unterstützen können (Schneeberger 2009), ohne schematisch abgearbeitet zu werden.

Als grundlegend für das Modellieren muss auch das *näherungsweise Arbeiten* gelten – eine Mathematik, die im Grundschulunterricht bisher kaum eine Rolle spielt. Zwar fiel es den Schülerinnen und Schülern einer 4. Klasse zunächst auch schwer, abzuschätzen, inwieweit Fehler in ihren Annahmen sich im Ergebnis niederschlugen, doch war zu beobachten, dass innerhalb eines Schuljahres es ihnen immer besser gelang, ihre Annahmen zu explizieren, sinnvolle Durchschnittswerte zu verwenden, überschlagend statt genau zu rechnen und ein Gefühl für die Genauigkeit ihres Ergebnisses zu entwickeln (Ruwisch & Schaffrath 2009). Dennoch gibt es gerade zu diesem Bereich weder theoretische noch empirische Evidenz.

Fazit: Grundsätzlich sind kaum Forschungsaktivitäten zum Modellieren in der Grundschule festzustellen. So ist auch keine Abgrenzung von Modellieren und Sachrechnen zu erkennen.

Argumentieren

Erwartungen: Schülerinnen und Schüler können a) mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen, b) mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln und c) Begründungen suchen und nachvollziehen (KMK 2005, 10).

Mathematisches Argumentieren als *Handlungsmuster* kann in vier Schritte zerlegt werden: Entdecken, Beschreiben, Hinterfragen und Begründen mathematischer Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge (Bezold 2009, Meyer 2007). Die inhaltliche Basis wird durch die Beschreibung der Entdeckung oder einen Verweis auf gemeinsames Vorwissen realisiert; die Begründung ist erforderlich, um die beschriebenen Sachverhalte als wahr anzuerkennen (Ruwisch & Beier 2013).

Mathematische Argumentationen können grob in zwei *didaktische Funktionsklassen* unterteilt werden (Malle 2002): In ihrer Überzeugungsfunktion – dialogisches Begründen – dienen sie dazu, eine gemeinsame Auffassung eines Sachverhalts herzustellen. Dagegen soll monologisches Begründen dazu führen, selbst Zusammenhänge herzustellen und das eigene Verständnis zu vertiefen (Steinbring 2000). Diese epistemische Funktion wird dem Schreiben (Stephany et al. 2013) zugesprochen, durch welches zudem ein höheres bildungs- und fachsprachliches Niveau erreicht werden könnte, das durch konzeptionelle Schriftlichkeit gekennzeichnet ist (Gellert 2011).

Welche *Argumentationsstrukturen* lassen sich nun in dialogischen Argumentationen beobachten? Einfache Argumentationen sind i.d.R. ein- bzw. kurzschrittig, so dass ausschließlich Bedingung und Konklusion aneinandergereiht werden, ohne dass Garanten oder Stützungen angeführt werden (Schwarzkopf 2000; Fetzer 2007). Von sich aus hinterfragen Kinder nur selten, so dass dialogisch schnell Einigkeit unter den Peers herzustellen ist. Begründungsbedarf wird somit häufig zunächst durch die Lehrperson angezeigt (Schwarzkopf 2000). Die Qualität der Argumentationen lässt sich eher als substanziell und unsicher bezeichnen, als dass deduktiv-logische Schlüsse vorzufinden sind (Fetzer 2011). Die Autorin stellt zudem heraus, dass in vielen Argumentationen Teile implizit verbleiben, d.h. Garanten, Stützungen aber auch Voraussetzungen werden nicht explizit genannt, sondern häufig implizit als geltend bzw. geteiltes Wissen angenommen.

Bezüglich *schriftlicher Argumentationen* in dialogischer Form konnte Schreiber (2010) anhand eines Chats herausarbeiten, wie Schülerinnen und Schüler gemeinsam Inskriptionen entwickeln und unter welchen Bedingungen sich diese als besonders fruchtbar für Problemlöseprozesse erweisen. Im alltäglichen Mathematikunterricht werden Schülerinnen und Schüler hingegen kaum zu schriftlichen Argumentationen aufgefordert. So enthalten im Durchschnitt nur 6% aller Aufgaben eines Mathematikschulbuches Aufforderungen zum Begründen (Ruwisch 2014). In einem Mathematikdidaktik und Linguistik verbindenden Forschungsprojekt zeigte sich, dass a) mathematisches Begründen im Grundschulalter differenziert erfasst und beschrieben werden kann und b) das Entdecken und Fortführen mathematischer Zusammenhänge einfacher ist als eine mathematische Begründungsstruktur zu verwenden; beides ist jeweils einfacher als die sprachliche Realisierung der Begründungsstruktur (Neumann, Beier & Ruwisch 2014).

Fragen: Welche (sprachlichen) Mittel stehen Grundschulkindern implizit und explizit als Argumentationsbasis zur Verfügung? Wie entwickelt sich die Argumentationsfähigkeit im Verlauf der Grundschulzeit und welche Argumentationstiefe (Reichweite, Verallgemeinerbarkeit) ist erreichbar?

Kommunizieren

Erwartungen: Schülerinnen und Schüler können a) eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren, b) mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden und c) Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.

Mathematik gilt als *Fachsprache* und damit als besondere Sprache. Die (fach)sprachlichen Anforderungen von und deren Wechselwirkungen mit mathematischen Begriffsbildungsprozessen sind grundlegend für mathematikdidaktische Betrachtungen (Maier & Schweiger 1999). Zwar wird mit epistemologischen Forschungsansätzen intensiv die kommunikative Genese mathematischen Wissens im Grundschulunterricht erforscht (z.B. Steinbring 2005; Nührenbörger 2009), doch findet das Thema „Fachsprache“ dabei wenig Aufmerksamkeit. Dass gerade im Grundschulunterricht der Zusammenhang fach-, bildungs- und alltagssprachlicher Aspekte von höchster Bedeutung für das mathematische Lernen ist, wird in den letzten Jahren vermehrt konstatiert. So konnte z.B. Schütte (2009) zeigen, dass Lehrpersonen eher einer ‚impliziten Pädagogik‘ folgen, welche alltagssprachlich strukturiert ist und nicht explizit fachsprachliche und bildungssprachliche Angebote zum begrifflichen Lernen und Vernetzen enthält.

Wenn Schülerinnen und Schüler gemeinsam als *Partner oder in Kleingruppen* Aufgaben bearbeiten, so stellt sich die Frage, wie diese Arbeit sinnvoll angeleitet werden kann und welche Bedingungen zu gelingenden, welche zu misslingenden Lernergebnissen führen. Während der Redeanteil weder positive noch negative Auswirkungen zu haben scheint (Götze 2007), führt ein starker „Ich-Bezug“ mehrerer Gruppenmitglieder, der

Aufmerksamkeit einfordert, ohne diese selbst bereit zu stellen, zu Unmut bzw. Abbruch der Kooperation und auch zu misslingenden Arbeitsprozessen und Lernergebnissen (Ruwisch 2006). Als besonders lernförderliche Faktoren erweisen sich u.a. die sachbezogene interaktive Teilhabe aller (Götze 2007; Winkel 2012) sowie ko-konstruktive Problemlöseprozesse (Brandt & Höck 2011). Besonders lernförderlich für spätere individuelle Bearbeitungen sind sachbezogene Nachfragen, Paraphrasierungen etc. Als lernhinderlich erweisen sich neben dem oben beschriebenen unkooperativen Verhalten aber auch z.B. strukturierte Vorträge einzelner bei passiver Zuhörerschaft der anderen (Götze 2007) oder auch eine zu hohe kognitive Annäherung, so dass die Kinder quasi wie eine Person denken und das kritische Gegenüber als Korrektiv fehlt (Brandt & Höck 2011).

Auch *nonverbale Kommunikationsaspekte* erlangen zunehmend mehr Beachtung. Gestik-Lautsprache-Relationen lassen sich als integriertes Sprachsystem mit semantischer und temporaler Kohärenz beschreiben, so dass sog. ‚Gesture-Speech-Mismatches' sich als Indikatoren für die ‚Zone der nächsten Entwicklung' auch im mathematischen Lernen erweisen können (Huth 2011).

Fragen: Wie können sprachliche, gestische und handlungsunterstützende Äußerungen integriert betrachtet werden? Welches Verhältnis von Alltags- und Fachsprachlichkeit ist in der Grundschule angemessen? Wie lassen sich lernförderliche Faktoren initiieren und lernhinderliche vermeiden?

Grundlegende Schlussfragen

Wie konkret, situiert, intuitiv und ganzheitlich handeln, denken und lernen Grundschulkinder? Wie abstrakt, dekontextualisiert, bewusst und fachspezifisch können und sollen sie welche Kompetenzen erreichen?

Gleichermaßen gilt es jedoch auch dieselbe Frage in Bezug auf Studierende sowie Lehrerinnen und Lehrer zu stellen, evtl. ergänzt durch die Frage: Welche theoretische Basis und Breite benötigen Lehrpersonen, um die jeweiligen empirischen Ergebnisse entsprechend einordnen zu können und sie für sich handlungsleitend werden zu lassen?

Wie ernst nehmen wir das Vorwissen und die Annahmen eines eigenaktiven, konstruktiven und sozialen Lernens von Mathematik und Mathematikdidaktik im Mathematikunterricht in Mathematikveranstaltungen in der Ausbildung und in Angeboten der Fort- und Weiterbildung?

Wolfgang SCHNOTZ, Landau

Visuelle kognitive Werkzeuge beim Mathematikverstehen

Strukturen und Prozesse beim kognitiven Problemlösen

Bei der Analyse menschlichen Problemlösens spielt der Repräsentationsaspekt eine zentrale Rolle. Für die Gestaltpsychologie war erfolgreiches Problemlösen im Wesentlichen eine Angelegenheit der Wahrnehmung. Problemlösen erfordert, dass die bisherige Wahrnehmung der Situation so umstrukturiert wird, dass die Lösung sofort offensichtlich wird, also an der neuen Wahrnehmung abgelesen werden kann. Wenn man z.B. an einem Tag einen Berg besteigt und am folgenden Tag auf dem gleichen Weg und im gleichen Zeitraum ins Tal zurückkehrt, kann man sich fragen, ob es einen Punkt gibt, an dem man beim Herabsteigen zur gleichen Tageszeit ist, wie man beim Hinaufsteigen war. Die Frage wird dann leicht lösbar, wenn man sich statt einer Person, die am einen Tag hinauf- und am anderen Tag herabsteigt, zwei Personen vorstellt, von denen die eine den Weg hinauf und die andere den Weg heruntergeht. Diese müssen sich treffen, sind also zur selben Zeit am selben Ort. Diese neue Sichtweise des Problems macht die Lösung sofort offensichtlich.

Im Gegensatz zur Gestaltpsychologie sah die Psychologie der Informationsverarbeitung erfolgreiches Problemlösen vor allem darin, von einem Ausgangszustand einen Weg zu einem Zielzustand in einem sog. Problemraum zu finden. Beispielsweise muss beim sog. Turm-von-Hanoi-Problem innerhalb eines Systems von drei Stäben ein Satz von Scheiben unterschiedlicher Größe von einem Stab (Ausgangszustand) zu einem bestimmten anderen Stab (Zielzustand) verlagert werden, wobei immer nur eine Scheibe bewegt und nie eine größere Scheibe auf eine kleinere Scheibe gelegt werden darf. Jeder auf diese Weise herstellbare Zustand entspricht einem Ort im Problemraum, und Problemlösung besteht darin, einen möglichst kurzen Weg durch den Problemraum zu finden, wobei bestimmte Heuristiken (z.B. Differenzheuristik, Mittel-Ziel-Analyse, Schleifenvermeidung) angewandt werden können.

Ohlsson (1992) hat mit seiner Representational Change Theory eine Synthese des gestaltpsychologischen und des informationspsychologischen Ansatzes vorgenommen. Problemlösen erfordert demnach Repräsentationen mit adäquaten Strukturen wie auch Prozessen, die auf dieser Struktur operieren. Die Gestaltpsychologie fokussierte primär auf Strukturen, wogegen die Informationsverarbeitungspsychologie primär auf Prozesse fokussierte. Während die Gestaltpsychologie nicht ausreichend berücksichtigte,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 45–52). Münster: WTM-Verlag

dass Einsichtsprobleme auch über einen Problemraum verfügen und auch auf Operationen innerhalb dieses Raumes angewiesen sind, hat die Informationsverarbeitungspsychologie nicht ausreichend berücksichtigt, dass Problemlösen nicht immer auf das Finden des Weges durch einen Problemraum beschränkt ist, sondern auch erfordern kann, den gegebenen Problemraum in einen anderen Problemraum zu transformieren (d.h. die Problemrepräsentation umzustrukturieren), der eine vereinfachte Folge von Operationen ermöglicht. Gutes Problemlösen beinhaltet somit das Generieren einer Repräsentation, die das leichte Ausführen jener Operationen ermöglicht, welche den gegebenen Zustand in den Zielzustand überführen.

Symbolbasiertes versus modellbasiertes Denken

Die Bedeutung von Strukturen und Prozessen für erfolgreiches Problemlösen lässt die Frage offen, wie diese Strukturen beschaffen sind und welche Art von Prozessen auf diesen Strukturen beim Problemlösen und allgemein bei Denkprozessen stattfinden. Eine mögliche Antwort ist, dass Denkprozesse auf interner Symbolverarbeitung beruhen, was insbesondere naheliegt, wenn man logische Denkprozesse betrachtet, da sich hier klare Symbolverarbeitungsregeln identifizieren lassen. Allerdings zeigen sich hier auch manche Merkwürdigkeiten. Beispielsweise findet man beim konditionalen logischen Schließen, dass der sog. Modus Ponens (Prämisse 1: *Wenn a, dann b*; Prämisse 2: *Es gilt a*; Conclusio: *Es gilt b*) von nahezu allen Menschen beherrscht wird. Ebenso wie der Modus Ponens ist aber auch der Modus Tollens (Prämisse 1: *Wenn a, dann b*; Prämisse 2: *Es gilt Nicht b*; Conclusio: *Es gilt Nicht a*) ein wahrheitserhaltender Schluss. Der Modus Tollens wird jedoch von weit weniger Personen korrekt vollzogen als der Modus Ponens. Während viele den Modus Tollens, obwohl korrekt, als einen nicht zulässigen Schluss ansehen, betrachten sie den folgenden Schluss fälschlich als folgerichtig: Prämisse 1: *Wenn a, dann b*; Prämisse 2: *Es gilt b*; Conclusio: *Es gilt a*. Gleiches gilt für den folgenden Schluss: Prämisse 1: *Wenn a, dann b*; Prämisse 2: *Es gilt Nicht a*; Conclusio: *Es gilt Nicht b.*

Es stellt sich die Frage, weshalb korrekte Schlüsse als nicht richtig, während inkorrekte Schlüsse als richtig angesehen werden. Wenn Denken auf interner Symbolverarbeitung bzw. auf Anwendung einer im kognitiven System implementierten Logik besteht, so stellt sich die Frage, weshalb diese teilweise funktioniert und teilweise versagt. Eine mögliche Antwort ist, dass logisches Denken einen Verstehensmechanismus beinhaltet, der zu einer symbolischen Repräsentation führt, auf die dann abstrakte Symbolverarbeitungsregeln angewandt werden. Es wird angenommen, dass die „eingebauten" Regeln unvollständig sind (dass man also z.B. eine Modus-Ponens-Regel, jedoch keine Modus-Tollens-Regel besitzt, was die unterschiedliche Schwierigkeit der beiden Schlüsse erklären würde) und dass der Verstehensmechanismus nicht immer zuverlässig funktioniert, sondern manchmal zu Fehlinterpretationen führt (indem z.B. „wenn a, dann b“ missinterpretiert wird als „b genau dann, wenn a“, was erklären würde, dass die beiden oben genannten inkorrekten Schlüsse als korrekt angesehen werden).

Eine gänzlich andere Sichtweise besteht darin, dass Denkprozessen ein Operieren mit inneren Analogmodellen zugrunde liegt (Johnson-Laird, 1983). Denken besteht demnach in der Konstruktion von mentalen Modellen, der Evaluation dieser Modelle (dem Heraussuchen richtiger Modelle) und dem Ablesen von Merkmalen an diesen Modellen. Beim konditionalen Schließen lassen sich z.B. drei Modelle (Fälle) konstruieren, die mit der Wahrheit der Prämisse „Wenn a, dann b“ kompatibel sind: Modell 1 (a und b), Modell 2 (nicht a, jedoch b), Modell 3 (weder a noch b), von denen man annimmt, dass sie in dieser Reihenfolge konstruiert werden. Beim Modus Ponens genügt Modell 1, um daran die Conclusion („b“) abzulesen, während beim Modus Tollens drei Modelle konstruiert werden müssen, um am dritten abzulesen, dass die Conclusio „Nicht a“ zutreffend ist. Dies würde erklären, weshalb der Modus Ponens leichter ist als der Modus Tollens. Das Zustandekommen der beiden obigen falschen Schlüsse wird hier damit erklärt, dass Modell 2 unberücksichtigt blieb, wodurch der Ableseprozess zu falschen Ergebnissen kommt.

Deskriptionale und depiktionale Repräsentationen

Die beiden skizzierten Sichtweisen von Denkprozessen als symbolbasiert oder modellbasiert verweisen auf entsprechend unterschiedliche Formen der mentalen Repräsentation. Allgemein gesprochen lassen sich Repräsentationen in deskriptionale und depiktionale Repräsentationen untergliedern. Zu den deskriptionalen Repräsentationen gehören z.B. Sätze natürlicher Sprachen, Terme und Gleichungen/Ungleichungen in der Mathematik und physikalische Formeln. Zu den depiktionalen Repräsentationen zählen nicht nur realistische Bilder und Karten, sondern auch Reliefs, Skulpturen, zwei- und dreidimensionale Diagramme sowie Analogmodelle, v.a. in Form von Visualisierungen, inklusive die sog. Analogcomputer. Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Repräsentationsformen ist, dass Deskriptionen Relationssymbole beinhalten, Depiktionen hingegen nicht. Bei der Beschreibung eines Objekts in einer natürlichen Sprache bezieht man sich anhand von Nomen auf die Komponenten und setzt sie mit Hilfe von Verben und Präpositionen zueinander in Beziehung. Verben und Präpositionen sind Relationssymbole. In arithmetischen Ausdrücken sind Zeichen wie „=“, „>“, „<“ Relationssymbole. Depiktionen hingegen sind räumliche Konfigurationen, die aufgrund struktureller Gemeinsamkeiten für den repräsentierten Sachverhalt stehen. Sie beschreiben nicht, sondern zeigen die Beschaffenheit des Sachverhalts. Deskriptionale Repräsentationen sind mit konzeptuellen Strukturen, depiktionale Repräsentationen hingegen mit Objektstrukturen assoziiert.

Deskriptionen und Depiktionen sind für unterschiedliche Zwecke unterschiedlich gut geeignet. Deskriptionen sind darstellungsmächtiger, da sie einen höhere Abstraktionsgrad, einen höheren Allgemeinheitsgrad sowie Negationen und Disjunktionen ermöglichen. Deskriptionen wie *„Haustiere nicht gestattet“* oder *„Sitzplatz für Gebrechliche oder Personen mit Kleinkindern“* lassen sich nicht direkt bildhaft darstellen. Der Term „$y = a*x^2$“ beschreibt eine allgemeine Klasse von Parabeln, während eine geometrische Figur jeweils nur eine bestimmte Parabel repräsentiert. Während Deskriptionen ihren Gegenstand meist nur unvollständig beschreiben bzw. vieles implizit lassen (Kosslyn 1994), sind Depiktionen grundsätzlich informational vollständig: Ein bestimmtes Dreieck beispielsweise enthält notwendig sämtliche Dreieckseigenschaften und ermöglicht somit, diese durch Ablesen zu bestimmen. Depiktionen sind dementsprechend im Sinne des oben genannten modellbasierten Denkens besonders für Inferenzen geeignet, da die neue Information direkt entnommen werden kann (Johnson-Laird 1983). Darüber hinaus bieten Depiktionen den Vorteil, in sich widerspruchsfrei zu sein.

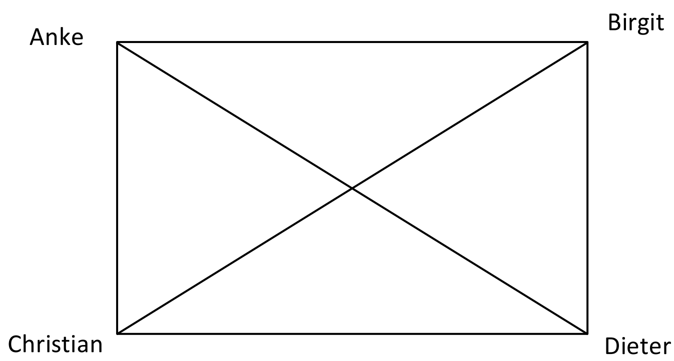
Die Unterscheidung zwischen Deskriptionen und Depiktionen lässt sich nicht nur auf externe Repräsentationen (Texte, Formeln, Bilder, Diagramme usw.), sondern auch auf interne mentale Repräsentationen anwenden. So handelt es sich bei den sog. propositionalen Repräsentationen, von denen auch das oben beschriebene symbolbasierte Denken ausgeht, um Beschreibungen in einer hypothetischen „mentalen Sprache“. Demgegenüber handelt es sich bei den sog. mentalen Modellen, die vom modellbasierten Denken angenommen werden, um depiktionale Repräsentationen des jeweiligen Sachverhalts. Neuere Ansätze zum Verstehen von Texten und Bildern oder Diagrammen sowie zum kreativen Denken und Problemlösen gehen – positiv formuliert – davon aus, dass erfolgreiches Denken und Problemlösen grundsätzlich in einer engen Wechselbeziehung von deskriptionalen und depiktionalen (externen und internen) Repräsentationen besteht (Schnotz, 2005). Negativ formuliert bedeutet dies, dass Defizite beim Denken und Problemlösen häufig auf eine ungenügende Interaktion zwischen deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationen zurückzuführen sind. Dies soll im Folgenden anhand von Beispielen aus dem Bereich des Mathematikverstehens verdeutlicht werden.

Frühes mathematisches Denken

Rasch (2003) hat Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Primarstufe entwickelt, die die verstehende Durchdringung mathematischer Strukturen fördern sollen. Ein Beispiel für eine solche Aufgabe ist:

(1) Wenn Anke, Birgit, Christian und Dieter sich morgens auf ihrem Schulweg treffen, schütteln sie sich die Hände. Wie viele Handschläge finden unter ihnen statt?

Eine depiktionale Repräsentation dieser Situation in Form eines äußeren Bildes oder einer inneren Vorstellung könnte die vier Kinder mit phantasierten äußeren Merkmalen (z.B. Haarfarbe, Frisur, Größe) darstellen. Daran könnte ein Schüler erkennen, dass das erstgenannte Kind, Anke, allen drei anderen Kindern die Hand gibt. Daraus könnte dann der Schluss folgen, dass insgesamt 4*3 = 12 Handschläge ausgetauscht werden. Eine solche depiktionale Repräsentation würde also nur die äußerlich sichtbare Situation und nicht die zugrundeliegende mathematische Struktur hervorheben, was dann zu einer inadäquaten mathematischen Deskription (4*3) und so zu einem falschen Ergebnis führt. Für das vorliegende Problem sehr viel geeigneter wäre die in der nebenstehenden Abbildung gezeigte depiktionale Repräsentation. Hier stehen vier Ecken für vier Kinder, und jede Verbindungslinie zwischen den Ecken repräsentiert einen Handschlag zwischen zwei Kindern. Es gibt insgesamt 6 solcher Verbindungslinien – die Vierecksseiten und die beiden Diagonalen – und deren Zahl kann an der Abbildung leicht modellbasiert abgelesen werden. Das Beispiel verdeutlicht, dass eine Depiktion nicht per se, sondern nur dann zur Lösung beiträgt, wenn sie die in der Problemsituation enthaltene mathematische Struktur hervorhebt. Außerdem zeigt das Beispiel, dass das Nichterkennen der zugrundeliegenden mathematischen Struktur anhand einer entsprechenden depiktionalen Repräsentation Anlass zu fehlerhaften Deskriptionen sein kann, die dann zu falschen Ergebnissen führen.



Bruchrechnen

Die Bedeutung von Bruchzahlen wird üblicherweise durch Visualisierungen unterstützt, indem z.B. „1/4“ durch einen Viertelkreis, „1/3“ durch einen entsprechenden Kreissektor, „1/2“ durch einen Halbkreis usw. repräsentiert wird. Mit dieser anfänglichen depiktionalen Unterstützung verstehen Lernende dann meist relativ problemlos, dass gleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert werden können, indem man den Nenner beibehält und die Zähler addiert oder subtrahiert. Bei der Multiplikation und Division von Brüchen wird jedoch häufig auf den depiktionalen Bezug verzichtet, da man sehr schnell zu einer nur noch syntaktisch orientierten Symbolverarbeitung übergeht. Damit bleibt jedoch die Semantik des Multiplizierens unbeachtet. Stattdessen werden rein syntaktische Algorithmen ohne semantischen Bezug angewandt, womit das Verständnis mathematischer Strukturen in den Hintergrund tritt zugunsten des routinierten algorithmischen Operierens.

Auf die defizitäre Verknüpfung von deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationen haben Orrill, Sexton, Lee und Gerde (2008) bei der Division von Bruchzahlen hingewiesen. Sie fanden, dass viele Mathematiklehrer amerikanischer High Schools nicht in der Lage waren, die depiktionale Repräsentation einer Aufgabe wie z.B. „3/4 : 1/8“ an einem Flächenmodell zu lösen, da ihnen offensichtlich nicht klar war, dass das Wesen der Division von Brüchen darin besteht, zu bestimmen, wie oft ein bestimmter Teil eines Ganzen in einem bestimmten anderen Teil dieses Ganzen enthalten ist (hier: 6). Sie zeigten anhand von Abbildungen auf irgendwelche visuelle 6er-Gruppen, verwendeten also Visualisierungen ohne konzeptuelles Verständnis für den zugrundeliegenden mathematischen Sachverhalt. Dementsprechend waren sie auch nicht in der Lage, Flächenmodelle als kognitive Werkzeuge zum Finden der Lösung zu verwenden, also deskriptionale und depiktionale Repräsentationsformen aufeinander zu beziehen und damit ein kohärenteres mathematisches Verständnis herzustellen.

Beweisführung

Das bereits von Plutarch erwähnte Osiris-Problem lautet: *„Bei welchen Rechtecken mit ganzzahligen Seiten (irgendeiner Einheit) sind Fläche und Umfang numerisch gleich?“* Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe gelingt es relativ leicht, durch Versuch und Irrtum zwei Lösungen zu finden: „4*4“ und „3*6“. Schwieriger ist es zu beweisen, dass es nur diese beiden Lösungen gibt. Aus der Vielfalt von möglichen Beweisen sollen hier nur der Faktorisierungs- und der Fliesen-Beweis aufgegriffen werden (Greer, De Bock & Van Dooren, 2009).

Beim Beweis über Faktorisierung geht man von der Osiris-Gleichung „xy = 2x + 2y“ aus. Diese Gleichheitsaussage lässt sich innerhalb des deskriptionalen Problemraums in andere Gleichheitsaussagen überführen, nämlich in

„xy - 2y = 2x“, „y (x – 2) = 2x“, „y = 2x/(x – 2)“ und „y = 2 + 4/(x – 2)“. Da x und y ganzzahlig sind, muss auch der Term „4/(x-2)“ ganzzahlig sein, was wiederum erfordert, dass (x-2) ein Faktor von 4 bzw. 4 ein Vielfaches von (x-2) ist. Da (x-2) ganzzahlig sein muss, gilt entweder „x=3“, „x=4“ oder „x=6“, und (wegen “y = 2 + 4/(x – 2)“) „y=6“, „y=4“ oder „y=3“. Diese Beweisführung ist rein deskriptional: Ausgehend von einer Beschreibung des Sachverhalts werden durch Symbolmanipulation neue Beschreibungen generiert, die dann den möglichen Wertebereich auf „3*6“ und „4*4“ eingrenzen. Beim Fliesen-Beweis geht man davon aus, dass ein Rechteck mit ganzzahligen Abmessungen mithilfe von 1*1 großen Fliesen gebildet werden kann. Verlegt man zunächst nur an den Außenkanten solche Fliesen, so ist deren Anzahl gleich dem Umfang U minus 4 (weil die 4 Rechteck-Ecken nicht doppelt gefliest werden). Nach Befliesung dieser Randfläche verbleibt dann eine unbeflieste Innenfläche. Randfläche und Innenfläche ergeben zusammen die Gesamtfläche F. Diese kann nur dann (entsprechend dem Osiris-Kriterium) gleich U sein, wenn die Innenfläche 4 beträgt, weil [wegen F = (U – 4) + Innenfläche] nur dann die Fläche F gleich U ist. Diese Beweisführung operiert primär mit (aus Platzgründen hier nicht visualisierten) depiktionalen Repräsentationen, deren Merkmale deskriptional mittels Gleichungen festgehalten werden.

Greer, De Bock und Van Dooren (2009) fanden bei angehenden Mathematiklehrern eine deutliche Präferenz für die Faktorisierungslösung, während die Fliesenlösung als vergleichsweise „unmathematisch“ eingestuft wurde. Man kann hier die Frage stellen, ob es in der Kultur des Mathematikunterrichts eine Präferenz für deskriptionale (algebraische) Repräsentationen ohne Referenz zu depiktionalen Repräsentationen gibt, dass visuelle Modelle nur der anfänglichen „Veranschaulichung“ dienen, die in der eigentlichen Mathematik nur noch eine geringe Rolle spielen. Der Hauptakzent des Unterrichts liegt dann auf der effizienten (weil mechanischen) Manipulation von Symbolen entsprechend den Routinen der symbolischen Algebra ohne semantischen Bezug zu depiktionalen Repräsentationen. Damit wird allerdings im Sinne von Hatano der Akzent vor allem auf den Erwerb von Routinenexpertise“ (d.h. schnelles und genaues Lösen von mathematischen Aufgaben ohne wirkliches Verstehen) gelegt und weniger auf adaptive Expertise (d.h. die Fähigkeit, mit Verständnis gelernte Prozeduren flexibel und kreativ anzuwenden).

Instruktionale Konsequenzen

Die für adaptive Expertise erforderliche kognitive Flexibilität erfordert jedoch nicht nur schnelles und effizientes Manipulieren von algebraischen Ausdrücken, sondern auch die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Formen der Repräsentation flexibel wechseln zu können, Problemräume adäquat zu strukturieren, und die Fähigkeit, Beziehungen zwischen verschiedenen Repräsentationen erkennen und nutzen zu können.

Bei der Visualisierung im Mathematikunterricht geht es nicht primär am Rande um die visuelle Anreicherung von mathematischen Inhalten mit Alltagskontexten oder die Veranschaulichung von Ausgangsbedingungen oder Ergebnissen mathematischen Denkens. Es geht vielmehr um die flexible Verwendung multipler (deskriptionaler und depiktionaler) Repräsentationen, also um repräsentationale Flexibilität als einer Kernkompetenz mathematischer Kreativität. Es ist davon auszugehen, dass diese Kompetenz durch Anleitung zum systematischen Mapping zwischen verschiedenen Repräsentationsformen und durch systematische Anleitung zum entsprechenden Perspektivenwechsel gefördert werden könnte und sollte. Hierzu reicht das Herstellen von Zeichnungen der gegebenen Situation nicht aus, da dies nicht der Gefahr vorbeugt, dass diese nur zur Illustration und nicht als kognitive Werkzeuge verwendet werden. Vielmehr gilt es, durch systematische Interaktion von deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationen das Spektrum der kognitiven Möglichkeiten zu erweitern und somit zu einer höheren Flexibilität mathematischen Verstehens und Denkens beizutragen.

Literatur

Greer, B., De Bock, D., & Van Dooren, W. (2009). The Isis problem as an expereimental probe and teaching resource. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(4), 237-246.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Kosslyn, S. M. (1994). *Image and brain.* Cambridge, MA: MIT Press.

Ohlsson, S. (1992). Information processing explanations of insight and related phenomena. In M. Keane & K. Gilhooly (Eds.), *Advances in the psychology of thinking* (pp. 1-44). London: Harvester-Wheatsheaf.

Orrill, C. H., Sexton, S., Lee, S.-O., & Gerde, C. (2008). Mathematics teachers' abilities to use and make sense of drawn representations. *Paper presented at the Eighth ICLS Conference 2008 in Utrecht*.

Rasch, R. (2003). *42 Denk- und Textaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren.* Seelze, Germany: Kallmeyer.

Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 49-69). Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

3 Sektionsbeschreibungen

Liste der moderierten Sektionen

Martin BRACKE, Thomas GÖTZ, Hans-Stefan SILLER
Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht

Astrid BRINKMANN, Thomas BORYS
Vernetzungen im Mathematikunterricht

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE
Vielfältige Repräsentationen im Mathematikunterricht – Kompetenzen von Lernenden und Lehrenden

Thomas GAWLICK
Hannoveraner Studien zum Problemlösen

Gert KADUNZ
Semiotik

Michael KALLWEIT, Birgit GRIESE
Mathematikausbildung in den Ingenieurwissenschaften

Silke LADEL, Christof SCHREIBER
PriMaMedien

Juliane LEUDERS, Timo LEUDERS, Kathleen PHILIPP
Fachbezogene diagnostische Kompetenzen von Mathematiklehrerinnen und -lehrern verstehen und erfassen

Anke LINDMEIER
Validität von Maßen zur Erhebung von fachspezifischen Lehrerkognitionen

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Marc SCHÄFER
Mathematik und Sprachkompetenz

Matthias LUDWIG, Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Jürgen ROTH
Forschendes Lernen im Mathematikunterricht

Günter MARESCH, Thomas MÜLLER
Raumgeometrie-Unterricht

Jörg RAPP, Matthias GRÖSSLER, Melanie PLATZ, Stefanie BUCHHEIT, Engelbert NIEHAUS
GDM-Pilot – Videovortrag & Videokonferenz

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER
Flexibles Rechnen konzeptualisieren, erfassen und fördern

Bettina RÖSKEN-WINTER, Bärbel BARZEL
DZLM: Modelle, Konzepte und Fortbildungsforschung zu effektiver Lehrerfortbildung

Jürgen ROTH, Evelyn SÜSS-STEPANCIK, Heike WIESNER
Lernpfade

Hans-Stefan SILLER, Regina BRUDER, Torsten LINNEMANN
Kompetenzstufen- und Kompetenzentwicklungsmodelle

Bärbel BARZEL, Essen, Bettina RÖSKEN-WINTER, Berlin

DZLM: Modelle, Konzepte und Fortbildungsforschung zu effektiver Lehrerfortbildung

Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) hält umfassende Angebote für *Continuous Professional Development* (CPD) von Mathematiklehrkräften bereit. Insbesondere unterstützt das DZLM Multiplikatoren darin, selbst effektive Angebote für die Fort- und Weiterbildung von Lehrkräften zu gestalten. Darüber hinaus bietet das DZLM auch CPD-Kurse für fachfremd Unterrichtende an, um Lehrkräften ohne fachliche Fakultas eine fachliche und fachdidaktische Ausbildung zu ermöglichen. In den beiden DZLM Sektionen werden zum einen Modelle und Konzepte und zum anderen Ansätze der Fortbildungsforschung zu effektiver Lehrerfortbildung vorgestellt.

Theoretische und evidenzbasierte Fundierung

Alle DZLM-Fortbildungsangebote orientieren sich inhaltlich, methodisch und strukturell an Ergebnissen der fachdidaktischen Forschung, der Lehr-Lernforschung, der Bildungsforschung und der Professionalisierungsforschung. Inhaltlich sind die Angebote ausgerichtet, die nachstehend beschriebenen Facetten des Kompetenzrahmens aufzugreifen und für die jeweilige Gruppe von Lehrkräften zu präzisieren. Unterschieden werden zunächst kognitive Facetten professioneller Kompetenz hinsichtlich des mathematischen, mathematikdidaktischen und pädagogischen Professionswissens (vgl. Baumert & Kunter, 2006). Weitere wichtige Parameter sind epistemologische Überzeugungen zur Natur der Mathematik (Goldin, Rösken & Törner, 2009) und selbstbezogene *Beliefs*. Darüber hinaus berücksichtigt der Kompetenzrahmen, dass die Angebote des DZLM computer- und internetbasierte Komponenten einbeziehen (Wassong & Biehler, 2010) und dass das CPD-Management für Multiplikatoren die Gestaltung von Fortbildungen und die schulische Begleitung umfasst.

Alle DZLM-Fortbildungsangebote orientieren sich methodisch an nachfolgenden Gestaltungsprinzipien (vgl. Lipowsky & Rzejak, 2012): kompetenzorientiert (ergebnisorientiert, zieltransparent), teilnehmerorientiert (aktive Teilhabe), kooperationsanregend (gemeinsame Arbeit an Problemstellungen und Umsetzungen, Anregung langfristiger Zusammenarbeit), fallbezogen (Praxisbezug, Orientierung an den Praxiserfahrungen), vielfältig (verschiedene Vermittlungsformate, Verschränkung von Input-, Erprobungs- und Reflexionsphasen) und selbstreflexionsanregend (Vertiefung des Verständnisses der Lehr- und Lernprozesse).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 57–58). Münster: WTM-Verlag

Die Fortbildungsangebote werden wissenschaftlich begleitet und hinsichtlich ihrer Wirksamkeit beforscht. Die DZLM Forschungsagenda umfasst entsprechend Bedingungs-, Entwicklungs- und Wirkungsforschung. Dabei reichen die Forschungsarbeiten von längsschnittlichen Untersuchungen über (quasi)experimentelle Designs zu qualitativer Theoriegenerierung.

Sektionsvorträge

Biehler, R., Kuzle, A., Dutkowski, W., Elschenbroich, H., Heintz, G.: Geometrie kompakt: Eine Fortbildungsreihe zur dynamischen und kompetenzorientierten Sicht auf die euklidische Geometrie

Bosse, M.: Wie können fachfremd unterrichtende Mathematiklehrkräfte durch Lehrerfortbildungen effektiv unterstützt werden?

Bruder, R., Böhnke, A.: Online-Fortbildungskurse: Gestaltungsmodelle, Adressaten, Effekte und offene Fragen

Fellmann, A.: Umsetzung kooperativer Lehr- Lernformen im Mathematikunterricht der Klassen 1-6 in einer integrativen Lehrerbildung

Kuzle, A., Biehler, R.: Wie „multiplizieren" Mathematikmultiplikatoren in ihren selbst gestalteten Lehrerfortbildungsmaßnahmen?

Oesterhaus, J., Biehler, R.: Innovationsbereitschaft und Kompetenzeinschätzungen von Lehrkräften nach mehrtägigen Lehrerfortbildungen

Rögler, P.: Überzeugungen von Mathematiklehrkräften als Basis zur Entwicklung von Lehrerfortbildung zu Technologien im Unterricht

Schüler, S., Weißenrieder, J., Rösken-Winter, B., Blömeke, S.: Wirkungsanalyse zu den Gestaltungsprinzipien von MultiplikatorInnen-Fortbildungen des DZLM

Schultis, T., Holzäpfel, L., Leuders, T.: Wirksamkeit einer Fortbildung zum produktiven Üben im Mathematikunterricht

Törner, G.: Verborgene Bedingungs- und Gelingensfaktoren bei Fortbildungsmaßnahmen der Lehrerbildung Mathematik

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9,* 469–520.

Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2012). Lehrerinnen und Lehrer als Lerner – Wann gelingt der Rollentausch? Merkmale und Wirkungen effektiver Lehrerfortbildungen. *Schulpädagogik heute, 5*(3), 1–17.

Goldin, G., Roesken, B., & Toerner, G. (2009). Beliefs – no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maaß & W. Schloeglmann (Eds.), Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results (pp. 9–28). Rotterdam: Sense Publishers.

Wassong, T. & Biehler, R. (2010). A model for teacher knowledge as a basis for online courses for professional development of statistics education. In C. Reading (Ed), Proceedings of ICoTS 8, Ljubljana, July 2010. Voorburg: IASE.

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Vielfältige Repräsentationen im Mathematikunterricht – Kompetenzen von Lernenden und Lehrenden

Mit Repräsentationen mathematischer Objekte umgehen zu können gehört zum „täglichen Brot“ des Wissensaufbaus in Mathematik und damit auch des Mathematikunterrichts. Dies betonen nicht zuletzt die KMK-Standards (z.B. KMK, 2003), in denen der Umgang mit Repräsentationen als einer von sechs inhaltsübergreifenden Kompetenzaspekten mathematikbezogenes Handeln und Denken charakterisiert. Betrachtet man dies vor dem Hintergrund der Ansätze von Duval (2006) und Ainsworth (2006), so wird die zentrale Bedeutung des Nutzens vielfältiger Repräsentationen für den Aufbau eines flexibel einsetzbaren mathematischen Begriffswissens und damit auch für verständnisvolles Lernen (z.B. Baumert & Köller, 2000) deutlich. So ist es wesentlich, dass Lernende zwischen unterschiedlichen Repräsentationen wechseln können – hierzu muss also vor allem auch der Unterricht Anregungen und Hilfen bereitstellen, damit die vergleichsweise große Komplexität solcher Repräsentationswechsel von den Lernenden gemeistert werden kann (Ainsworth, 2006; Lesh, Post & Behr, 1987). Die Evaluation hierauf fokussierter Lernumgebungen kann dafür eine wichtige Erkenntnisbasis bereitstellen. Der Beitrag von A. Bauer (in diesem Band) ermöglicht hier ebenso Einblicke wie die bevorstehenden Schritte im Projekt La viDa–M (Förderung durch Forschungsmittel der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg, vgl. Dreher, Winkel & Kuntze, 2013).

Darüber hinaus ist es unerlässlich, dass Lehrkräfte über fachdidaktische Kompetenzen zum Umgang mit Repräsentationen in Lern- und Unterrichtssituationen verfügen. Dies betrifft nicht nur fachdidaktisches Wissen zu Vor- und Nachteilen einzelner Repräsentationen, sondern umfasst auch Kompetenzaspekte im Sinne eines fachdidaktischen Noticing oder des wissensbasierten Analysierens, wie sie von Dreher & Kuntze (in diesem Band) sowie von Friesen, Dreher & Kuntze (in diesem Band) beschrieben werden. Im Vergleich zu früheren Ansätzen, bei denen professionelles Wissen zu Repräsentationen gleichsam als Teilbaustein allgemeinen fachdidaktischen oder fachlichen Wissens konzeptualisiert wurde (z.B. Ball, 1993; Baumert & Kunter, 2006), konzentrieren sich diese Projekte speziell und in einer inhaltsbereichsspezifischen Fokussierung auf den Umgang mit Repräsentationen. Auf diese Weise können mehrere Facetten professionellen Wissens in diesem Bereich differenziert und in ihren Zusammenhängen untersucht werden.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 59–60). Münster: WTM-Verlag

Die moderierte Sektion nimmt vor diesem Hintergrund Kompetenzen von Lernenden und Lehrenden mit Relevanz für den Umgang mit Repräsentationen in den Blick. Vorgestellt werden Ergebnisse der laufenden Forschungsarbeit im Rahmen dreier Dissertationsprojekte, in deren Umfeld auch für die Zukunft mit weiteren Ergebnissen zu rechnen ist.

Sektionsvorträge

Bauer, A.: Einfluss externer multipler und dynamischer Repräsentationen auf Schülerargumentationen

Dreher, A. & Kuntze, S.: Der Umgang mit Repräsentationen um Mathematikunterricht – kriterienbasiertes Noticing und Sichtweisen von Lehrkräften

Friesen, M., Dreher, A. & Kuntze, S.: Aspekte fachdidaktischer Analysekompetenz bezogen auf den Umgang mit Repräsentationen im Mathematikunterricht

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16,* 183–198.

Ball, D. (1993). Halves, pieces, and twoths: constructing representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research (pp. 157–196). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Baumert, J. & Köller, O. (2000). Unterrichtsgestaltung, verständnisvolles Lernen und multiple Zielerreichung im Mathematik- und Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS/III, Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn*, Bd. 2. Opladen: Leske+Budrich.

Baumert, J., & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9(4),* 469–520.

Dreher, A., Winkel, K. & Kuntze, S. (2013). Lernen anregen mit vielfältigen Darstellungen im Mathematikunterricht – Das Projekt La viDa–M. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 1134-1135). Münster: WTM. [auch online verfügbar unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Posterbeitraege/BzMU13-Dreher-Poster.pdf]

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61,* 103-131.

Kultusministerkonferenz (KMK). (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf [Zugriff am 22.2.2013].

Kuntze, S. (2013). Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In Wagner, A. et al. (Hrsg.). In J. Sprenger, A. Wagner, M. Zimmermann (Hrsg.). *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen* (S. 17-34). Wiesbaden: Springer.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Thomas GAWLICK, Hannover

Hannoveraner Studien zum Problemlösen

Probleme sind Aufgaben, bei deren Bearbeitung eine Barriere auftritt. In der Hannoveraner Arbeitsgruppe werden verfeinerte Analysemethoden für die Struktur von Problemlöseprozessen und die Arten des Umgangs mit Barrieren entwickelt und angewendet:

Im Rahmen des Projektes HeuRekAP (**Heu**ristische **Rek**onstruktion von **A**ufgaben zum **P**roblemlösen) wurde die Entwicklung der Problemlösekompetenz eines Hannoveraner Gymnasiumsjahrgangs untersucht. Vom Beginn des achten bis zum Halbjahr des neunten Schuljahrs erfolgten regelmäßig schriftliche Erhebungen ausgewählter Problemaufgaben. Zwei der vier untersuchten Klassen erhielten zudem über den gesamten Zeitraum ein Heurismen- und Argumentationstraining, das videographiert wurde. In einer Klasse fand dieses Training während *expliziter* Unterrichtsphasen statt, in der anderen war das Training *implizit* in den laufenden Unterricht eingewoben. Die anderen beiden Klassen dienten als Vergleichsgruppen.

Sowohl im Training als auch bei seiner Auswertung wurden Lösungswege durch Lösungsgraphen strukturiert zu repräsentiert. Insbesondere die bei der Problembearbeitung gemäß der Theorie repräsentationaler Veränderung (Ohlsson 1984) zur Erlangung von Einsicht oft nötige Veränderung unangemessener Repräsentation lässt sich auf diese Weise präzise beschreiben.

Im Oktober 2012 fand die Totalerhebung statt. Bei dieser haben alle 119 Schüler die K10-Aufgabe der TIMS-Studie schriftlich bearbeitet. Im Januar 2013 wurden 46 Schüler der vier Klassen beim erneuten Lösen der K10-Aufgabe gefilmt, um einen Einblick in den Verlauf der Problemlöseprozesse zu erhalten. In der Sektion geht es v.a. um die differentielle Analyse der Bearbeitungen und Prozesse mit verschiedenen Methoden:

Sektionsvorträge

Brockmann-Behnsen, D., Gawlick, Th. & Elschenbroich, H.-J.: Heurismen- und Argumentationstraining im Unterricht – explizit oder implizit?

Einleitend werden die Trainingsmethoden beider Varianten an Beispielen illustriert, insbesondere die Analogiebildung beim Satz des Pythagoras.

Gawlick, Th. & Begerow, S.: Analyse der Graphen von Lösungen der TIMSS-Aufgabe K10

Mittels Lösungsgraphen erfolgt eine normierte Darstellung der Argumentationsstruktur – sie zeigt differenzielle Effekte des Trainings auf die Problemlöse- und Verknüpfungskompetenz. Es wird nachgewiesen, dass K10 deshalb ein Problem ist, weil ein bestimmter Schritt zur Barriere wird.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 61–62). Münster: WTM-Verlag

Rott, B., Korte, L. & Wessendorf, S.: Analyse von Problembearbeitungsprozessen am Beispiel der TIMSS-Aufgabe K10

Die Prozessanalyse nach Rott (2013) bestätigt u.a. Zusammenhänge zwischen Erfolg, Prozessregulation und äußerer Struktur der Prozesse, sowohl bei den Neuntklässlern der HeuRekAP-Studie als auch bei Studierenden des gymnasialen Lehramts.

Gawlick, Th.: Über Aufgaben-, Prozess- und Problemlösetypen bei K10

Eine Aufgabe, die nicht assimiliert oder routinemäßig akkommodiert werden kann, ist für den Löser ein Problem (Gawlick 2013). Sein Ausmaß wird mit Merkmalen der Aufgabe und der heuristischen Struktur des Lösers vorhersagbar und mittels eines Phasenmodells empirisch beschreibbar:

Pilous, R.: Strukturell verfeinerte Prozesskodierungen nach Pólya-Gawlick

Zur vergleichenden Prozesstypisierung wurde ein Kodiersystem entwickelt, das die Unterscheidung von Assimilations- und Akkommodationsphasen auf der Grundlage von Polyaphasen ermöglicht. An einem Beispielprozess werden das Kodierverfahren und die Phase SZA (Situations- und Zielanalyse nach Duncker) vorgestellt sowie mögliche Konsequenzen besprochen.

Lucyga, E.: Gegenüberstellung von Bearbeitungsergebnissen und –prozessen von K10 im HeuRekAP-Projekt

Besteht ein Zusammenhang zwischen der schriftlichen Erstbearbeitung und dem später videographierten Lösungsprozess? Um zu prüfen, ob die gleichen Barrieren auftreten und auch auf gleiche Weise überwunden werden, werden die Lösungsgraphen beider Erhebungen vergleichend analysiert.

Brockmann-Behnsen, D.: Wie steigert man die Problemlöse- und Argumentationskompetenz? Ergebnisse der HeuRekAP-Studie

In regelmäßigen Abständen wurden in HeuRekAP Problemaufgaben gestellt. Bei den Lösungsgraphen parallelisierter Substichproben wurde kategorisiert, in welchem Maße Argumente mathematisch korrekt verknüpft wurden. Wir diskutieren die Zusammenhänge und die zeitliche Entwicklung dieses Maßes im Hinblick auf die Wirksamkeit des Trainings.

Literatur

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin: Springer.

Gawlick, Th. (2013). Problem - das Gegenteil von Routineaufgabe? Zur Konzeption von Problemlösen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*.

Ohlsson, S. (1984). Restructuring revisited: II. An information processing theory of restructuring and insight. *Scandinavian Journal of Psychology*, 25, 117-129

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.

Rott, B. (2013): *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM.

Michael KALLWEIT, Birgit GRIESE, Bochum

Mathematikausbildung in den Ingenieurwissenschaften

Die Mathematikausbildung angehender Ingenieure fordert die Servicelehre der Hochschulen in vielfältiger didaktischer Hinsicht: Der eigene fachliche Anspruch muss mit dem erwünschten Praxisbezug sowie den späteren beruflichen Herausforderungen und der Erwartungshaltung der Industrie in Einklang gebracht werden; außerdem stellen die hohen Studierendenzahlen und der heterogene schulische Hintergrund der Studierenden Problemfelder dar. Die Sektion ermöglicht den Austausch der Erfahrungen und Erkenntnisse aus verschiedenen Forschungs- und Lehrprojekten.

Der Bedarf an gut ausgebildeten Ingenieuren ist unvermindert hoch; die Studierendenzahlen versprechen nur wenig Besserung des bestehenden und erkannten Problems (VDI & IW Köln, 2012). Viele Studierende, die sich anfänglich für ein Studium der Ingenieurwissenschaften entscheiden, beenden dies aufgrund vielschichtiger Ursachen nicht.

Seit einigen Jahren widmen sich die Hochschulen nun verstärkt der Herausforderung, dennoch mehr MINT-Absolventen mit gleichbleibender Qualifikation auszubilden. Dabei werden nicht nur die benötigten mathematischen Kompetenzen beschrieben, erfasst und untersucht, auch Einstellungen, Motivation und Beliefs werden beforscht. Weitere Informationen finden sich beispielsweise

- beim Kolleg 2013 des Netzwerks Lehre^n (http://www.lehrehochn.de/math ing/),
- bei KoM@ING (http://www.kom-at-ing.de/) oder
- bei der Arbeitsgemeinschaft *Mathematik in den Ingenieurwissenschaften* des Kompetenzzentrums für Hochschuldidaktik (http://www.khdm.de/ag-ing-math/).

In der Sektion *Mathematikausbildung in den Ingenieurwissenschaften* auf der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 2014 in Koblenz kommen ForscherInnen und PraktikerInnen aus unterschiedlichen Bereichen und von verschiedenen Hochschulen zu Wort. Sie haben jahrelange Erfahrung mit der Servicelehre und ihre eigenen Positionen und Perspektiven gefunden, die auf der Tagung und in den Beiträgen zum Tagungsband vorgestellt werden. Ihre Ansätze

- beziehen sich auf die theoretische Fundierung der Forschung (Sträßer; Lehmann & Rösken-Winter),

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 63–64). Münster: WTM-Verlag

- stellen innovative Lehrprojekte vor und reflektieren diese kritisch (Griese & Kallweit; Roegner & Heimann),
- präsentieren Ideen für neuartige Herangehensweisen (Kallweit & Griese),
- zeigen Problemfelder aus der hochschultäglichen Praxis auf (Embacher),
- empfehlen erprobte Methoden (Janetzko), oder
- stellen bestehende Kooperationen und Interaktionen sich im Aufbau befindlicher sowie bereits institutionalisierter Projekte vor (Glasmachers & Griese).

Obwohl sich die gewonnenen Erkenntnisse auf die spezielle Zielgruppe der Studierenden der Ingenieurwissenschaften beziehen, haben die einzelnen Projekte sowie die Annäherung an die eingangs geschilderte Problematik in Form von *Best Practice* Beispielen Modellcharakter für die Übertragung auch auf andere Bereiche der Hochschuldidaktik.

Sektionsvorträge

Embacher, F.: Kompetenzen hinsichtlich der Methode der Fallunterscheidungen

Glasmachers, E., Griese, B.: Transfer von Studienreformprojekten - Kolleg 2013 des Netzwerks Lehre^n

Griese, B., Kallweit, M.: Lerntagebücher in der Studieneingangsphase - eine Bilanz

Janetzko, H.-D.: CATO - beiläufiger, selbsterklärender Einsatz von Computeralgebra in Mathematikvorlesungen für Ingenieure

Kallweit, M., Griese, B.: Serious Gaming an der Hochschule - mit Avataren zum Studienerfolg?

Lehmann, M., Rösken-Winter, B.: Studie zur Untersuchung von Problemlösekompetenzen bei Ingenieurstudierenden im ersten Studienjahr

Roegner, K., Heimann, M.: Uni Plus: Studierende der Ingenieurwissenschaften in Erstsemester - Mathematikmodule aktivieren

Sträßer, R.: Educational Interfaces between Mathematics and Industry (EIMI) - Bericht über eine ICMI-Studie

Literatur

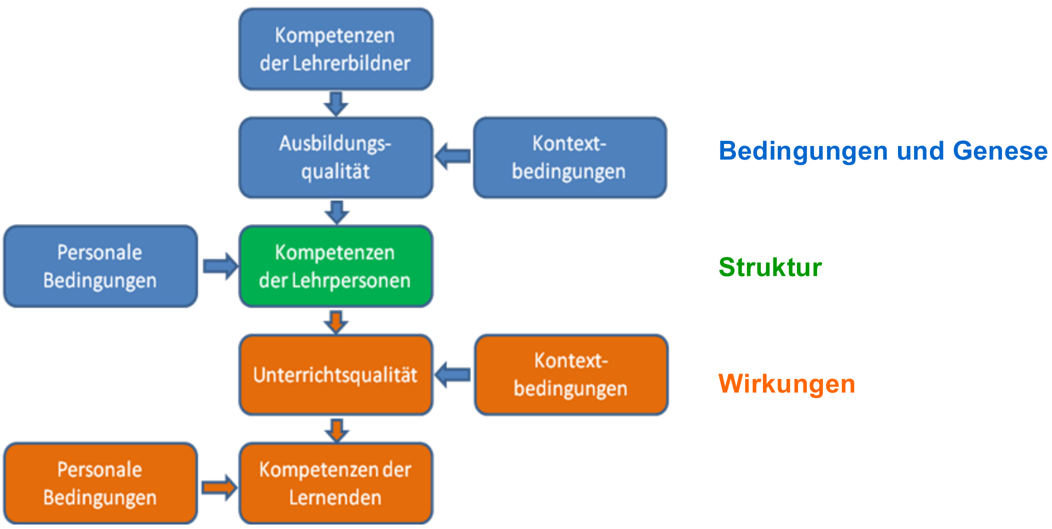
Verein Deutscher Ingenieure & Institut der deutschen Wirtschaft Köln. (2012). *Ingenieure auf einen Blick: Erwerbstätigkeit, Innovation, Wertschöpfung*. http://www.vdi.de/wirtschaft-politik/arbeitsmarkt/2013-ingenieure-auf-einen-blick [16.03.2014].

Timo LEUDERS, Juliane LEUDERS, Kathleen PHILIPP

Diagnostische Kompetenzen von Mathematiklehrerinnen und -lehrern verstehen und erfassen

Unter diagnostischer Kompetenz werden alle Fähigkeiten von Lehrpersonen verstanden, welche im Zusammenhang mit diagnostischen Situationen im Schulalltag bewältigt werden müssen. Lehrkräfte müssen Informationen über Lernvoraussetzungen, Lernprozesse und Lernergebnisse sammeln und pädagogische Entscheidungen vorbereiten. In einem engeren Sinne wird diagnostische Kompetenz als die Fähigkeit operationalisiert, korrekte Urteile über Lernvoraussetzungen, Lernprozesse und Lernergebnisse von Lernenden zu treffen (z.B. Schrader, 2011). In einer weitergehenden Definition werden unter „diagnostischer Expertise" auch alle Arten des Wissens über die zu diagnostizierenden Prozesse und über Methoden der Diagnose (z.B. diagnostische Gespräche) zusammengefasst.

Die Mathematikdidaktik schließt an die allgemeinen Befunde der Forschung zur Diagnosekompetenz an (z.B. Hoge & Colardaci, 1986, Südkamp, Kaiser & Möller, 2012), interessiert sich aber insbesondere für fachbezogene Aspekte diagnostischer Tätigkeiten von Lehrerinnen und Lehrern. Insofern ordnet sich mathematikdidaktische Forschung zu diagnostischen Kompetenzen in die allgemeine Forschung zu fachdidaktischen Kompetenzen von Lehrkräften ein (*pedagogical content knowledge*, vgl. Hill, Schilling & Ball, 2004; Depaepe, et al. 2013). Sie fragt nach der Struktur von diagnostischen Kompetenzen, nach Bedingungen ihrer Genese, nach Modellen der Förderung sowie nach den Wirkungen diagnostischer Kompetenzen im Unterricht.



In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 65–66). Münster: WTM-Verlag

Sektion „Diagnostische Kompetenzen von Mathematiklehrerinnen und -lehrern verstehen und erfassen“

Im Rahmen der Sektion wurden die folgenden Projekte vorgestellt, die sich mit verschiedenen Facetten fachbezogener diagnostischer Kompetenz befassen und die alle auch mit einem Bericht im vorliegenden Band vertreten sind:

1. Timo Leuders, Juliane Leuders & Kathleen Philipp: Fachbezogene diagnostische Kompetenzen - Forschungsstand und Forschungsdesiderata
2. Kathleen Philipp & Timo Leuders: Diagnostische Prozesse und Ressourcen von Lehrkräften
3. Julia Weinsheimer & Elisabeth Rathgeb-Schnierer: Diagnostische Fähigkeiten von Grundschullehrkräften im Bereich Arithmetik erfassen und analysieren
4. Christian Rüede, Christoph Weber & Christine Streit: Diagnose und Förderung: Wie nutzen Experten Schülerdokumente für die Weiterarbeit?
5. Andreas Ostermann & Timo Leuders: Die Rolle schwierigkeitsgenerierender Merkmale bei der Schwierigkeitseinschätzung von Aufgaben zum Funktionalen Denken
6. Heiko Fey & Regina Bruder: Messung diagnostischer Kompetenz in der Lehrerausbildung Mathematik
7. Simone Reinhold: Diagnosestrategien angehender Grundschullehrkräfte aus mathematikdidaktisch-prozessorientierter Perspektive
8. Juliane Leuders & Timo Leuders: Förderung von diagnostischen Kompetenzen von Lehramtsstudierenden bei der Aufgabenbewertung

Literatur

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. Teaching and Teacher Education 34, 12-25.

Hill, H. C., Schilling, S. G. & Ball, D. L. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hoge, R. D., & Coladarci, T. (1989). Teacher-based judgments of academic achievement: A review of literature. *Review of Educational Research, 59*, 297–313.

Schrader, F.-W. (2011). Lehrer als Diagnostiker. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 683–698). Münster: Waxmann.

Südkamp, A., Kaiser, J. & Möller, J. (2012). Accuracy of teachers’ judgments of students’ academic achievement: A Meta-Analysis. *Journal of Educational Psychology, 104*(3), 743–762.

Anke LINDMEIER, Kiel

Moderierte Sektion – Validität von Maßen zur Erhebung von fachspezifischer Lehrerkognition

In den letzten Jahren sind zahlreiche fachspezifische Maße für Lehrerwissen und –kompetenzen, viele davon im Fach Mathematik, entstanden. Nach fast 10 Jahren Entwicklung scheint es daher angebracht zu sein, den Blick von der Innovation auf die Qualität der entwickelten Instrumente zu richten. Als ein zentrales Gütekriterium der Instrumente wurde in dieser Sektion die Validität fokussiert. Validität wird als eine zu leistende argumentative Aufgabe verstanden, die den Schluss von den Ergebnissen auf die Aussagen legitimiert (Kane, 1992). Dabei muss auch der spezifische Anwendungsfall berücksichtigt werden. Entsprechend dieser komplexen Aufgabe wird eine ganze Reihe von Validitätsaspekten in der Literatur diskutiert. Als Standard gelten die Ausführungen von AERA, APA & NCME (1999).

Der in Publikationen zur Lehrerkognitionsforschung dominierende Validitätsaspekt ist die Konstruktvalidität. Unter dieser Sichtweise wird überprüft, ob theoretisch angenommene Bezüge zwischen Konstrukten sich auf der Messebene wiederfinden. Ein typisches Vorgehen ist die Untersuchung des konvergenten/diskriminierenden Potentials der Instrumente im Vergleich mit solchen, die ähnliche/abzugrenzende Konstrukte abbilden. In der Lehrerkognitionsforschung werden z. B. häufig Analysen zu Zusammenhängen zwischen Maßen zu unterschiedlichen fachspezifischen oder fachübergreifenden Konstrukten berichtet, wobei allerdings die Forschungslage es nicht immer zulässt, Hypothesen über die Zusammenhänge herzuleiten.

Untersuchungen zur prädiktiven (auch prognostischen) Validität von Maßen nehmen in den Blick, ob ein Maß für in der Zukunft liegende Außenkriterien prädiktiv ist. Solche Analysen verfolgen also eine spezielle Art der kriterienbezogenen Validierung. Beispielhaft im Bereich Lehrerkognitionsforschung sind Untersuchungen zur Prädiktionskraft von Lehrerwissensmaßen für Unterrichtsqualität oder Schülerlernzuwachs, wobei die Schwierigkeit hier oft in der Verfügbarkeit geeigneter Außenkriterien liegt.

Seltener werden Untersuchungen zur inhaltlichen Validität publiziert. Die leitende Fragestellung ist dabei, ob das theoretische Konstrukt und das Maß in adäquatem Verhältnis stehen, d. h. die Operationalisierung im eigentlichen Wortsinne valide ist. Dazu gehört, ob die verwendeten Aufgaben das Konstrukt repräsentativ abbilden, aber auch, ob die erforderlichen Bearbeitungsprozesse mit dem Konstrukt vereinbar sind. Bei Lehrerkognitionsma-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 67–68). Münster: WTM-Verlag

ßen wird zur inhaltlichen Validierung gerne auf Expertenratings vertraut, bei diesen Ratings bleiben die Kriterien aber oft intransparent.

Die Frage nach der Validität eines Maßes kann also nicht durch einzelne statistische Kennwerte beantwortet werden kann, sondern benötigt einen ganzheitlichen Zugang (Messick, 1989). Zudem kann nicht die Gültigkeit einer Testwertinterpretation, sondern nur die Reduktion von Unsicherheit bezüglich einer Testwertinterpretation erlangt werden.

In dieser moderierten Sektion wurden fünf Beiträge zur Validität von Maßen vorgestellt (vgl. Tabelle 1). Ziel der Sektion war es, unterschiedliche Validierungsmöglichkeiten aufzuzeigen und zur Diskussion zu stellen, wobei alle Beiträge Aspekte fachspezifischer Lehrerkognition betrachten.

Tabelle 1: Überblick über thematisierte Validitätsaspekte in den Beiträgen der Sektion

Validitätsaspekt		*Beitrag*
Inhaltsvalidität	bezüglich Konstrukten und zugehörigen angenommenen Aufgabenbearbeitungsprozessen	4 5
Konstruktvalidität	in Form von konvergenter und diskriminierender Validität in/zwischen fachspezifischen und/oder allgemein-pädagogischen Maßen	2 4
Prädiktive/ prognostische Validität	bezüglich der Außenkriterien Lernzuwachs, Unterrichtsqualität oder Handlungsplanung	1 3

Sektionsvorträge

1 Bruckmaier, G. & Krauss, S.: *Prädiktive Validität von Lehrermerkmalen in der COACTIV-Studie*

2 Busse, A., Kaiser, G., König, J., Döhrmann, M., Benthien, J. & Blömeke. S.: *Mathematikdidaktik und Pädagogik – Gemeinsames und Trennendes*

3 Dunekacke, S., Jenßen, L., Grassmann, M. & Blömeke, S.: *Prognostische Validität mathematikdidaktischen Wissens angehender Erzieher/innen für ihre Fähigkeit zur Handlungsplanung*

4 Loch, C., Lindmeier, A. & Heinze, A.: *Elementare Validität der KiL-Maße für fachdidaktisches Wissen und Fachwissen im schulischen Kontext*

5 Teller, J., Barzel, B. & Leuders, T.: *Erfassung diagnostischer Kompetenzen von Lehrkräften – Validität im Spannungsfeld ‚Mixed-Method-Design‘*

Literatur

AERA, APA, NCME (1999). *Standards for educational and psychological testing.* American Educational Research Association.

Kane, M. T. (1992). An argument-based approach to validity. *Psychological Bulletin, 112*, 527–535.

Messick, S. (1989). Meaning and values in test validation: The science and ethics of assessment. *Educational Researcher, 18*(2), 5–11.

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Basel, Marc SCHÄFER, Grahamstown

Mathematik und Sprachkompetenz

Die Beziehungen zwischen Mathematik, Sprache, Kultur, sprachbezogenen Kompetenzen und Sprachwissenschaften und die damit verbundenen Problemlagen bildeten den Themenbereich der Sektion. Im Mittelpunkt sollten dabei Fragen zur Sprachkompetenz im Mathematikunterricht, zur Förderung (und Überprüfung) sprachlich-linguistischer und kommunikativ-sozialer Kompetenzen (z.B. in Mathematikschulbüchern, durch elektronische Medien etc.) und zur „language awareness" von Mathematiklehrpersonen stehen.

2016 wird ein erster landesweiter Test (dt./fr./it.) zur Überprüfung der Erreichung mathematischer Bildungsstandards in der Schweiz (HarmoS-Mathematik) statt finden. Dieser Test betrifft die Grundkompetenzen (Mindeststandards) im Fach Mathematik der Jahrgangsstufe 11 (Ende der obligatorischen Schulzeit) und wird als CBT (Computer Based Test) konzipiert. Der Beitrag von *Helmut Linneweber-Lammerskitten* thematisierte einige Schwierigkeiten (aber auch Chancen) beim Übergang von der Beschreibung mathematischer Kompetenzen und den zur Validierung des Kompetenzmodells eingesetzten Items im Paper-Pencil-Test zu Testitems in computer-/internetbasierten Tests. Im Fokus standen dabei Items zu mathematischen Kompetenzen, die einen starken Bezug zu Sprache und Kommunikation aufweisen.

Einhergehend mit der Einführung von Bildungsstandards für das Fach Mathematik sowohl in Deutschland als auch in der Schweiz wird die Kompetenz des mathematischen Kommunizierens von Schülerinnen und Schülern verbindlich eingefordert. Es ist jedoch bisher weitestgehend unklar, in welchem Ausmaß Schulbücher (und insbesondere die hierin enthaltenen Aufgaben als zentrales Element des Lehrens und Lernens von Mathematik) kommunikative Kompetenz von Schülerinnen und Schülern voraussetzen. *Michael Besser et al.* griffen diese offene Fragestellung auf: Aus dem Blickwinkel der fachabhängigen Kompetenz des Kommunizieren in den Bildungsstandards einerseits sowie der allgemein formulierten Idee des Kommunizierens im CEFR (dem europäischen Referenzrahmen für Sprache) andererseits, wurden exemplarisch zwei Mathematikschulbücher daraufhin untersucht, inwieweit diese kommunikative Kompetenzen bei Lernenden verlangen. Analysiert wurden dabei u. a. Möglichkeiten zum Begriffsaufbau, Kontexte vorkommender Aufgaben, die allgemeine sprachlogische Komplexität im Schulbuch sowie Anforderungen an sprachliche Ak-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 69–70). Münster: WTM-Verlag

tivitäten des Begründens und Diskutierens. Erste Ergebnisse zeigen dabei interessanterweise teils deutliche Unterschiede der beiden Lehrmittel auf.

Erklären wird in verschiedenen Studien als Teil des Professionswissens von Lehrerinnen und Lehrern genannt und sogar als valider Faktor für Unterrichtsqualität bestimmt. Nach einem Entwurf von "Erklärkompetenz" auf der Basis linguistischer /gesprächsanalytischer, pädagogischer und mathematikdidaktischer Arbeiten wurden im Beitrag von Barbara Schmidt-Thieme Lernangebote zur Entwicklung von Erklärkompetenz, ihre Einbettung in ein Lehramtsstudium Mathematik und erste Evaluationen derselben vorgestellt.

Im interdisziplinären Forschungsprojekt SITRE beschäftigt sich eine Teilstudie mit verschiedenen Fragestellungen zum Verstehensprozess beim Lösen von mathematischen Textaufgaben. In dem Beitrag von *Jennifer Plath* wurden erste Auswertungen zu dem Anteil des Verstehensprozesses im Lösungsprozess sowie den Auswirkungen von Aufgabenmerkmalen und personenbezogenen Merkmalen auf den Verstehensprozess thematisiert. Grundlegend ist in den vorliegenden Daten erkennbar, dass nicht die Länge des Verstehensprozesses, sondern vielmehr der prozentuale Anteil des Verstehens im Lösungsprozess Auswirkungen auf die mathematische Qualität der Bearbeitung hat.

Sektionsvorträge

Linneweber-Lammerskitten, H.: Testitems zur mathematischen Sprachkompetenz

Besser, B., Richard, A., Linneweber-Lammerskitten, H., Leiss, D.: Texte lesen und verstehen, Lösungswege diskutieren: Das Schulbuch als zentrales Element mathematischen Kommunizierens?

Schmidt-Thieme, B.: Erklären können

Plath, J.: Das versteh ich nicht! Eine Untersuchung zur Konstruktion des Situationsmodell

Matthias LUDWIG, Frankfurt, Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Berlin, Jürgen ROTH, Landau

Sektion „Forschendes Lernen im Mathematikunterricht“

Die Diskussion um das forschende Lernen im Mathematikunterricht hat sich in den letzten Jahren national und international belebt. Obwohl Hattie dem forschenden Lernen eine Effektstärke von nur 0.38 zuschreibt und es sich damit im hinteren Drittel der erfolgreichen Unterrichtsmethoden befindet, halten wir forschendes Lernen für eine Chance, das Betreiben von Mathematik authentisch zu erleben.

Deshalb wurden in dieser Sektion unterschiedliche Sichtweisen auf das forschende Lernen sowie Ideen zur unterrichtlichen Umsetzung gezeigt und zur Diskussion gestellt. Hierbei wurde deutlich, dass forschendes Lernen im Mathematikunterricht ein sehr schwierig zu fassender Begriff ist und sich nicht vollständig von entdeckendem Lernen und Projektlernen abgrenzen lässt. Allen Ansätzen war gemeinsam, dass gefordert wurde,

- das Lernen des Fragenstellens besonders hervorzuheben,
- das Strukturieren als Technik des wissenschaftlichen Arbeitens zu vermitteln,
- die Freiheit der Vorgehensweisen/des Denkens zu ermöglichen,
- die Reflexion des Vorgehens explizit einzufordern.

Roth und Weigand erläuterten ihr Modell für den Prozess des forschenden Lernens und stellten in ihrem Beitrag eine vorbereitete Lernumgebung zum forschenden Lernen vor, die durch Materialien strukturiert ist und zum Erforschen innermathematischer Zusammenhänge anregt.

Die nächsten beiden Beiträge von Lutz-Westphal und Ludwig gingen von ihren Erfahrungen als wissenschaftliche Begleitung des Programm Mathe.Forscher (http://www.matheforscher.de) aus. Lutz-Westphal betonte, dass das Erlernen des substantiellen Fragenstellens und das Sichtbarmachen der durch Forschen erarbeiteten Mathematik zentral für den forschenden Aspekt des Unterrichts sind. Ludwig berichtete über die Schwierigkeiten von Lehrer/innen bei der Einbettung forschenden Lernens in ihren Unterricht. So denken einige Lehrkräfte etwa, dass Experimente nicht mit Mathematik vereinbar sind. Manche schätzen ihr eigenes Fachwissen als zu gering ein, um auf unerwartete Schülerlösungen adäquat reagieren zu können. Andere Lehrkräfte machen sich Sorgen darüber, dass forschendes Lernen nicht in üblicher Weise planbar ist.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 71–72).
Münster: WTM-Verlag

Maaß berichtete über das internationale Projekt PRIMAS (www.primas-project.eu). Der Vortrag stellte das Implementations- und Evaluationskonzept vor. Erste Ergebnisse aus der Evaluation, die sich mit der Sicht der Lehrer auf den eigenen Unterricht beschäftigen, wurden präsentiert.

Die Darstellungskompetenz als wichtiges Element im Rahmen des forschenden Lernens wurde von Schumacher besonders beleuchtet. Er stellte Prompts als Werkzeug zum Einfordern von Darstellungen vor und referierte erste Ergebnisse einer empirischen Studie zur Protokollierfähigkeit.

Der Fokus von Behrens lag auf dem Erlernen des Fragenstellens. Ihre Studie zeigt u.a., wie die gezielte Aufforderung zum Fragenstellen und – in einem zweiten Schritt – zum Variieren der gefundenen Fragen, ähnlich dem Prinzip der Variation nach Schupp, eine Fülle an Fragen erzeugt.

Kurow stellte schließlich ein fächerübergreifendes Thema einer Arbeitsgemeinschaft vor. Mit Monochorden erarbeiteten sich die Schülerinnen und Schüler Kenntnisse über Proportionen und über den historischen Kontext.

Als Ergebnis der Sektion kann festgehalten werden, dass eine weitere Ausschärfung des Begriffs des forschenden Lernens und der Charakteristik mathematischen Forschens hilfreich sein wird. Darüber hinaus müssen Maßnahmen zur Unterstützung von Lehrkräften ausgearbeitet und in Fortbildungen an Lehrkräfte vermittelt werden, die ihnen helfen ihre Schülerinnen und Schüler adäquat auf dem Weg zum forschenden Lernen zu begleiten. Unterrichtsideen, Unterstützungsprogramme und begleitende Forschung zu einzelnen charakteristischen Elementen eines solchen Unterrichts werden helfen, diesen Ansatz noch weiter in die Breite zu tragen.

Sektionsvorträge

Roth, J., Weigand, H.-G.: Forschendes Lernen im Mathematikunterricht

Lutz-Westphal, B.: Was macht forschendes Lernen im Mathematikunterricht aus?

Ludwig, M.: Herausforderungen von Lehrkräften bei der Integration von forschend-entdeckendem Lernen

Maaß, K.: Forschendes Lernen im Unterricht implementieren – ein internationales Konzept und seine Evaluierung

Schumacher, S., Roth, J.: Darstellungskompetenz als Schlüssel zum forschenden Lernen?

Behrens, R.: Lernen, Fragen zu stellen – unterstützt durch den Einsatz eines Taschencomputers

Kurow, J.: Mathematik und Musik: Schülerinnen und Schüler entdecken das Monochord – zur Vernetzung von Schule und Universität

Günter MARESCH, Salzburg, Thomas MÜLLER, Krems/Donau

Sektion Raumgeometrie-Unterricht

„Niemand kann redlich behaupten, er fördere die Intelligenz seiner Schüler nach bestem Wissen und Vermögen, wenn er das Raumanschauungsvermögen vergisst.“
(ULSHÖFER 1986, S. 74)

Raumgeometrie ist einer jener Bereiche der Mathematik, mit dem sich Kinder schon lange vor jeder strukturierten mathematischen Ausbildung intuitiv beschäftigen. Durch das Be-Greifen erwirbt schon das Kleinkind in den ersten Lebensjahren Raumerfahrung, es lernt Entfernungen abzuschätzen und es unterscheiden durch Befühlen Flächen, Kanten, Ecken, Konvex- und Nichtkonvexheit.

Durch den Mathematikunterricht wird das erworbene Erfahrungswissen sozusagen „formatiert“, eine gemeinsame geometrische und mathematische Sprache wird grundgelegt. Im Laufe der Schuljahre wird ein neuer systematischer Einblick in den Erfahrungsschatz gewährt.

Und Lehrende bemerken, dass die Kinder durch die unterschiedlichen Erfahrungen auch unterschiedliche Raumvorstellungsfähigkeiten haben.

Und damit rücken wir jenem Ziel des Raumgeometrieunterrichtes, dessen Erreichung für viele SchulabgängerInnen berufsnotwendig erwartet wird, näher: Eine gute und fundierte Ausbildung und Weiterbildung des Raumvorstellungsvermögens.

Durch welche Methoden und didaktische Interventionen kann die Raumvorstellung im Raumgeometrieunterricht der Mathematikausbildung besonders gefördert werden?

Die Schulung der Geometrie erfordert eine Förderung der SchülerInnen in zumindest den folgenden Bereichen:

- Strukturiertes geometrisches Basiswissen entsprechend den Vorgaben der Lehrpläne (bmukk, 2000; bmukk, 2004; bmukk, 2012)
- Strukturiertes geometrisches Basiswissen entsprechend der Strukturierung der Kompetenzmodelle für Geometrisches Zeichnen (Mick et al., 2012) und Darstellende Geometrie (Kraker et al., 2012)
- Geometrische Fachterminologie

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 73–74). Münster: WTM-Verlag

- Erweiterung des Strategierepertoires zur Bearbeitung und Lösung von Raumvorstellungsaufgaben (Maresch, 2014b)
- Ausgewogene und umfassende Schulung der Faktoren der Raumvorstellung (Maresch, 2013; Maresch, 2014a)

Ist das Arbeiten mit konkreten geometrischen Körpermodellen im Unterricht für die Kompetenzentwicklung der Raumvorstellung förderlich oder findet dadurch eine so große kognitive Entlastung der Lernenden statt, die der Weiterentwicklung entgegen steht? (Müller, 2012)

Sektionsvorträge

Maresch, G. Erfolgreiche Strategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben (Forschungsprojekt GeodiKon)

Müller, Th.: Raumgeometrieunterricht: Hinweise auf die Übertragbarkeit des Supplantationskonzeptes von Salomon?

Schumann, H.: Räumliches Analogisieren von Begriffen der ebenen Geometrie

Gaab, K.: Geometrie in der Hauptschule

Literatur

bmukk (2000). Lehrplan für Geometrisches Zeichnen (an Hauptschulen und Allgemein bildenden höheren Schulen. Unter www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_abs.xml (Stand: 18.03.2014)

bmukk (2004). Lehrplan für Darstellende Geometrie. Unter http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11863/lp_neu_ahs_11.pdf (Stand: 18.03.2014)

bmukk (2012). Lehrplanverordnung BGBl. II Nr. 185/2012: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/22512/bgbla_2012_ii_185.pdf (18.03.2014)

Kraker, M., Asperl, A., Husty, M., Maresch, G., Röschel, O. (2012). Das Kompetenzmodell für Darstellende Geometrie. Unter: http://www.geometriekompetenzen.at/dg/index.html (Stand:18.03.2014)

Maresch, G. (2014a). Spatial Ability – The Phases of Spatial Ability Research. In: Journal for Geometry and Graphics; Volume 17 (2013), No. 2, S. 237-250

Maresch, G. (2013). Raumintelligenz - Die Phasen der Raumintelligenzforschung. In: Informationsblätter der Geometrie (IBDG), Innsbruck

Maresch, G. (2014b). Strategies for Assessing Spatial Ability Tasks In Journal for Geometry and Graphics, 2014

Mick, S., Eibl, S., Gabl, J., Hochhauser, D., Ranger, S., Schmied, J. (2012). Das Kompetenzmodell für Geometrisches Zeichnen. Unter http://www.geometriekompetenzen.at/gz/index.html (Stand:18.03.2014)

Müller, T. (2012). Über das Lernen mit geometrischen Modellen. In: *Informationsblätter der Geometrie (IBDG),* Innsbruck

Ulshöfer, K. (1986). Man kann im Grundkurs "DG" das Raumanschauungsvermögen der Schüler nachweisbar verbessern. *Lehren und Lernen* , S. 73-80.

Jörg RAPP, Matthias GROESSLER, Melanie PLATZ, Stefanie BUCHHEIT, Engelbert NIEHAUS, Landau

Sektion: GDM-Pilot - Videovortrag & Videokonferenz

1. Einleitung

In dieser GDM-Pilotveranstaltung werden Vorträge als Videos eingereicht und anschließend eine Videokonferenz mit den Vortragenden international ermöglicht. Ferner können auch nach der Konferenz die Vorträge noch asynchron von den Tagungsteilnehmerinnen und Tagungsteilnehmern abgerufen werden.

Ziel der Sektion ist es, mit sehr geringen Kosten z. B. didaktische Perspektiven durch Videovorträge aus Entwicklungsländern in eine Sektion einzubinden. Dies gilt insbesondere, wenn die Kosten für den Flug und die Unterkunft für die Vortragenden nicht finanzierbar sind. Ein anderer Aspekt sind die zeitliche Anforderungen an einen Vortrag, wenn für die Teilnahme an einer Tagung lange Reisezeiten erforderlich sind.

2. Soziale Aspekte einer virtuellen Sektion

Die positiven sozialen Aspekte einer persönlichen Zusammenkunft bei einer Tagung müssen bei der Planung von virtuellen Sektionen bei einer konventionellen Tagung natürlich ebenfalls berücksichtigt werden. Persönliche Diskussionen in einem kleinen Kreis von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern tragen u.U. zu einem größeren Teil zur individuellen Weiterentwicklung von Tagungsteilnehmern bei als der Vortrag selbst.

Mit dem Vortragenden weiterführende Aspekte und Bezüge von dem Vortragsthema zur eigenen wissenschaftlichen Fragestellung herzustellen kann in der Regel nicht durch einen Videovortrag ersetzt werden. Daher ist es bei der Entscheidung für eine Präsentation in einer virtuellen Sektion (Track) einer Konferenz wesentlich, soziale Aspekte und Optionen der persönlichen nicht-virtuellen Kommunikation in die Konzeption der Sektion zu integrieren. Das in Kooperation mit den Vereinten Nationen (UNOOSA) von der Universität Koblenz-Landau pilotierte Konzept einer virtuellen Konferenz mit regionalen Treffpunkten für die Konferenz (Regional Meeting Points RMP) gibt den Teilnehmenden die Möglichkeit,

- Reisezeiten zu minimieren,
- persönliche nicht-virtuelle Kommunikation an einem RMP zu pflegen,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 75–76). Münster: WTM-Verlag

- internationale Konnektivität zu anderen RMPs für spezielle Fragen zu nutzen und

- gleichzeitig soziale Aspekte einer Konferenz für die Schaffung von anregenden Arbeitsumgebungenin die Planung der Sektion mit einzubeziehen.

Die internationale Kommunikation zu anderen RMPs wurde durch ein webbasiertes Videokonferenzsystem (Flashmeeting, OpenMeeting) umgesetzt. Im Vergleich zu einem konventionellen Vortrag sollten die Vortragszeiten und Diskussionszeiten in einem Verhältnis 1:2 aufgeteilt werden und damit der Diskussionszeit in einer virtuellen Sektion der GDM wesentlich stärkeres Gewicht gegeben werden.

3. Video: Vortrag und Lehrmaterial

Durch den Videovortrag entsteht gleichzeitig auch eine gemeinsam nutzbare Datenbasis von Videos, durch die aktuelle didaktische Ansätze als Vortrag auf der GDM auch direkt in die Lehramtsausbildung einfließen können. Ein Vortrag bei der GDM wird damit direkt zum Lehrmaterial für eine asynchrone Nutzung. Wesentlich in diesem Kontext ist die Lizenzierung des Videos, damit auch Ausschnitte in einem Video weiter in Lernumgebungen für Lehramtsstudierende eingesetzt werden können (z.B. Creative Commons als OpenContent-Lizenz)

4. Fazit

Insgesamt ist diese GDM-Pilotveranstaltung eine Option die räumlichen und zeitlichen Rahmenbedingungen ein wenig auszuweiten und internationale Perspektiven zu mathematikdidaktischen Fragen kostengünstig sichtbar zu machen und die Tagungsteilnehmer über Videokonferenz zu dem Vortragsthema zu vernetzen. Es wäre wesentlich, dass die Tagungsteilnehmer als Novizen, die Teilnahme als keine techniklastige Veranstaltung verstehen, sondern als ein „Public Viewing“ von wissenschaftlichen Vorträgen mit der Möglichkeit über Videokonferenz mit dem Vortragenden in Kontakt zu treten. Virtuelle Konferenz ist zwar ein bekanntes Schlagwort, aber nur sehr wenige GDM-Tagungsteilnehmer haben jemals an einer virtuellen Konferenz teilgenommen.

In den folgenden GDM-Tagungen können in dieser Sektion Projekte mit internationalen Projektpartnern ihre Arbeit darstellen. Die Akzeptanz dieser Option bei den Tagungsteilnehmerinnen und Tagungsteilnehmern kann aber erst in Zukunft beurteilt werden.

Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

Flexibles Rechnen konzeptualisieren, erfassen und fördern – Einführung in die moderierte Sektion

“The emphasis in teaching arithmetic has changed from preparation of disciplined human calculators to developing children’s abilities as flexible problem solvers” (Anghileri, 2001, 79).

Flexibles Rechnen wurde mit Beginn des 21. Jahrhunderts nicht nur zu einem zentralen Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule, sondern rückte auch zunehmend in den Fokus der Forschung. Die Forschung zum flexiblen Rechnen verfolgt unterschiedliche Ziele und Fragestellungen; die Ergebnisse können wie folgt zusammengefasst werden:

- Schülerinnen und Schüler präferieren die schriftlichen Algorithmen nach deren Einführung – unabhängig davon, ob diese zum Lösen einer Aufgabe adäquat sind (Selter, 2000; Benz, 2007).
- „Musterlösungen“ wirken sich negativ auf die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen aus, da diese in Form von gelernten Prozeduren genutzt werden. Zudem tendieren Schülerinnen und Schüler dazu, den zuerst gelernten Lösungsweg vorwiegend anzuwenden (Beishuizen & Klein, 1998; Heirdsfield & Cooper, 2004; Schütte, 2004).
- Lösungswege hängen von verschiedenen Faktoren ab, wie der Rechenoperation (Torbeyns, De Smedt, Ghesquière & Verschaffel, 2009), bestimmten aufgabeninhärenten Merkmalen (Blöte, Klein & Beishuizen, 2000; Torbeyns et al., 2009) und dem Erkennen dieser Merkmale im Lösungskontext (Rathgeb-Schnierer, 2006, 2010).
- Schülerinnen und Schüler, die flexibles Rechnen zeigen, zeichnen sich durch verschiedene Merkmale aus. Dazu gehören ein aspektreiches Zahl- und Operationsverständnis, das Beherrschen von Basisfakten ebenso wie Selbstvertrauen und eine positive Einstellung zum Fach (Heirdsfield & Cooper, 2002, 2004; Hope, 1987; Threlfall, 2002). Zusätzlich stützen sich flexible Rechner beim Lösen von Aufgaben auf erkannte Aufgabenmerkmale und Zahlbeziehungen (Macintire & Forrester, 2003; Rathgeb-Schnierer, 2006, 2010; Threlfall 2009).
- Die Entwicklung von flexiblem Rechnen kann durch entsprechende Unterrichtsansätze gefördert werden (Heinze et al., 2009; Rathgeb-Schnierer, 2006). Detailliert zeigte sich, dass den Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks hierbei eine zentrale Rolle zukommt, ins-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 77–78). Münster: WTM-Verlag

besondere bei Kindern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen (Rechtsteiner-Merz, 2013).

Auch wenn bereits eine ganze Reihe an Forschungsergebnissen im Bereich des flexiblen Rechnens vorliegt, bleiben viele Fragen offen. Einerseits ist das flexible Rechnen als theoretisches Konstrukt nach wie vor noch nicht eindeutig und scharf beschrieben, andererseits sind Bedingungsfaktoren für die Förderung im Unterricht nicht hinreichend bekannt (Heinze et al., 2009). Die Beiträge im Rahmen der Sektion setzen sich vielperspektivisch mit flexiblem Rechnen auseinander und tragen somit – implizit oder explizit – zur Beantwortung der noch offenen Fragen bei:

– *Christiane Benz* und *Sebastian Wartha* untersuchen in der fünften Jahrgangsstufe an Hauptschulen den Zusammenhang zwischen flexiblem Rechnen und der Tragfähigkeit von Zahlvorstellungen.
– *Jan Block* präsentiert das Modell einer didaktischen Landkarte zum flexiblen algebraischen Handeln bei quadratischen Gleichungen sowie erste Ergebnisse einer Studie, die nach Voraussetzungen und Hürden bei dessen Entwicklung fragt.
– *Sabrina Lübke* setzt sich mit der Frage nach Flexibilität beim Überschlagsrechnen auseinander. Exemplarisch zeigt sie, inwiefern Viertklässler flexibel überschlagen und welche Kriterien bei ihrer Strategiewahl bzw. Strategieentwicklung relevant sind.
– *Michael Marxer* und *Gerald Wittmann* stellen erste Ergebnisse einer Studie zum Rechnen mit Dezimalbrüchen vor, die zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler oft wenig aufgabenadäquat vorgehen. Zudem präsentieren sie Aufgabenformate zur Förderung aufgabenadäquaten Rechnens.
– *Elisabeth Rathgeb-Schnierer* untersucht in ihrer internationalen Studie die Frage, ob flexibles Rechnen durch das Sortieren und Begründen von Aufgaben identifiziert werden kann. Eine klare theoretische Verortung wird ebenso dargestellt wie erste Ergebnisse.
– *Charlotte Rechtsteiner-Merz* präsentiert eine Typologie zum Rechnenlernen, die im Rahmen ihrer Studie zur Entwicklung von flexiblem Rechnen bei Kindern mit Schwierigkeiten in diesem Bereich entstand. Des Weiteren zeigt sie Entwicklungsverläufe von Kindern mit und ohne Zahlenblickschulung auf.

Literatur

Das Literaturverzeichnis kann bei der Autorin per Email angefordert werden: rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de

Jürgen ROTH, Landau, Evelyn SÜSS-STEPANCIK, Baden, Heike WIESNER, Berlin

Sektion „Lernpfade“

Die Diskussion um den Einsatz, Mehrwert und den Beitrag von Lernpfaden zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht wird im deutschsprachigen Raum schon seit rund einem Jahrzehnt geführt. Zahlreiche Initiativen und Projekte haben Lernpfade entwickelt, erprobt und vielschichtig evaluiert.

In dieser Sektion wurden unterschiedliche Sichtweisen auf das Arbeiten mit Lernpfaden vorgestellt. Hierbei wurde deutlich, dass

- Lernpfade zur Förderung der Selbsttätigkeit der Lernenden methodische Überlegungen benötigen,
- vor allem Wiki-Lernpfade die Partizipation von Lehrenden und Lernenden fördern und
- die Weiterentwicklung von GeoGebra hin zu GeoGebraBooks für Tablets ganz neue Chancen und Herausforderungen eröffnet.

Ausgehend von Gründen, die aus Sicht von Lehrkräften für den Unterrichtseinsatz dynamischer Mathematiksysteme sprechen und den Problemen sowie Fragen, die sich für Lehrkräfte mit diesem Einsatz verbinden, stellt Jürgen Roth die Entwicklung hin zu Lernpfaden dar. Darauf aufbauend legt er eine Definition für Lernpfade vor, die u.a. folgendes umfasst:

Lernpfade

- sind internetbasierte Lernumgebung,
- beinhalten interaktive Materialien, abrufbare Hilfen sowie Ergebniskontrollen,
- umfassen eine Sequenz aufeinander abgestimmter Arbeitsaufträge die Aufforderungen zum Vermuten, Experimentieren, Argumentieren, Reflektieren und Protokollieren beinhalten und
- ermöglichen den Lernenden ein handlungsorientiertes, selbsttätiges und eigenverantwortliches Arbeiten an mathematischen Inhalten.

Heike Wiesner präsentiert eine empirische Exploration zu Lernpfaden in Form einer Expertenbefragung sowie einer Fallstudie und gibt Einblicke in die bisherigen Evaluationsergebnisse. Acht ausgesuchte Expert/innen aus den Bereichen Fachdidaktik Mathematik, Mediendidaktik und Diversity haben die Lernpfade aus ihrer Perspektive beurteilt. Die Befunde sind

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 79–80). Münster: WTM-Verlag

durchwegs positiv. Lernpfade tragen demnach zur Stärkung der Kommunikation und Reflexion im Mathematikunterricht bei. Die Fallstudie zeigt, dass die Infrastruktur an Schulen vereinzelt noch Probleme verursacht. Dennoch schätzen sowohl Lehrende als auch Lernenden an den Lernpfaden die dynamischen Lernobjekte, die eigens Experimentieren ermöglichen. Darüberhinaus kommt der modulare und flexible Aufbau von Lernpfaden den Lehrenden entgegen. Schüler/innen wünschen sich, dass der Lernpfadeinsatz von Plenumsphasen begleitet wird und alltagsnahe Aufgabenstellungen angeboten werden.

Im Beitrag von Evelyn Süss-Stepancik wird aufgezeigt, welchen Beitrag Lernpfade zur prozessbezogenen mathematischen Kompetenz „Darstellungen verwenden" leisten können. Besondere Bedeutung kommt dabei den dynamischen Lernobjekten bzw. Darstellungen in den Lernpfaden zu, denn diese sind Träger wichtiger mathematischer Inhalte. Die dynamisch veränderbaren Darstellungen müssen von den Lernenden verstanden und interpretiert sowie im Erarbeitungsprozess dokumentiert werden. Dabei erfolgt meist ein Wechsel der Darstellungsform. Die Dokumentationen haben einen großen Stellenwert beim Arbeiten mit Lernpfaden und ermöglichen interessante Einblicke in die Sichtweisen der Schüler/innen.

Tobias Rolfes, Roland Weber, Jochen Dörr und Dirk Schmerenbeck befassen sich mit der Frage, wie nachhaltiges Lernen mit Lernpfaden gelingen kann. Sie zeigen anhand eines Wiki-Lernpfads zur Einführung in die Differentialrechnung, der in drei Klassen erprobt wurde, mit welchen Gestaltungselementen dem flüchtigen und ungenauen Arbeiten am Computer entgegengewirkt werden kann.

Hohenwarter und Kimeswenger präsentieren mit ihrem Beitrag zu GeoGebraBooks, die das Organisieren, Strukturieren und Bereitstellen von unterrichtsrelevantem Material erleichtern sollen, einen Blick in die Zukunft.

Insgesamt wird deutlich, dass Lernpfade dann einen Beitrag zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts leisten können, wenn ihr Einsatz methodisch durchdacht mit anderen Unterrichtsphasen vernetzt wird.

Sektionsvorträge

Roth, J., Wiesner, H.: Lernpfade – Ein Weg zur selbstständigen und sinnvollen Nutzung von digitalen Werkzeugen durch Schüler/innen

Süss-Stepancik, E.: Mit Papier und Bleistift beim Einsatz von Lernpfaden Darstellungskompetenzen fordern und fördern

Rolfes, T., Weber, R., Dörr, J., Schmerenbeck, D.: Wie kann nachhaltiges Lernen mit Lernpfaden gelingen?

Hohenwarter, M., Kimeswenger, B.: GeoGebraBooks für Tablets

Christof SCHREIBER, Gießen, Silke LADEL, Saarbrücken

Moderierte Sektion ‚PriMaMedien‘

PriMaMedien: „Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe“

Die hier vorgestellte moderierte Sektion fand als Veranstaltung der Arbeitsgruppe ‚PriMaMedien’ statt, die sich als Teil des AK Grundschule versteht. In dieser Sektion wurden Möglichkeiten eines sinnvollen Einsatzes digitaler Medien unter Beachtung mathematikdidaktischer Prinzipien vorgestellt und diskutiert. Für die GDM in Koblenz konnten als Vortragende Silke Ladel & Ulrich Kortenkamp, Rebecca Klose, Phillippe Sasdi und Roland Rink gewonnen werden.

Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten

Silke Ladel & Ulrich Kortenkamp stellten unter dem Titel „’Ist das dann noch ein Zehner oder ist das dann ein Einer?’ - Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten“ erste Ergebnisse einer quantitativen Studie vor.

Das Stellenwertverständnis (SWV) ist eine Grundlage für sicheres und flexibles Rechnen. Die rein algorithmische Abarbeitung von Rechenverfahren mit Ziffern führt leicht zu Rechenfehlern, und stellenwertbasierte Erleichterungen können nicht oder nur als „Trick“ genutzt werden. Es wurde gezeigt, wie Arbeitsmaterial die Internalisierungs- und Externalisierungsprozesse beeinflusst (Kortenkamp & Ladel 2013). Eine quantitative Studie zum SWV mit Schülerinnen und Schülern der 3. Klasse ergänzt durch Schülerinterviews mit Zweitklässlern gab einen Einblick in die Fehler und Fehlvorstellungen der Kinder.

Mit digitalen Medien Schwierigkeiten im Modellierungsprozess beim Sachrechnen begegnen

Roland Rink zeigte in seinem Vortrag, wie durch den Einsatz digitaler Medien bestimmte sprachliche Probleme gezielt überwunden werden können.

Sachaufgaben, die in der Grundschulmathematik eingesetzt werden, setzen an mathematischen Mitteln meist nicht mehr als die Grundrechenarten voraus. Da verwundert es doch, dass so viele Kinder mit dem Sachrechnen solche Schwierigkeiten haben. Das Problem wird in der Literatur vielfältig diskutiert. Zahlreiche Bearbeitungshilfen werden vorgeschlagen. In diesem Beitrag wurde gezeigt, wie die Bearbeitung von Sachaufgaben mit Hilfe von Tondateien für Kinder mit Problemen im Leseverstehen vor dem Hintergrund der Cognitive Load Theory unterstützt werden kann.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 81–82). Münster: WTM-Verlag

Einsatz von PriMaPodcasts im bilingualen Unterricht

Rebecca Klose zeigte, wie sie im Rahmen ihres Dissertationsprojektes mit der Methode ‚PriMaPodcast' (Schreiber 2013) die Begriffsbildung im Mathematikunterricht in bilingualen Klassen untersucht.

Mit der Erstellung von Audio-Podcasts in der Primarstufe werden mathematische Themen mündlich dargestellt. In einem bilingualen Kontext ist es dabei von besonderem Interesse, inwieweit mathematische Fachbegriffe in den verschiedenen Sprachen verfügbar sind. Neben theoretischen Grundlagen zur Begriffsbildung, wurde im Vortrag der Erstellungsprozess von PriMaPodcasts näher erläutert. Außerdem wurden erste Aufnahmen aus der Erhebung zum Dissertationsvorhaben präsentiert.

Mathematik im Alltag und vor der Tür ... mit dem iPad

Phillippe Sasdi stellte die Möglichkeit des Einsatzes von iPads gerade für die Möglichkeiten des Erlebens von Mathematik in der Umwelt vor. Dazu präsentierte er Ergebnisse eines Seminars mit Studierenden.

Im Rahmen eines Projekts mit Studierenden entstanden offene Lernaufgaben für die Primarstufe in der Stadt Bern. Diese differenzierenden Lernumgebungen sind für die Lernenden auf dem iPad so aufbereitet, dass damit mediengestützt der Zugang zur Alltagsmathematik – bestenfalls – einfacher gelingt. Es wurden Beispiel-Aufgaben aus dem entstandenen eBook gezeigt, über eine Durchführung einer Mittelstufe berichtet und gleichzeitig über sinnvolle Einsatzmöglichkeiten zur Thematik diskutiert.

Sektionsvorträge

Sasdi, Ph.: Alltagsmathematik - Mathematik im Alltag und vor der Tür... mit dem iPad - (1.- 6. Klasse)

Klose, R.: Einsatz von PriMaPodcasts im bilingualen Unterricht

Rink, R.: Mit Audiopodcasts Schwierigkeiten im Modellierungsprozess beim Sachrechnen begegnen

Ladel, S., Kortenkamp, U.: "Ist das dann noch ein Zehner oder ist das dann ein Einer?" - Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten

Literatur

Kortenkamp, U. & Ladel, S. (2013) Designing a technology based learning environment for place value using artifact-centric Activity Theory. Research Forum Activity Theoretical approaches to mathematics classroom practices with the use of technology. In: *Proceedings of PME*. Kiel

Schreiber, Chr. (2013) Mündliche Darstellung mit digitalen Medien. In Beiträge zum Mathematikunterricht. (S. 902-905) Münster: WTM.

Hans-Stefan SILLER, Koblenz, Regina BRUDER, Darmstadt, Torsten LINNEMANN, Basel

Kompetenzstufen- und Kompetenzentwicklungsmodelle

Inhalts- und handlungsbezogene Kompetenzen sind, vor dem Hintergrund internationaler Vergleichsuntersuchungen ein zentraler Aspekt der fachdidaktischen Diskussion (vgl. Biehler & Leuders, 2014). Daraus resultiert inzwischen auch eine konsequente Unterscheidung in Kompetenzstufenmodell und Kompetenzentwicklungsmodell. Beide Begrifflichkeiten werden in Diskussionen immer wieder verwendet, eine notwendige tiefergehende Betrachtung meistens aber vermieden.

In der Expertise zu den Bildungsstandards (vgl. Klieme et al, 2003, S. 46) findet man folgende Aussage: „Kompetenzmodelle sollten auch Aussagen darüber machen, in welchen Kontexten, bei welchen Altersstufen und unter welchen Einflüssen sich die einzelnen Kompetenzbereiche entwickeln. Nur so kann in der Schule erwartet werden, dass sie mit geeigneten Maßnahmen zur systematischen Kompetenzentwicklung, zum kumulativen Lernen beiträgt.“ Der Begriff Kompetenzmodell, wie er hier gebraucht wird, zielt u.E. auf ein Kompetenzentwicklungsmodell ab. Dies erklärt sich daraus, dass auf Strukturen und Entwicklungsverläufe verwiesen wird (vgl. Hammann, 2004, S. 196). Daraus resultieren für den Unterrichtsprozess Fragen, die zum einen für die Planung durch Lehrer/innen notwendig sind, wie beispielsweise jene die Regina Bruder u. a. (2014) für den Mathematikunterricht aufwirft „Was ist wichtig und warum das?“ bzw. „Welche Könnensdimensionen sind relevant?“. Aus wissenschaftlich-fachdidaktischer Perspektive scheint es aber auch notwendig die Frage „Welche Entwicklungsstufen sind unterscheidbar und können in didaktischen Modellen abgebildet werden?“ (vgl. Bruder et al, 2014) zu stellen. So gelingt es die Kompetenzentwicklung als gestufte Fähigkeit abzubilden und den Entwicklungsstand hinsichtlich definierter Kompetenzen zu erfassen.

Konsequenterweise soll daher, neben der Aufnahme in die Curricula, die Kompetenzorientierung auch in Prüfungssituationen (vgl. Siller et al, 2014) soweit möglich berücksichtigt werden. Tatsächlich ist es in der Praxis so, dass Kompetenzstufenmodelle an den sog. Schnittstellen (zur Sek. II und zur Hochschule) eingesetzt werden. Diese wurden für die jeweiligen Abschlüsse (vgl. Katzenbach, o.J.) – mittlerer Schulabschluss (2008), Hauptschulabschluss (2009) und Allgemeine Hochschulreife (2012) in Deutschland – von der KMK verabschiedet und gelangen inzwischen zur Umsetzung.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 83–84). Münster: WTM-Verlag

In internationalen Vergleichsstudien, wie z. B. PISA, werden anhand von Kompetenzstufen Anforderungen definiert, die es ermöglichen, vorhandene Testleistungen inhaltlich vergleichbar zu interpretieren (vgl. Linnemann, 2014). Es wird davon ausgegangen, dass Schülerinnen und Schüler, welche die Anforderungen einer bestimmten Kompetenzstufe erfüllen, auch in der Lage sind, Anforderungen darunterliegender Kompetenzstufen zu erfüllen. Anforderungen höherer Kompetenzstufen können dagegen nicht a priori erfüllt werden. Mit Hilfe eines Kompetenzrasters, welcher diese Kompetenzstufen festlegt, soll eine valide Aussage über das Können bzw. Nicht-Können von Schülerinnen und Schülern ermöglicht werden, in Ergänzung zu korrekt gelösten Aufgaben.

Das dabei noch immer erheblicher Forschungsbedarf hinsichtlich Kompetenzstufenmodellen notwendig ist, formulieren Schecker & Parchmann (2006, S. 46): „In Ermangelung theoretisch begründeter und empirisch abgesicherter Kompetenzmodelle in Mathematik der Sekundarstufe II ist man bei der Testentwicklung auf das Sichten und nachträgliche Kategorisieren von Items angewiesen. Es besteht also großer Forschungs- und Entwicklungsbedarf.“

Literatur

Bruder, R., Bergmann, L., Krüger, U.-H. (2014): LEMAMOP - ein Kompetenzentwicklungsmodell für Argumentieren, Modellieren und Problemlösen wird umgesetzt. Roth, J. & Ames, J. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM-Verlag

Hannemann, M. (2004). Kompetenzentwicklungsmodelle. *Mathematisch Naturwissenschaftlicher Unterricht* (MNU), 57/4, 196–203.

Biehler, R.; Leuders, T. (2014). Kompetenzmodellierungen für den Mathematikunterricht. R. Biehler, S. Hußmann, P. Scherer (Hrsg.), *Journal für Mathematikdidaktik*. Band 35, Heft 1, Heidelberg: Springer.

Katzenbach, M. (o. J.). *Outputsteuerung*. http://www.gew-hessen.de/uploads/media/Outputsteuerung.pdf (letzter Zugriff: 19.03.2014)

Klieme, E. et al (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – eine Expertise*. Berlin: BMBF.

Linnemann, T. (2014). Elementare mathematische Handlungsaspekte. Roth, J. & Ames, J. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM.

Schecker, H. & Parchmann, I. (2006). Modellierung naturwissenschaftlicher Kompetenz. *Zeitschrift für die Didaktik der Naturwissenschaften*, 12, 45-66.

Siller, H.-St. et al (2014). Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II – Konkretisierung einer Stufenmodellierung. J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM.

Hans-Stefan SILLER, Koblenz, Martin BRACKE, Kaiserslautern

Mathematisches Modellieren im projektorientierten Unterricht

Mathematisches Modellieren im Rahmen eines interdisziplinären Projektunterrichts (IPU) eröffnet eine Menge spannender Forschungsfragen und Unterrichtsmöglichkeiten. Für die Erkenntnisgewinnung im Prozess des forschenden Lernens von Mathematik oder Naturwissenschaften sind Modelle und die damit verbundene Modellbildung bzw. das Durchlaufen eines Modellierungskreislaufes von zentraler Bedeutung.

Ohne ein tiefergehendes Verständnis des Modellcharakters mathematischer, mathematisch-naturwissenschaftlicher oder naturwissenschaftlicher Theorien ist ein angemessenes Verstehen der Mathematik und der Naturwissenschaften kaum möglich. Die Mathematik ist ein nahezu unerschöpfliches Reservoir für (mathematische) Modelle, mit deren Hilfe es uns ermöglicht wird die „reale Welt" um uns herum besser zu verstehen. Durch die Forderungen eine Vernetzung von Wissen zu fördern und das aktive Einbauen von neuen Inhalten in das vorhandene Wissensnetz, kann Lernen in moderner – projektorientierter – Form stattfinden. Durch den Einbezug mathematischer Modellierung ist eine gegenseitige Befruchtung von Mathematik und der Realität (vgl. Pollak, 1979) möglich. Schüler(innen) (er-)lernen durch bzw. mit (mathematischer) Modellierung eine Brücke zu bauen zwischen der Mathematik als Hilfestellung um die reale Welt besser zu verstehen und der Mathematik als abstrakter Formalwissenschaft. Dazu sind jedoch „rich learning experiences" (vgl. English, 2003) notwendig, die durch den Einbezug projektorientierter Modellierungstätigkeiten möglich werden.

Untersuchungen (vgl. Mikelskis-Seifert & Leisner, 2003) zeigen, dass das Verständnis für Modellbildung auch nach langjährigem Unterricht zu wünschen übrig lässt. Daher soll durch eine umfangreiche Diskussion und Reflexion über die Kennzeichen von Erfahrungswelten und der Modellwelt dazu beitragen, dass Schwierigkeiten beim Lehren und Lernen beim Modellieren begegnet wird, so dass charakteristische Tätigkeiten wie die *Diskussion und Reflexion über die Natur der Modelle sowie über vorgenommenen Modellierungen*, *Veranschaulichung des bewussten Konstruierens der Modelle für die Beschreibung und Deutung realitätsbezogener Phänomene*, *Prüfung von Modellannahmen auf deren Tragfähigkeit allenfalls Verwerfen ungeeigneter Modellannahmen bzw. Aufzeigen von Modellgrenzen* sowie *systematische Trennung zwischen Betrachtungen in der realen Erfahrungswelt und der Modellwelt* berücksichtigt werden.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 85–86). Münster: WTM-Verlag

Die Bedeutung des Modellierens für die Mathematik kann so hervorgehoben werden. Wichtige Aktivitäten, das Sammeln von Daten, das Schreiben von Berichten über den eigenen Arbeitsfortschritt oder das Begründen bzw. Verteidigen selbst gefundener Folgerungen, sollen im Mathematikunterricht berücksichtigt werden (vgl. Henn, 2005, S. 82). Die Reflexion über Zusammenhänge von Mathematik und (realer) Welt schließt ethische Fragen mathematischen Handelns ein. Schüler(innen) werden später als mündige Bürger(innen), in unterschiedlichen Situationen, Verantwortung tragen und mitentscheiden müssen. Daher möchten wir folgende These formulieren:

Modellbilden besitzt eine allgemeinbildende gesellschaftliche Relevanz über die Mathematik und den Mathematikunterricht hinaus, eignet sich als Strukturierungsmaßnahme im bzw. für den Mathematikunterricht und kann v.a. im projektorientierten Unterricht umgesetzt werden.

Sektionsvorträge

Kreckler, J.: Modellierung im Regelunterricht – Ein neues Konzept

Götz, T.: Mathematische Modellierung

Hattebuhr, M. et al.: Kompetenzzuwachs bei Schülerinnen und Schülern durch die Teilnahme an einer Modellierungswoche

Bock, W., Bracke, M.: MINT-Projektunterricht in der Sekundarstufe I: Konzepte und Herausforderungen

Bracke, M., Bock, W.: MINT-Projektunterricht in der Sekundarstufe I: Beispiele aus der Unterrichtspraxis

Schnieder, J., Bracke, M.: Mathematisches Modellieren im MINT-Studium – ein fächerübergreifendes Konzept zur Gestaltung von Modellierungstagen

Spreitzer, C.: Numerisches Lösen von Differentialgleichungen: Realistische Modelle aus der Physik im Schulunterricht

Literatur

Englisch, L. (2003). Mathematical Modelling with Young Learners. Lamon, S. J. et al. (Hrsg.). *Mathematical Modelling: A Way of Life*, Chichester: Ellis Horwood, 3–17.

Henn, H.-W. (2005). Modell und Wirklichkeit. Engel, J., Vogel, R. & Wessolowski, S. (Hrsg.). *Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren*. Hildesheim: Franzbecker. 77–92

Mikelskis-Seifert, S. & Leisner, A. (2003). Das Denken in Modellen fördern. Ein Unterrichtsbeispiel zur Entwicklung von Teilchenvorstellungen. *Naturwissenschaften im Unterricht Physik*, Heft 74, 14. Jahrgang, 32–34.

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (Hrsg.). New Trends in mathematics teaching, Vol IV . Paris, 232–248.

4 Beiträge zu den Einzel- und Sektionsvorträgen (Teil 1)

Christoph ABLEITINGER, Wien

Diagnose und Förderung im Unterrichtsgeschehen – ein schwieriges Unterfangen

Es gehört zweifellos zu den zentralen Aufgaben eines Lehramtsstudiums, angehende Lehrkräfte dazu zu befähigen, Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern frühzeitig zu erkennen, zu diagnostizieren und angemessene Fördermaßnahmen anbieten zu können. Dass diese Aufgabe in der Vergangenheit offenbar nicht umfassend genug erfüllt wurde, zeigt der vorliegende Beitrag unter Bezugnahme auf Daten einer qualitativen Studie, die an der Universität Wien im Rahmen der Diplomarbeit von Frau Christina Gahler durchgeführt wurde.

Es hat sich herausgestellt, dass selbst erfahrene Lehrkräfte oftmals kein Sensorium dafür entwickelt haben, zu welchen Fehlvorstellungen es bei Schülerinnen und Schülern kommen kann, da diese im Unterricht häufig gar nicht offenbar und damit für die Lehrkräfte zugänglich werden. Selbst wenn also diese Lehrkräfte – und auch das hat sich in der Studie gezeigt – zumindest teilweise wirksame Fördermaßnahmen anbieten könnten, so fehlt es vielfach an der Zeit, an geeigneten Rahmenbedingungen im Unterricht bzw. an adäquaten Hilfsmitteln für eine fundierte Diagnose.

1. Vektorrechnung – Pfeilklassen vs. mehrdimensionale Rechenzahlen

Fachlicher Kontext der Studie ist der Einstieg in die Vektorrechnung (9. Schulstufe an österreichischen Gymnasien). In Schulbüchern findet man im Wesentlichen zwei unterschiedliche Zugänge zur Vektorrechnung. Während in manchen Lehrwerken Vektoren zunächst rein algebraisch als Zahlenpaare bzw. Zahlentupel eingeführt werden und diese erst später geometrisch als Punkte und Pfeil interpretiert werden (siehe z. B. Malle et al. 2010), wird in anderen Schulbüchern ein Vektor als Menge aller Pfeile gleicher Länge, Richtung und Orientierung definiert, also als Pfeilklasse (siehe z. B. Reichel und Götz 2010).

Obwohl das österreichische Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung (BIFIE) im Hinblick auf die bevorstehende standardisierte Reifeprüfung vorgibt, Vektoren als algebraische Objekte zu definieren, bleiben viele Lehrkräfte bei der tradierten Pfeilklassendefinition, auch wenn diese gewisse Fehlvorstellungen begünstigen kann (Malle 2007). Dazu gehören beispielsweise Verwechslungen zwischen den Begriffen „Vektor“ und „Pfeil“ (als Repräsentant eines Vektors). Es werden in der Literatur aber auch Fehlvorstellungen beschrieben, die weitgehend unabhängig vom gewählten Zugang im Unterricht auftreten. Es seien an die-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 89–92). Münster: WTM-Verlag

ser Stelle zwei Beispiele genannt, die sich auf die Formel $M = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$ für den Mittelpunkt einer Strecke AB beziehen:

„Wenn ich die Punkte A und B addiere, dann erhalte ich die ganze Strecke. Um den Mittelpunkt zu erhalten, muss ich diese Strecke durch 2 dividieren."

„Wenn ich die Punkte A und B habe und diese verbinde, dann habe ich auch gleichzeitig den Vektor $\overrightarrow{AB}$. Wenn ich davon die Hälfte nehme, komme ich zum Mittelpunkt." (beide Zitate aus Hartmann 1993)

2. Forschungsinteresse

Im Rahmen der Studie sollte nun herausgefunden werden, ob solche Fehlvorstellungen im normalen Unterrichtsverlauf überhaupt auftreten, ob die Lehrkraft sie erkennt, wie sie gegebenenfalls damit umgeht und in welcher Weise die durch die Lehrkraft durchgeführten Interventionen wirken. Es wurden dazu in einer Schulklasse der 9. Schulstufe zwölf Unterrichtsstunden videographiert und die für die Fragestellung relevanten Passagen transkribiert. Selbstverständlich stellt dieses Videomaterial keinen repräsentativen Querschnitt durch die österreichische Schullandschaft dar, es gibt aber durchaus Hinweise auf systembedingte Schwierigkeiten, was die Diagnose- und Fördermöglichkeiten im Regelunterricht betrifft. Es ist an dieser Stelle festzuhalten, dass der beobachtete Unterricht zwar frontal geprägt war, zwischendurch aber auch immer wieder andere Sozialformen eingesetzt wurden (Einzel- und Partnerarbeit, Arbeiten an der Tafel durch die Schülerinnen und Schüler). Ohne es belegen zu können, dürfte diese Art von Unterricht durchaus typisch für den Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe in Österreich sein.

Zusätzlich wurden Interviews mit fünf Mathematiklehrkräften geführt, in denen die Befragten bei längerer Bedenkzeit typische Fehlvorstellungen ihrer Schülerinnen und Schüler im Themengebiet Vektorrechnung nennen sollten. Sie sollten außerdem angeben, wie sie auf solche Fehlvorstellungen reagieren würden.

Schließlich wurden die von den Lehrkräften genannten Fördervorschläge direkt an Schülerinnen und Schülern erprobt, um sie auf ihre Wirksamkeit hin zu überprüfen. Dazu wurden Schülerpaaren zunächst Aufgaben vorgelegt, die typische Fehlvorstellungen provozieren sollten. Traten die Fehlvorstellungen tatsächlich auf, wurde das Schülerpaar gemäß den Lehrervorschlägen „therapiert", bevor schließlich mit Hilfe einer weiteren Aufgabe festgestellt werden sollte, ob die Therapie (zumindest kurzfristig) gewirkt hat.

3. Ausgewählte Ergebnisse

Es hat sich gezeigt, dass in den beobachteten zwölf Unterrichtsstunden Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern äußert selten überhaupt bemerkt werden konnten. Insgesamt wurden bei genauerer Durchsicht nur fünf Situationen identifiziert, in denen durch Schüleräußerungen offenbar wurde, dass zu einem Begriff falsche Vorstellungen aufgebaut wurden. Und selbst wenn eine Fehlvorstellung sichtbar wurde, hat die Lehrkraft diese im normalen Unterrichtsgeschehen nicht immer entdeckt bzw. aufgegriffen, um einen „conceptual change“ einzuleiten.

Bei den Interviews konnten die befragten Lehrkräfte nur wenige Fehlvorstellungen nennen, die Schülerinnen und Schüler typischerweise im Gebiet der Vektorrechnung haben. Es wurden ihnen daraufhin typische Fehlvorstellungen aus der Literatur vorlegt. Sie schätzten ein, dass ihre Schülerinnen und Schüler nur selten diese Fehlvorstellungen zeigten. Dieses Ergebnis unterstreicht die Beobachtung aus den Unterrichtsstunden, wonach es für die Lehrkräfte sehr schwierig ist, Fehlvorstellungen im normalen Unterrichtsverlauf zu erkennen und einzuordnen. Darüber hinaus werden solche Fehlvorstellungen offenbar auch bei schriftlichen Arbeiten (Hausübungen, Schularbeiten, Klausuren) nicht als solche erkannt oder ernst genommen, sonst wäre das bei den Interviews wohl zur Sprache gekommen.

Auf die Frage, mit welchen Maßnahmen sie auf die aus der Literatur entnommenen Fehlvorstellungen reagieren würden, hatten die befragten Lehrkräfte vielfältige Antworten parat. Dabei zeigte sich als durchgängiges Prinzip, dass die Lehrkräfte die entsprechenden Sachverhalte „nochmal klar machen“ bzw. dass sie Begriffe „nochmal erklären“ würden. Dabei wurde auch häufig der Computer (dynamische Geometrie-Software) als brauchbare Unterstützung zur Visualisierung von Begriffen und Zusammenhängen genannt. In keinem einzigen Fall war die genannte Intervention aber explizit darauf ausgerichtet, die Fehlvorstellung der Schülerin bzw. des Schülers zunächst einmal ernst zu nehmen, in einem interaktiven Prozess Konsequenzen herauszuarbeiten, die die fehlerhafte Vorstellung mit sich bringen würde, um die Schülerin bzw. den Schüler so zum Erwerb neuer, angemessenerer Vorstellungen zu bewegen. Auch die mögliche Rückfrage „Was stellst du dir genau vor, wenn du sagst … ?“ wurde kein einziges Mal als mögliche Intervention genannt.

Bei den Interviews mit den Schülerpaaren zeigte sich schließlich, dass weit mehr Fehlvorstellungen sichtbar wurden, als das von den Lehrkräften erwartet wurde bzw. als es im Unterricht den Anschein gemacht hatte. Viele der von den Lehrkräften genannten Fördermaßnahmen führten (zumindest kurzfristig) zu Erfolgen, d. h. zum Verschwinden der zuvor noch gezeigten

Fehlvorstellungen. Eventuell ist aber genau das eines der Probleme: Man könnte als Lehrperson durch den vermeintlichen Erfolg dieser Fördermaßnahmen eher zum Glauben verleitet werden, dass zusätzliche Erklärungen die Fehlvorstellungen bei Lernenden nachhaltig auflösen könnten, obwohl das unter Umständen gar nicht der Fall ist. Um diese Hypothese zu prüfen, wären weitere Untersuchungen nötig, die den Rahmen der Diplomarbeit von Frau Gahler allerdings gesprengt hätten.

4. Konsequenzen

Es braucht u. E. vor allem Bewusstseinsbildung bei (angehenden) Lehrkräften, was das Vorhandensein bzw. die Schwierigkeiten bei der Diagnose von Fehlvorstellungen von Lernenden betrifft. Es gibt in der Literatur – natürlich nicht nur zur Vektorrechnung – zahlreiche empirische Befunde zu Fehlvorstellungen, die in didaktischen Veranstaltungen der Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften konstruktiv genutzt werden sollten. Konkret für die Vektorrechnung könnte eine Kernbotschaft sein: „Nur weil etwas anschaulich ist, muss es nicht automatisch angemessene Vorstellungen in den Köpfen der Lernenden erzeugen“. (Die Anschaulichkeit wurde von den befragten Lehrkräften durchgängig als Argument für einen geometrisch geprägten Zugang zur Vektorrechnung genannt.)

Diagnose- und Förderkompetenzen können im Lehramtsstudium nicht alleine in bildungswissenschaftlichen Lehrveranstaltungen erworben werden, zu wichtig sind dabei fachspezifische Aspekte.

Und schließlich braucht es im Unterricht mehr Zeit für Interaktion. Mathematisches Wissen, mathematische Kompetenzen und vor allem erwünschte Vorstellungen dazu können nicht einfach durch Erklärungen von einer Person auf eine andere übertragen werden. Es braucht Aushandlungsprozesse, innerhalb derer die einzelnen Gesprächsbeiträge gedeutet, hinterfragt, kritisiert und schließlich konsolidiert werden können!

Literatur

Gahler, Ch. (2014). Didaktische Handlungsfähigkeit von Lehrpersonen in Bezug auf Fehlvorstellungen zu Vektoren. Universität Wien: Diplomarbeit.

Hartmann, K. (1993). Inhaltliche Vorstellungen von Vektoren. Eine mathematikdidaktische Untersuchung. Universität Wien: Diplomarbeit.

Malle, G. (2007). Das Vektorkonzept im „Mathematik verstehen“. Abgerufen am 17. Dezember 2013 von Universität Wien:

http://www.mat.univie.ac.at/~mv/dokumente/vektorkonzept.pdf

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A. (2010). Mathematik verstehen 5. Wien: öbv.

Reichel, H.-Ch. & Götz, S. (Hrsg., 2010) Mathematik 5. Wien: öbv.

Ergi ACAR BAYRAKTAR, Frankfurt am Main

Interaktionale Nische der mathematischen Raumvorstellung bei den Vorschulkindern im familialen Kontext

1. Theoretischer und analytischer Rahmen

In erStMaL-FaSt (early Steps in Mathematics Learning - Family Study) wird eine empirische Untersuchung in familialen Situationen durchgeführt. Das Analysinteresse richtet sich auf den Einfluss familialer Interaktionen auf die Entwicklung der mathematischen Raumvorstellung bei Kindern im Vorschulalter. Die Studie ist longitudinal angelegt und es wird eine interaktionistische, sozial-konstruktivistische Perspektive eingenommen. Es interessiert, wie in diesem familialen Interaktionssystem ein „Mathematics Learning Support Systems“ (MLSS) für die Entwicklung der Raumvorstellung beim Kind emergiert. Es ist weitgehend ungeklärt, wie solche MLSS in einzelnen funktionieren und wie sie sich im Zuge der kindlichen Entwicklung verändern. Für diese Analyse wird theoretisch auf das Konzept der „interaktionalen Nischen mathematischer Denkentwicklung“ (NMD oder auch kurz „Entwicklungsnische“ genannt) zurückgegriffen. Eine „Entwicklungsnische“ besteht aus den kulturspezifischen, von einer Gruppe oder Gesellschaft bereitgestellten Lernangeboten (Allokationsaspekt) und einem realen Interaktionsprozess den emergierenden Situationen (Situationsaspekt) (Krummheuer 2011, S.65). Mit Blick auf die mathematische Denkentwicklung eines Kind haben Krummheuer & Schütte (in press) noch als dritten Aspekt den individuellen Beitrag des interessierenden Kindes als zusätzlichen Aspekt der Aktion hinzugefügt. In Bezug auf de interessierenden familialen Kontext hat die NMD die folgende Ausprägung:

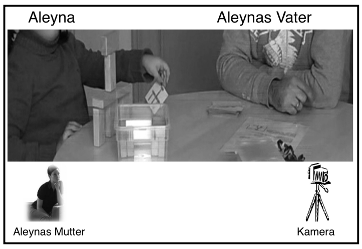
NMD(Fam.)	Inhaltskomponente	Kooperations-komponente	Vermittlungskomponente
Aspekt: Allokation	mathematische Inhaltsbereiche „Geometrie“ und „Messen und Größen“	Spiele als familiale Arrangements für Kooperationen	Entwicklungs- und mathematikdidaktische Theorien und darauf basierende Handlungsvorschläge für Eltern
Aspekt: Situation	interaktive Aushandlung der Spielregeln und der Inhalte	Partizipations-spielräume	Alltagstheorien zum (Mathematik)-Lernen; MLSS
Aspekt: Aktion	individuelle Handlungsbeiträge	individuelles Partizipationsprofil	Kompetenztheorien

Abb. 1: Struktur der Entwicklungsnische im familialen Kontext

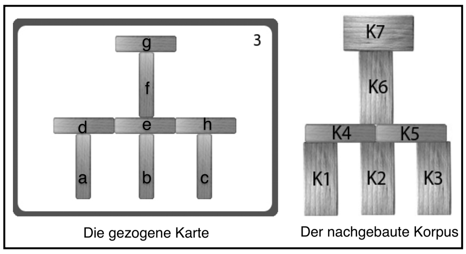
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 93–96). Münster: WTM-Verlag

Unter der Berücksichtigung des Konzepts der Entwicklungsnische im familialen Kontext wird in folgenden eine Spielsituation aus dem Inhaltsbereich der mathematischen Raumvorstellung vorgestellt.

2. Fallbeispiel: Familie Ak- Aleyna mit ihren Eltern



Das Fallbeispiel stammt aus der 2. Erhebungswelle von erStMaL-FaSt, in dem Aleyna und ihre Eltern teilnehmen. Die Tochter Aleyna ist das einzige Kind der Familie. Ziel des Spiels ist es, das Gebäude auf der Spielkarte genau nachzubauen. Dadurch wird der Unterschied zwischen der zweidimensionalen Abbildungen und den dreidimensionalen Körpern erfahrbar. In der beobachteten Episode sind der türkische Vater



und Aleyna (7;8 Jahre) mit dem Spiel ‚Bauherr02' beschäftigt, während die Mutter eher als Zuschauerin auftritt. In der ersten Runde zieht Aleyna eine Karte und fängt mit dem Nachbauen an. Als sie mit dem Nachbauen fertig ist, fragt ihr Vater, ob der aufrecht nachgebaute Korpus richtig sei.

27			Vater	ist das richtig/ nein\
28			Mutter	kuck mal richtig an Aleyna da sind zwei Klötze
29				ober- oder/ noch einer kommt da oben
30			Vater	ok halt dein Mund misch dich nicht ein *schauend*
31				*Mutter nach*
32			Aleyna	*verzieht das Gesicht* neeeey- des is richtich\
33			Mutter	guck mal
34			Vater	*zeigt auf der Karte mit rechten Zeigefinger* guck
35		#		mal hier ist drei Teile eins zwei drei\

Auf seine Frage antwortet er selbst mit einem Nein <27>. Die dabei sitzende Mutter warnt Aleyna davor, dass sie sich den Korpus sorgfältig anschauen soll und erwähnt eine Anzahl von Klötzchen im Korpus <28-29>. Es bleibt unklar, um welche es sich hierbei handelt. Der Vater, ihr Ehemann sieht sie an und sagt, dass sie ruhig sein und sich nicht in das Spiel einmischen solle <30-31>. Aleyna verzieht ihr Gesicht und lehnt die Aussage ihres Vaters ab, dass der Korpus falsch sei <32>. Die Mutter mag sich mit „guck mal" an Aleyna wenden <33>. Der Vater zählt die drei mittleren waagerechten Klötzchen (d, e, h) auf der Karte ab <34-35>.

3. Deutung der Szene und Ausblick

In der ausgewählten Szene Aleyna baut die Figur auf der Karte nach. Der entstandene Körper entspricht offensichtlich nicht vollständig der Vorgabe.

Vater und Mutter führen als ein (Gegen-) Argument offenbar nicht übereinstimmende die Anzahlen der Klötzchen in Teilen des Korpus mit dem Bild auf der Spielkarte an Hiermit bieten sie eine „arithmetisch-analytische" Sichtweise oder „Rahmung" (Schreiber 2010, S.58; s.a. Goffmann 1980, S.15; Krummheuer 1992, S.24ff.) an. Hierdurch wird eventuell auch eine mehr raumgeometrische Betrachtungsweise in den Hintergrund gedrängt. Alyenas Partizipationsoptionen werden jedenfalls auf eine solche arithmetisch-analytische Herangehensweise hingelenkt (s. hierzu den Begriff des Partizipationsspielraums" bei Brandt 2004). Die Beteiligten hätten alternativ z. B. auch darauf eingehen können, dass in Aleynas Nachbau fast alle Klötzchen mit der breiten Fläche, während auf dem Bild nur schmale Flächen der Klötzchen zu sehen sind. Aleyna lässt sich zumindest anfänglich durch den Anzahlhinweise der Mutter nicht von ihrer Ansicht abbringen, dass ihr Nachbau korrekt ist. Möglicherweise ist für sie die Anzahl der Klötzchen nicht so entscheidend; sie könnte eventuell eine geometrisch-ganzheitliche Sichtweise oder Rahmung vorgenommen haben. Der Dissens über die korrekte Widergabe des Bildes in dem nachgebauten Korpus erscheint somit auch ein Dissens über die Rahmung des Problems.

In der Zusammenschau ergibt sich der Eindruck, der in dieser Szene in den interaktiven Aushandlungsprozessen zwischen Eltern und Kind die supportiven Effekte eher arithmetischer Natur sind. Wenn Aleyna in dieser Szene im Sinne einer NMD Entwicklungschancen nutzen könnte, dann würden sich diese wohl eher auf Abzählfähigkeiten beziehen. Eine Förderung hinsichtlich einer ihr unterstellbaren geometrisch-ganzheitlichen Rahmung scheint wenig wahrscheinlich.

Die drei Komponenten (Inhalt, Kooperation und Vermittlung) der interaktionalen Nische räumlicher Wahrnehmung und ihrer Denkentwicklung (NMD) sind im dargestellten Fall folgendermaßen ausgeformt:

NMD (Fam. Ak)	Inhaltskomponente	Kooperationskomponente	Vermittlungskomponente
Aspekt: Allokation	mathematischer Inhaltsbereich „Raumgeometrie" – Bauherr 02 –	Spiel von Vater und Aleyna mit der Begleitung der Mutter	Theorien zur Entwicklung räumlicher Fähigkeiten
Aspekt: Situation	interaktive Aushandlungen von Teilen des Korpus; Deutungen unter verschiedenen Rahmungen, Dissens über die Fehlerhaftigkeit des Kor-	Aleynas Partizipationsspielraum wird in eine arithmetisch-analytische Richtung gelenkt	Vorstellungen der Eltern, dass der Konstruktionsfehler durch Anzahlvergleiche von Klötzchen erreicht werden kann (arithme-

	pus		tisch-analytische Rahmung)
Aspekt: Aktion	baut einen ähnlichen, aber nicht korrekten Korpus, möglicherweise unter eine geometrisch-ganzheitlichen Rahmung	baut eigenständig eine Korpus, dessen Korrektheit sie verteidigt.	Lernchancen für Aleyna entstehen eher im arithmetischen Bereich.

Abb. 2: Aleynas Entwicklungsnische im familialen Kontext

Unter Berücksichtigung des analytischen und räumlichen Denkens, die ineinander gehend sind (Obersteiner 2012), sollte man abschließend darauf hinweisen, dass sich die NMD im Fortgang der Interaktion durchaus wieder hin zu geometrischen Themen entwickeln könnte und damit für Aleyna auch eine MLSS in räumlicher Geometrie entstehen könnte.

Literatur

Brandt, B. (2004). *Kinder als Lernende. Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer*. Frankfurt am Main usw.: Peter Lang.

Goffman, E. (1980). *Rahmen-Analyse: ein Versuch über die Organisation von Alltagserfahrungen*. Frankfurt am Main : Suhrkamp.

Krummheuer, G. (1992). *Lernen mit "Format": Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie; diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts*. Weinheim: Dt. Studien-Verlag.

Krummheuer, G. (2011). Die empirisch begründete Herleitung des Begriffs der „Interaktionalen Nische mathematischer Denkentwicklung“ (NMD). In Brandt, B., Vogel, R., Krummheuer, G, (Hrsg.) *Mathematikdidaktische Forschung am "Center for Individual Development and Adaptive Education". Grundlagen und erste Ergebnisse der Projekte erStMaL und MaKreKi (Bd. 1)(S. 25-90).*Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Krummheuer, G. &, Schütte,M. (in press). Das Wechseln zwischen mathematischen Inhaltsbereichen – Eine Kompetenz, die nicht in den Bildungsstandards steht. *Zeitschrift für Grundschulforschung*.

Obersteiner, A. (2012). *Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten: Konzeptionierung einer Förderung mit psychologisch-didaktischer Grundlegung und Evaluation im ersten Schuljahr.* Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 11. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann. ISBN 978-3-8309-2705-1.

Schreiber, C. (2010). *Semiotische Prozess-Karten. Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen.* Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Band 4. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Kay ACHMETLI, Kassel, Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster, André KRUG, Münster

Wirkungen der Behandlung von multiplen mathematischen Lösungswegen auf Leistungen und Selbstregulation von Lernenden

Im DFG-Projekt MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht) wird die Entwicklung von multiplen Lösungen bei der Bearbeitung von realitätsbezogenen Aufgaben untersucht. Im vorliegenden Beitrag berichten wir über den Ablauf und erste Ergebnisse einer quasi-experimentellen Feldstudie, in der die Wirkungen von multiplen Lösungen auf Leistungen und kognitive, strategische sowie motivational-affektive Merkmale untersucht wird. In der aktuellen Phase des Projekts (zur ersten Phase siehe Schukajlow & Krug, in press) werden die multiplen Lösungen untersucht, die durch die Verwendung verschiedener mathematischer Verfahren beim Modellieren entwickelt werden können.

Multiple Lösungen, Lernen und Leistungen

Es gibt einige theoriegeleitete Vermutungen, die für die Behandlungen von multiplen Lösungen sprechen. Es wird beispielsweise davon ausgegangen, dass die Entwicklung multipler Lösungen zu einer Vertiefung der Einsicht in die Struktur des Lerngegenstands führt und den Aufbau eines intelligenten, verstehenden Wissens (Leikin & Levav-Waynberg, 2007).

Neben diesen theoriegeleiteten Vermutungen weisen empirische Ergebnisse experimenteller Studien auf Vorteile von Lernumgebungen, in denen mehrere Lösungswege zu einer innermathematischen Aufgabe behandelt und gegenübergestellt werden, im Vergleich zu Lernsettings, in denen die jeweilige Lösungsmethode nach einander und an verschiedenen, innermathematischen Aufgaben behandelt wird (Große & Renkl, 2006; Rittle-Johnson & Star, 2007).

Im Inhaltsbereich „lineare Funktionen“ lassen sich nach Krämer, Schukajlow, & Blum (2012) fünf Lösungswege unterscheiden. Zwei dieser Lösungswege werden in MultiMa näher erforscht: erstens, ein numerischer Lösungsweg durch das Erstellen einer Zuordnungstabelle und zweitens, ein inhaltlicher Lösungsweg mittels Differenzenbildung.

Multiple Lösungen und Selbstregulation

Zimmerman (2000) beschreibt vier Entwicklungsniveaus des Erwerbs selbstregulativer Fertigkeiten, die sich im Ausmaß der Abhängigkeit des

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 97–100). Münster: WTM-Verlag

Lernenden vom sozialen Modell unterscheiden, und auf der höchsten Stufe eine Flexibilisierung der erworbenen Fertigkeiten steht. Eine Thematisierung mehrerer Lösungswege kann Lernenden helfen, Methoden flexibler und effektiver einzusetzen (Große & Renkl, 2006), wobei Flexibilität und Adaptivität wichtige Komponenten selbstregulativer Fertigkeiten sind. Schüler zu veranlassen, multiple mathematische Lösungswege zu entwickeln, kann deren Flexibilität und Adaptivität verbessern (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009) und dadurch ihre Selbstregulation steigern.

Der Einfluss der Entwicklung multipler Lösungen beim Lösen realitätsbezogener Aufgaben mit fehlenden Informationen auf die Selbstregulation von Schülern wurde bereits untersucht (Schukajlow & Krug, 2012). Die Ergebnisse zeigen, dass unter Kontrolle des Vortests, Schüler, die multiple Lösungen entwickeln, im Posttest von einer signifikant höheren Selbstregulation berichten, als Schüler die nur eine Lösung entwickeln mussten.

Hypothesen

- Die Entwicklung multipler mathematischer Lösungswege hat einen positiven Einfluss auf die Leistungen der Schüler.
- Schüler, die multiple mathematische Lösungswege entwickeln, berichten von höherer Selbstregulation, als Schüler, die nur einen Lösungsweg entwickeln. Es gibt keinen Unterschied in der Selbstregulation, wenn nur ein Lösungsweg entwickelt wird.

Methode

Insgesamt haben vier Schulen mit jeweils drei 9. Klassen (N=307) an der Untersuchung teilgenommen. Jede Klasse wurde geschlechts- und leistungsverhältnishomogen in zwei Gruppen aufgeteilt und in verschiedenen Bedingungen unterrichtet. In den insgesamt drei Bedingungen wurde auf der Basis des empirisch erprobten, selbständigkeitsstimulierenden „operativ-strategischen" unterrichtet. In einer Bedingung (MSM) haben Schüler zu realitätsbezogenen Aufgaben jeweils einen inhaltlichen und einen numerischen Lösungsweg entwickelt. In den beiden anderen Bedingungen (OSM1 und OSM2) wurden den Lernenden – bis auf eine zusätzliche Aufgabe – die gleichen Aufgaben vorgelegt, allerdings sollte jeweils nur ein Lösungsweg entwickeln werden (in OSM1 den numerischen und in OSM2 den inhaltlichen Lösungsweg). Es wurden vier Unterrichtsstunden gegeben, die von jeweils einem 90-minütigen Vor- bzw. Nachtest umrahmt waren. Der Unterricht wurde von sechs erfahrenen Lehrkräften erteilt, die vor der Unterrichtseinheit geschult wurden. Jede Lehrkraft hat die gleiche Anzahl von MSM-, OSM1- und OSM2-Bedingungen an einer Schule unterrichtet, so dass der Einfluss der Lehrerpersönlichkeit in allen Bedingungen identisch war.

Der Vor- und Nachtest wurde dreidimensional operationalisiert. Die erste und zweite Dimension enthalten Items zum prozeduralen Wissen, wobei die Items in der ersten Dimension speziell das prozedurale Wissen zu den Teilkompetenzen „Mathematisieren und Interpretieren“ und in der zweiten das prozedurale Wissen zum Modellieren allgemein fokussieren. Die dritte Dimension umfasst Items zum konzeptuellen Wissen (zum Zusammenhang von prozeduralem und konzeptuellen Wissen siehe Krug & Schukajlow, 2013). Sämtliche Items wurden dichotom kodiert. Die Skala zur Selbstregulation beinhaltet sechs Items (adaptiert von Pekrun et al., 2007) und wird mit Hilfe einer 5-stufigen Likert-Skala erfasst. Die Reliabilitäten des Leistungstests und der Befragungen lagen im befriedigenden bis guten Bereich.

Erste Ergebnisse und Zusammenfassung

Zur Treatmentkontrolle haben zwei unabhängige Rater die Anzahl der entwickelten Unterrichtslösungen mit sehr guter Übereinstimmung kodiert. Es zeigt sich, dass in der MSM-Bedingung im Durchschnitt fast alle Schüler zwei oder mehr Lösungswege erstellt haben, während in den OSM-Bedingungen nur selten mehr als ein Lösungsweg erstellt wurde.

Die Analyse der Schülerlösungen ergibt insgesamt – so die ersten Ergebnisse auf Basis der dichotomen Kodierung – ein differenziertes Bild. In der ersten Dimension ist die Leistungsentwicklung vom Vor- zum Nachtest der Schüler der MSM- und OSM1-Bedingung signifikant höher als die der OSM2-Bedingung. Für die zweite Dimension kann man festhalten, dass es für alle Bedingungen signifikant positive Entwicklung von Vor- zu Nachtest, allerdings keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen gibt. Positive Tendenzen für die MSM- und OSM2-Bedingung gegenüber der OSM1-Bedingung zeigen sich in der Dimension des konzeptuellen Wissens, auch wenn diese Tendenzen nicht signifikant sind.

Zwischen den Untersuchungsbedingungen lassen sich keine Unterschiede in der Selbstregulation beobachten. Unter Kontrolle des Vortests berichten Lernende im Nachtest in der MSM-Bedingung von ähnlich hoher Selbstregulation, wie Lernende der OSM-Bedingungen. Zwischen beiden OSM-Bedingungen gibt es, wie vermutet, keine signifikanten Unterschiede in der Selbstregulation.

Zusammenfasst lässt sich festhalten, dass die Bedingung, in der die Lernenden aufgefordert werden, mehrere Lösungswege zu entwickeln, bei den Leistungen in einer Dimension signifikant und in einer weiteren tendenziell besser abschneidet. Im Bereich des prozeduralen Wissens zum Modellieren gibt es zwar keine Unterschiede, aber insgesamt sehr positive Entwicklungen aller Bedingungen. Die aufgestellte Hypothese, dass die Entwicklung multipler mathematischer Lösungswege einen positiven Einfluss auf die Leistungen der Schüler hat, kann somit teilweise bestätigt werden. Ebenfalls teilweise zu bestätigen ist die Hypothese bezüglich der Selbstregulation. Die Anzahl und die Art der entwickelten Lösungen haben keinen Einfluss auf die Selbstregulation.

Literatur

Große, C. S., & Renkl, A. (2006). Effects of multiple solution methods in mathematics learning. *Learning and Instruction*, (16), 122–138.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *41*(5), 535–540.

Krämer, J., Schukajlow, S., & Blum, W. (2012). Bearbeitungsmuster von Schülern bei der Lösung von Modellierungsaufgaben zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen. *Mathematica Didactica*, *35*, 50–72.

Krug, A., & Schukajlow, S. (2013). Prozedurales und konzeptuelles Wissen zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen und multiple mathematische Lösungswege. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (pp. 568–571). Münster: WTM Verlag.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 349–371.

Pekrun, R., Vom Hofe, R., Blum, W., Frenzel, A. C., Goetz, T., & Wartha, S. (2007). Development of Mathematical Competencies in Adolescence: The PALMA Longitudinal Study. In M. Prenzel (Ed.), *Studies on the educational quality of schools. The final report on the DFG Priority Programme.* (pp. 17–37). Münster, Germany: Waxmann.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?: An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, *99*(3), 561–574.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2012). Effects of treating multiple solutions on students' self-regulation, self-efficacy and value. In *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 59–66). Taipei, Taiwan: PME.

Schukajlow, S., & Krug, A. (in press). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*,

Zimmerman, B. (2000). Attaining self-regulation. A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13–39). San Diego: Academic Press.

Natascha ALBERSMANN, Katrin ROLKA, Wuppertal

Maßeinheiten im bilingualen Mathematikunterricht

Bilingualer Unterricht hat in Deutschland eine langjährige Tradition. Tatsächlich aber findet in der Literatur und auch bei der konkreten Umsetzung auf Schulebene Mathematik als bilinguales Sachfach oft keine Berücksichtigung. Der Mathematikunterricht bietet allerdings durchaus Möglichkeiten, sowohl sprachliche Anlässe als auch interkulturelle Bezüge zu integrieren. In diesem Beitrag wird eine Unterrichtssequenz vorgestellt, in der Schülerinnen und Schüler einer 8. Klasse eine Urlaubsreise in die USA planen. Dabei spielen unter anderem die unterschiedlichen Maßsysteme in Deutschland und den USA eine Rolle.

Bedenken und Möglichkeiten bei der Durchführung von bilingualem Mathematikunterricht

Vielfach wird Mathematik als nicht geeignet für den bilingualen Unterricht angesehen. Als Argumente werden in diesem Zusammenhang häufig fehlende Möglichkeiten für sprachliche Anlässe sowie für interkulturelles Lernen angeführt (Rolka, 2012). Es gibt zahlreiche Publikationen in der mathematikdidaktischen Forschung, die dies widerlegen, und mittlerweile gibt es auch Publikationen, die diese Ideen für den bilingualen Mathematikunterricht konkretisieren (Rolka, 2013; Szücs, 2011). Darüber hinaus spielt eine Sorge, die von Eltern sowie Schülerinnen und Schülern, aber auch Lehrkräften geäußert wird, eine Rolle: Die Einbindung einer Fremdsprache in den Mathematikunterricht – der an sich schon schwierig ist – bedeutet eine zusätzliche Hürde für das Verständnis von Mathematik (Lipski-Buchholz, 2011). Diesem Einwand steht jedoch entgegen, dass sich Verständnisprobleme in einer Fremdsprache nicht so einfach überspielen lassen. Vielmehr regt die Fremdsprache die Schülerinnen und Schüler dazu an, die Sachverhalte einfach und klar darzulegen. Bilingualer Mathematikunterricht kann somit einen Beitrag zu einem vertiefenden Begriffsverständnis leisten (Fahse, 2000; Schubnel, 2009) und zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit den Lerninhalten führen (Stachelberger, 2011).

Schließlich sind noch positive Rückmeldungen der beteiligten Schülerinnen und Schüler aus vorherigen Unterrichtsprojekten zu erwähnen (Rolka, 2013; Schmerbeck & Rolka, 2011), wobei vereinzelt auch ein Zuwachs der Lernbereitschaft, insbesondere bei Schülerinnen, nachgewiesen werden konnte (Prüfer, 2011).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 101–104). Münster: WTM-Verlag

Das Unterrichtsprojekt „A roadtrip through California“

Das im Folgenden vorgestellte „Maths-English-Project“ wurde mit 24 Gymnasialschülerinnen und -schülern einer 8. Klasse durchgeführt. Durch die Zusammenarbeit der Mathematik- und Englischlehrkräfte stand für das Projekt ein Zeitraum von insgesamt vier Unterrichtsstunden zur Verfügung.

Im Mittelpunkt des Projekts steht die Planung eines Roadtrips durch den US-Bundesstaat Kalifornien. Da die USA im Gegensatz zu Deutschland das imperiale und nicht das metrische Maßsystem nutzen, spielen bei einem solchen Roadtrip ungewohnte Maßeinheiten eine Rolle, wie z.B. Fahrenheit für Temperaturen oder „miles per hour (mph)“ für Geschwindigkeiten. Diese Besonderheit ist – in anderer Form – auch in weiteren Unterrichtsvorschlägen aufgegriffen worden (z.B. Szücs, 2011). In unserem Projekt ist es die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler, die Planung des Roadtrips zu unterstützen. In Vierergruppen arbeiten sie an einer der folgenden drei Aufgabenstellungen, die durch relevantes Informations- und Bildmaterial ergänzt werden:

Every pair of socks counts... Think about packing your bag. During the roadtrip, there will be big temperature differences, for example between the cities on the coast like Los Angeles and the area near Lake Tahoe. Develop a „temperature converter“ to quickly check what to wear in which area.	Every speeding ticket hurts... Peter´s uncle, who imported a VW minibus from Germany, lives in Los Angeles. We can use the minibus but have to be careful: The speedometer shows km/h (kilometer per hour), but signs in the USA show mph (miles per hour)! Develop a „speed converter“ to quickly check whether you risk a speeding ticket or not.	Every gas station matters... During the roadtrip we will often need to stop at a gas station. In less populated areas the number of gas stations is quite low. The gas consumption is given in l/100km (liter per 100 kilometers), but displays in gas stations only show gallons. Develop a “gas consumption converter“ to quickly check how far you get with the gas from a gas station or still left in the tank.

Create a poster where you also point out the mathematics behind your converter.

Wie den Aufgabenstellungen zu entnehmen ist, geht es in diesem Projekt im Kern nicht darum, einzelne Umrechnungen zwischen dem metrischen und dem imperialen Maßsystem durchzuführen, sondern vielmehr einen Maßeinheitenumrechner zu entwickeln. Inhaltlich ist das Projekt somit im Bereich der linearen Funktionen anzusiedeln, wenngleich die Herangehensweise und damit auch die Darstellung des Maßeinheitenumrechners offen gelassen werden.

Reflexionsfragen zur Verwendung einer Fremdsprache im Mathematikunterricht

Um besser zu verstehen, wie die beteiligten Schülerinnen und Schüler die Verwendung einer Fremdsprache im Mathematikunterricht erleben, beantworteten sie am Ende des Projekts folgende Reflexionsfragen:

1. How do you like mathematics lessons more? In German or in English? Why?
2. How do you like English lessons more? With or without mathematics? Why?

Bei den Antworten auf die erste Reflexionsfrage gibt es sechs Schülerinnen und Schüler, die sich nicht entscheiden und beiden Unterrichtsformen positive Aspekte zuschreiben. Vier Schülerinnen und Schüler bevorzugen Mathematik auf Englisch, da sie z.B. das Unterrichtsfach Englisch gerne mögen, bessere Englischkenntnisse erlangen wollen, dabei aber auch den Wert, Mathematik auf Englisch zu betreiben, herausstellen:

> I like mathematics in English more, because you can learn 2 things at the same time, an we can learn to make math in English. (Schüler 19)

Insgesamt 14 Schülerinnen und Schüler ziehen einen Mathematikunterricht auf Deutsch vor. Sprachbarrieren können zu Verständnisbarrieren führen, die - wie bereits oben angesprochen - insbesondere bei komplexen mathematischen Inhalten für Schülerinnen und Schüler, eine Rolle spielen:

> I like mathematics in German more because if you learn about a difficult maths theme in English it is difficult to understand everything – and understanding everything is very important for maths. But if you do easy things I like maths in English, too. (Schülerin 20)

Allerdings bewerten viele Schülerinnen und Schüler, die explizit den Mathematikunterricht auf Deutsch bevorzugen, bilinguale Projekte wie das „Maths-English-Project“ als durchaus positiv:

> I like mathematics more in German because I like maths and English not so. And Maths in German is easyer. But the Projekt was good! And funny. (Schülerin 24)

Weiterhin wird an einigen Stellen der interkulturelle Aspekt des Kontextes „A roadtrip through California“ explizit als nutzbringend genannt:

> [...] it could be a good exercise for preparing an exchange with the USA. (Schüler 5)

In den Schüleraussagen zur zweiten Reflexionsfrage befürworten zehn Schülerinnen und Schüler die Einbindung von mathematischen Inhalten in den Englischunterricht:

> I like English more with mathematics because we can‘t than do so much grammatik. And it‘s make more fun. And I think it‘s more parctical to learn two things at the same time. (Schülerin 17)

Die Mehrzahl der beteiligten Schülerinnen und Schüler aber zieht einen Englischunterricht ohne Mathematik vor. Gründe dafür sind z.B. die Bevorzugung des Faches Englisch vor Mathematik:

> I like English more without mathematics because I don‘t like mathematics so. I like to speak English freely. But I think mathematics are cooler in english. (Schülerin 9)

Gleichsam wird an dieser Stelle deutlich, dass die Integration der englischen Sprache in den Mathematikunterricht eine Wertsteigerung des Faches Mathematik bedeuten kann.

Fazit

In dem hier vorgestellten Unterrichtsprojekt „A roadtrip through California“ hat sich der projektartige Einsatz einer Fremdsprache im Mathematikunterricht als positiv und chancenreich herausgestellt. Dies wird nicht nur durch die Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler bestätigt, sondern ebenso von der beteiligten Englischlehrerin betont:

> [...] I had the impression that pupils who ususally have some difficulties in English were motivated by the mathematical context and thereby improved their use of English. All in all, the pupils seemed highly motivated to use English in a mathematical context and vice versa.

Dem auch von den beteiligten Schülerinnen und Schüler vorgebrachten Einwand, dass Sprachbarrieren zu Verständnisbarrieren führen können, kann projektbezogen durch die Bereitstellung themenspezifischer sprachlicher Hilfestellungen und auf lange Sicht durch den Aufbau eines mathematischen Fachvokabulars entgegen gewirkt werden. In diesem Zusammenhang ist auch die Untersuchung der Frage von Bedeutung, welchen Einfluss die Einbindung einer Fremdsprache in den Mathematikunterricht auf das mathematische Lernen und Verständnis im Genaueren hat.

Literaturverzeichnis

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann per E-Mail angefordert werden: albersmann@math.uni-wuppertal.de

Gabriella AMBRUS, Budapest

Varianten von Modellierungsaufgaben für verschiedene Altersgruppen

Aufgabenvariationen bieten eine gute Möglichkeit nicht nur interessanten Fragen bezüglich der „Originalaufgabe“ nachzugehen, sondern auch dem jeweiligen Thema, dem aktuellen Lerninhalt und der jeweiligen Schülergruppe angemessene Aufgaben zu entwickeln. Variationen zu Modellierungsaufgaben können dabei auch Ideen geben neue Modellierungsaufgaben zu „produzieren“.

Aus herkömmlicher Aufgabe können Modellierungsaufgaben formuliert werden, z.B. durch Verallgemeinern (Weglassen von Bedingungen), Kontext ändern, interessant machen, Kritisieren, Variation variieren usw.. Aber es ist auch möglich *aus einer Modellierungsaufgabe* eine weitere Modellierungsaufgabe zu erstellen, z. B. durch Analogisieren, Umorientieren (z.B. aus anderem Standpunkt aus zu betrachten), Veränderung des Kontextes, Anschluss einer Frage, Aktualisieren usw.. Für diese und weitere Typen siehe auch Schupp, 2002. Die Variationen können für dieselbe Altersgruppe - z.B. durch Veränderung des Textes entsteht aus einer Schulbuchaufgabe eine Modellierungsaufgabe,- oder für eine andere Altersgruppe z.B. durch Variation der Komplexität, durch Veränderung des mathematischen Inhaltes erstellt werden. An zwei konkreten Beispielen wird gezeigt, wie diese Variationen aussehen können und wie die so erhaltenen Modellierungsaufgaben auch noch zu relevanten didaktischen Forschungen benützt werden können. Modellierungsaufgaben bedeuten Aufgaben, die mit dem Modellierungskreislauf (Blum und Leiβ, 2006)[1] gelöst werden können.

1. Erster Ausgangspunkt - märchenhafte Text-Variationen für Grundschulkinder

Märchenhafte Situationen können als „Realität des Kinderlebens” (Freudenthal, 1984) aufgefasst werden und wichtig ist anzumerken, dass Situationen aus dem Alltag der Kinder (reale Situationen) und märchenhafte Situationen „fictious real situation” die mathematische Kreativität entwickeln können (D’Ambrosio, 2009).

Die folgende Aufgabe kann schon in den Klassen 3 und 4 gelöst werden.

[1] Blum, W./Leiß, D. (2006) Blum, W.- Leiß, D.: „Filling up”- The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. I.: Bosch, M. (Ed.) CERME-4 –Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Guixol (2006)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 105–108). Münster: WTM-Verlag

<u>Kleider der Königin</u>: Seit die junge Königin in das Schloss eingezogen ist, hat sie sich jede Woche ein neues Kleid nähen lassen. Seit wieviel Tagen wohnt sie im Schloss, wenn sie schon 35 neue Kleider hat?

Bedingungen und mögliche Lösung: Nehmen wir an, dass sie immer am selben Tag ihr neues Kleid bekommen hat, das erste sofort nach ihrer Ankunft. So ergibt sich, dass sie mindestens seit 238+1=239 Tagen und höchstens seit 239+6=245 Tagen im Schloss lebt.

Die *Kleider der Königin-Aufgabe* wurde mit Grundschulkindern (Jahrgang 4, 75 deutsche Kinder, - Jahrgang 3, 35 ungarische Kinder und Jahrgang 4, 75 ungarische Kinder) erprobt. Die Kinder hatten keine Vorerfahrungen mit Modellierungsaufgaben. Schwerpunkt der Untersuchung war: *Inwieweit können Schüler und Schülerinnen ohne Hilfe der Lehrer mehrere Lösungen finden und damit die Situation offen betrachten?*Es gab nur 9 Lösungen, bei denen der Gedanke über mehrere mögliche Resultate, - also nicht nur 35x7= 245 -, erschien. Es stellte sich auch heraus, dass Textverstehen ein Problem war, überdies hatten die Kinder in den Jahrgängen 3 und 4 zum Teil noch Schwierigkeiten mit dem Ausrechnen von 35x7. Bei den Lösungen blieben Erklärungen oft absolut weg.

Einige Variationen (Weiterfragen) der Aufgabe für die gleiche Altersgruppe: 1. Gib weitere mögliche Bedingungen an und berechne die Anzahl der Tage in diesen Fällen! 2. Halte nach solchen Bedingungen Ausschau, unter denen nur eine Zahl das Resultat ist! 3. Seit wie vielen Monaten wohnt die Königin im Schloss? (Mindestens seit 9 Monaten)

Variationsbeispiel(Textänderung) für höhere Klassen-wo eine märchenhafte Situation eher als langweilig erscheint- mit dem gleichen mathematischen Inhalt- *<u>Taschengeld</u>: Seit Pisti und seine Familie in eine neue Wohnung eingezogen sind, bekommt er wöchentlich sein Taschengeld, 1000 Forint, und er legt das seitdem immer beiseite. Seit wieviel Tagen lebt er dort, wenn er schon so 35000 Forint gesammelt hat?*

Nicht nur die Aufgabenstellung, sondern auch die möglichen Lösungsstrategien ändern sich in einer höheren Klassenstufe. Ab der Klasse 7-8 werden zum Beispiel die Bedingungen mehr systematisch angegeben und diese ausführlicher z.B. tabellarisch bearbeitet. Eine systematische Angabe der Bedingungen mit Lösung kann die Folgende sein: **A**. Er bekommt immer am selben Tag Taschengeld und er weiß, an welchem Wochentag sie in die neue Wohnung eingezogen sind. So zum Beispiel, wenn am Montag sie eingezogen sind und er immer am Montag Taschengeld bekommt, erhalten wir die schon bekannte Lösung: Mindestens 239 Tage und höchstens 245 Tage. **B.** Er bekommt immer am selben Tag Taschengeld und er weiß nicht, an welchem Wochentag sie in die neue Wohnung eingezogen sind. So ergibt sich die Lösung: Mindestens 239 Tage und höchstens 251 Tage. **C**. Er weiß, an welchem Wochentag sie eingezogen sind und er bekommt Taschengeld an einem beliebigen Tag der Woche. So ergibt sich die Lösung: Mindestens 239 Tage und höchstens 245 Tage. **D.** Er weiß nicht, an welchem Wochentag sie eingezogen sind und er bekommt Taschengeld an einem beliebigen Tag der Woche. So ergibt sich die Lösung: Mindestens 233 Tage und höchstens 251Tage.

Die *Taschengeld-Aufgabe* wurde auch erprobt, unter anderem mit ungarischen Schülern und Schülerinnen (Teilnehmer an einer Veranstaltung an der Eötvös-Loránd-Universität, Jahrgänge 10-12, 18 Jugendlichen), mit Schülern und Schülerinnen aus einem Gymnasium in Budapest (Jahrgänge 10, 11, 37 Jugendlichen) - insgesamt also mit 45 Schülern und Schülerinnen aus Mittelschulen und überdies mit Studenten (Biologie BSc, 50 Jugendlichen 1. Semester). Auch hier lag der Schwerpunkt an der Frage: *Wie gehen die Probanden mit der offenen Situation um?*Unter den Schülern gab es 12, bei denen die Idee von mehreren möglichen Resultaten erschien, bei den Biologiestudenten betrug diese Anzahl 10. Aus den Resultaten sind weitgehende Schlüsse nicht zu ziehen, aber die Ergebnisse deuten darauf hin, dass eine gezieltere Erprobung mit mehr Teilnehmenden zu interessanten Ergebnissen führen könnte.

2. Zweiter Ausgangspunkt- Variationen für verschiedene höhere Jahrgänge

Es ist bekannt, dass aus einer Situation mehrere Aufgaben formuliert werden können. Hier werden aus einer Situation - Olympisches Stadion, 2012 - drei Varianten zu den Themen: Abschätzungen zum Sprintlauf und Anzahl der Zuschauer angegeben. Die Fragestellung (bezüglich des mathematischen Inhalts und der Komplexität) änderte sich nach Altersgruppen (Jahrgänge 7-8, 9-10, 11). Die Aufgaben wurden im Herbst 2012 mit 124 Schülern und Schülerinnen aus den Klassenstufen 7., 8., 9., 10und 11. und in jeder Klassenstufe sowohl in Grund- als auch in Leistungskursklassen (in Mathematik) erprobt, die keine Vorerfahrungen mit Modellierungsaufgaben hatten. Schwerpunkt war: *Wie viele (und welche) Modellierungsschritte wurden von den Schülern (instinktiv) durchgeführt, da sie den Modellierungsprozess nicht kennen.* Nach dem Modellierungskreislauf (Blum und Leiβ, 2006) wurden folgende vier Schritte betrachtet: 1. Übersetzung des realen Problems in mathematisches Problem 2. Lösen des mathematischen Problems 3. Übersetzung des mathematischen Resultats in reales Resultat 4. Die Bewertung des realen Resultats. Aus den Resultaten gab es keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Anzahl der verwendeten Modellierungsschritte und der Altersgruppe und wie erwartet, in den Leistungskursgruppen haben die Schüler im Allgemeinen mehr Schritte durchgeführt. Dieses letzte Ergebnis führte zu einer anderen Frage: *Wie arbeiten eigentlich leistungsstarke Schüler und Schülerinnen mit Modellierungsaufgaben in der Mathematik?*

Für die Betrachtung dieser Frage wurde die vorige Stadionaufgabe für die Klassenstufe 9/10 verwendet, und Lösungen von vier Schülern (ohne Vorerfahrungen mit Modellierungsaufgaben) aufgenommen. Sie wurden gebeten ihre Gedanken laut auszusprechen, während sie am Blatt arbeiteten. Schwerpunkt: *Welche Strategien sind bekannt und werden bei der Lösung benutzt?* Die Methode und die Strategien wurden aufgrund der "selbstberichteten Strategienutzung" (Schukajlow/Leiss, 2011) festgelegt. Weitere Informationen über die Untersuchung (Ambrus, 2014). Aus den Ergebnissen stellte sich heraus, dass diese Schüler relativ viele solche Strategien kennen, die bei der Lösung dieser Aufgabe nützlich sein können, verwendet wurden aber beträchtlich weniger aus diesen. Drei von ihnen fühlten sich während der Lösung unsicher, da diese so „ungewöhnlich" war und sie bevorzugten eher Schätzungen ohne mathematische Begründung.

3. Zusammenfassend

Das Erstellen von Varianten für Modellierungsaufgaben kann verschiedene sogar gleichzeitig mehrere Ziele haben. Es ist eine mögliche Methode zur „Herstellung" von neuen Modellierungsaufgaben für verschiede Unterrichtsziele, wobei sich die Aufgabenkultur der Lehrer und der Schüler entwickelt und ist gleichzeitig kreativitäts- sowie flexibilitätsfördernd. Überdies bietet es gute Möglichkeit für die Untersuchung von verschiedenen Forschungsfragen.

Literatur

Ambrus, G. (2010). Mathematik im Alltag. In Lindmeier, A. & Ufer, St. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 129-132). Münster: WTM Verlag.

Ambrus, G. (2014). Problemsolving and Modelling-Traditions and Possibilities in the Hungarian Mathematics Education. In *Promath Tagungsband 2014* (in Vorbereitung)

D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical and Political Dimensions. In. *Journal of Mathematical Modelling and Application Vol. 1, No. 1,* 89-98.

Freudenthal, H. (1984). Wie alt ist der Kapitän? *Mathematik lehren, 5,* 38-39.

Schukajlow, S. & Leiß, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. *JMD, 32,* 53-77.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Berlin: Franzbecker Verlag.

Lucas AMIRAS, Weingarten

Montessori und die zeitgenössische Mathematikdidaktik

Nach einem kritischen Blick auf die Schwierigkeiten beim Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule werden grundsätzliche Aspekte der Montessori-Methode betrachtet und mit der Philosophie der modernen Mathematikdidaktik verglichen. Es folgen kritische Fragen zur Methode, die exemplarisch erörtert werden, bevor ein Plädoyer für einen Dialog gehalten wird.

Prolog zum Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule

Die heutige Praxis des Lehrens von Mathematik in der Schule weist unter anderem zwei problematische Aspekte auf:

- Es gibt immer noch eine erhebliche Diskrepanz zwischen der Lehrpraxis von Mathematik in der Schule und der zeitgenössischen Didaktik. Vor allem in Bezug auf Lehrmethoden, die mit allgemeinen Orientierungen der Mathematikdidaktik (etwa Handlungs-, Problem- und Schülerorientierung) zusammenhängen, aber auch im Hinblick auf die Stoffdidaktik gibt es hier große Defizite.
- Die Resultate der Lehre im Allgemeinen sind immer noch unbefriedigend, trotz der Feststellungen der PISA-Studien, die ständig Verbesserungen vermelden.

Die Montessori-Pädagogik findet in den letzten Jahren immer mehr Verbreitung, inzwischen gibt es sogar Montessori-Klassen an staatlichen Schulen und auch Schulen, die ihre Schüler in Montessori-Räumen innerhalb der Schule zeitweilig nach Montessori unterrichten. Die Frage, die sich mir dabei stellt ist, wie hier Mathematik unterrichtet wird und ob dieser Unterricht zeitgenössischen didaktischen Anforderungen genügt.

Orientierungen der Montessori -Pädagogik

Wichtige Aspekte der Montessori-Pädagogik sind:

- Was die Entwicklungspsychologie betrifft, die Existenz von „sensiblen Phasen“ in Bezug auf Lerngegenstände, aus welchen Forderungen für offene und passend vorbereitete Lernumgebungen abgeleitet werden.
- Die konsequente Orientierung auf die Entwicklung der Persönlichkeit des jeweiligen Kindes.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 109–112). Münster: WTM-Verlag

- Die Forderung nach Freiheit der Wahl der Themen und der Zugänge zum jeweiligen Lerngegenstand durch die Kinder.
- Die Orientierung an ästhetisch erfahrbaren Materialien und damit gestaltete, geordnete Lernumgebungen, die weitgehende Individualisierung ermöglichen.
- Die „Darbietung“ von Material mit der Absicht, den Kindern Material zur Erkundung und Entdeckung zur Verfügung zu stellen.
- Die Orientierung an der Wissenschaft und ihrer Geschichte (d.h. Wissenschaft als Kulturleistung), zumindest was die erklärten Absichten von Maria Montessori selbst betrifft.

Orientierungen der Mathematikdidaktik und Vergleich

Wichtige Merkmale der zeitgenössischen Didaktik, nicht nur in Bezug auf Mathematik, sind folgende:

- Konstruktivismus, was den aktiven Erwerb von Kompetenzen betrifft.
- Der soziale Charakter dieses Erwerbs.
- Die Handlungs-, Problem- und Schülerorientierung.
- Die Öffnung der Probleme, die von Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden sollen und strukturierte Lernumgebungen.

Vergleicht man nun die Orientierungen der Mathematikdidaktik mit denen der Montessori-Pädagogik, so kann man eine bemerkenswerte Deckung feststellen. Natürlich ist das eine erste Sicht dieser Beziehung, die eine vertiefte kritische Betrachtung verdient.

Die Montessori-Pädagogik scheint jedenfalls der Mathematik besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Maria Montessori (kurz: MM) selbst hat wohl große Anstrengungen unternommen, um ihre Bildungsidee (als Bildung der Persönlichkeit von Menschen im kulturellen Kontext) in Bezug auf die Mathematik zu verwirklichen. Zwei Bücher („Psychoarithmetik“ und „Psychogeometrie“) belegen die Bedeutung, die sie der Mathematik als Bildungsfach zugesprochen hat. Ich beziehe mich im Folgenden auf die „Psychogeometrie“ (vgl. dazu die Information in Winter 2012), wie auch auf das Lehrerhandbuch zur Geometrie (1996), das darauf basiert.

Die geometrische Stoffdidaktik Montessoris braucht aus meiner, natürlich noch nicht so umfangreichen, Sicht eine ernste Bemühung zur kritischen Erneuerung oder Aktualisierung. Es geht nicht nur um eine Ordnung des

Stoffes, sondern um grundsätzlichere methodische Aspekte, die an dieser Stelle nur ansatzweise angesprochen werden können.

Trotzdem, ich sehe hier keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Ich glaube sogar, dass MM aufgrund ihrer expliziten Wissenschaftsorientierung diese Bemühung zur Erneuerung begrüßen würde!

Konkrete Kritik (zwei Beispiele)

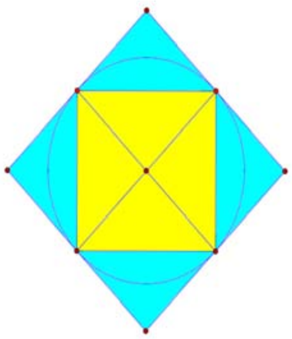
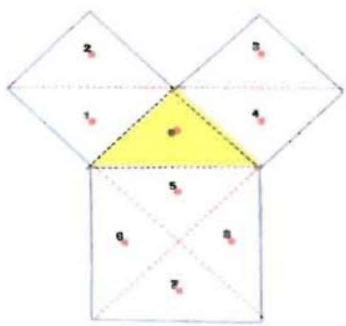
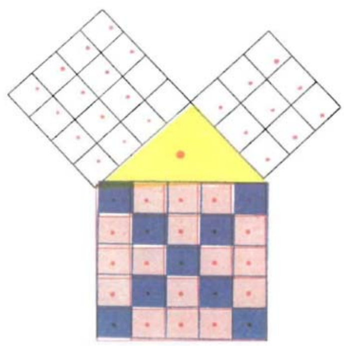
Meine Themenauswahl beschränkt sich hier auf das, was MM „äquivalente Figuren" nennt und ihre Behandlung des pythagoreischen Lehrsatzes.

Äquivalente Figuren

MM spricht in ihrem Buch „Psychogeometrie" von „äquivalenten Figuren" und meint damit zerlegungsgleiche ebene Figuren. Sie vergisst dabei, dass es auch ergänzungsgleiche Figuren in der Ebene gibt (beide Begriffe sind bei ebenen Figuren äquivalent). Der Satz des Pythagoras setzt beide Begriffe voraus, wenn man entsprechende Beweise zur Kenntnis nimmt. Der Satz setzt auch den Begriff des Flächeninhalts voraus, sonst kann er nicht in der üblichen Form $a^2+b^2=c^2$ formuliert werden.

Satz des Pythagoras

MM beginnt in ihrem Buch „Psychogeometrie" mit der Entdeckung des Spezialfalls für gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke, anhand der Beziehung von umbeschriebenem und einbeschriebenem Quadrat zu einem Kreis, gemäß der Figur links. (Figuren Mitte und Rechts: Montessori 2012)

Danach stellt MM die spezielle Form des Satzes von Pythagoras vor mit einer Figur (Mitte), die sie als „ersten Beweis" apostrophiert.

Der Übergang vom „Initial-Phänomen" zu dieser Figur wird nicht motiviert. Die darauf folgende „Darbietung" des bekannten Spezialfalles im „Dreieck 3,4,5" (Figur rechts), die den allgemeinen Satz vorbereiten soll, ist ebenso wenig von einer Problemstellung begleitet. In der Folge stellt Montessori den Beweis in der euklidischen Form vor. Diese Präsentation soll uns hier nicht weiter interessieren, obwohl MM sie mit Hilfe von vielen Zeichnungen begleitet.

Meine Kritik zu diesem Vorgehen lautet:

- Es wird hier kein Problem gestellt, von dem aus der Spezialfall des Satzes (für gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke) erschlossen werden kann. Die Argumentationsweise hin zur Verallgemeinerung erfolgt ohne einen roten Faden.
- Es ist überhaupt nicht verständlich, aus welchen (didaktisch vertretbaren) Gründen diese Phänomene Kindern unter 12 Jahren präsentiert werden sollen.

MM und die Montessori-Pädagogik sind wohl der Meinung, dass die Präsentation mathematischer Phänomene (aus dem traditionellen Curriculum wohlgemerkt) angezeigt ist als Angebot für eine eventuelle Sensibilität, die mit Interesse für den Lerngegenstand von Seiten des Kindes einhergeht. Mein Einwand ist jedoch, warum man auf Themen und Phänomene eingeht, die in Bezug auf das Alter der Kinder und vor allem im Hinblick auf ihre Einordnung in deren kognitiven Kontext nur vereinzelte „inselartige" Phänomene darstellen, d.h. solche, die nicht vielfältige Beziehungen zum mathematischen Wissen und Können der Kinder haben. Genau diese Einordnung ist gefordert, wenn Wissen und Können vernetzt werden sollen. Ähnliche Einwände lassen sich in Bezug auf andere Themen, wie die Winkelsumme im Dreieck oder den Umfangswinkelsatz, formulieren, die MM behandelt.

Plädoyer

Ich plädiere für eine kritische Beschäftigung mit den Methoden und Inhalten der Montessori-Pädagogik im Fach Mathematik, aus drei Gründen: Ihre Orientierungen und die der Fachdidaktik sind durchaus konform, ein Dialog erscheint hier besser als bei anderen reformpädagogischen Strömungen möglich. Außerdem ist, wie gesagt, die Montessori-Pädagogik inzwischen so weit verbreitet und in das staatliche Schulsystem eingezogen, so dass auch von daher die Pflege eines konstruktiven Dialogs im Interesse aller Schulbeteiligten dringend zu empfehlen ist.

Literatur

Montessori, M. (2012). *Psychogeometrie.* Freiburg: Herder.

Montessori-Vereinigung e.V. (Hrsg.). *Arbeitsbuch Geometrie* (1996).

Winter, M. (2012). Die "Psychogeometrie" Maria Montessoris - Impulse für den Unterricht? In Ludwig, M./Kleine, M. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, 941 – 944.

Daniela AßMUS, Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale, Frank FÖRSTER, Braunschweig

Analogieerkennung im Problemlöseprozess – ein Verlaufsmodell

Ein Blick in die Geschichte zeigt Analogiebildung als ganz wesentliche heuristische Strategie für die Entwicklung neuer Mathematik (Zimmermann, 2003), nach Pólya (1954) gab es vielleicht keine mathematische Entdeckung, bei der das Analogieprinzip keine Rolle gespielt hat. Dessen Bedeutung – auch für die Elementarmathematik – steht der damit verbundene hohe kognitive Anspruch gegenüber. Dass Analogieprozesse auch mathematisch begabten Grundschulkindern schwer fallen, zeigen beispielsweise Ergebnisse der von uns durchgeführten Video-Studie zum Analogen Denken (ViStAD, Aßmus & Förster, 2013a, 2013b), deren Hauptziel es ist, Fähigkeiten zum Konstruieren und Nutzen von Analogien beim mathematischen Problemlösen als potenzielles Begabungsmerkmal zu überprüfen. Dafür schien es hilfreich, ein Modell zur Verortung von Analogieprozessen im Problembearbeitungsverlauf zu entwickeln, wobei wir zum einen theoriebasiert vorgegangen sind und zum anderen qualitativ gewonnene Ergebnisse der Studie genutzt haben. Ein erster Entwurf soll im Folgenden vorgestellt werden.

Analogien im Problembearbeitungsprozess

Eine klassische Modellierung zum Problemlösen stammt von Pólya (1945), sie umfasst die Phasen (1) „Understanding the problem“, (2) „Devising a plan“, (3) „Carrying out the plan“ und (4) „Looking back“. Diese werden so oder in ähnlicher Form auch in anderen Verlaufsmodellen aufgegriffen (vgl. z. B. Rott, 2013). Bei Mason u. a. (1982) verschmelzen im Wesentlichen die Phasen (2) und (3) zu „Attack“, weil Planung und Umsetzung in der Regel eng miteinander verwoben sind. Gerade im Grundschulalter sind längere explizite Planungsphasen auch sicher kaum zu beobachten.
Phase (1) gilt u. a. aus Sicht der Denkpsychologie, der Expertiseforschung und der Mathematikdidaktik als besonders anspruchsvoll; gerade auch für das Grundschulalter. Aus einer integrativen Sicht – die Problemlösen und Modellieren miteinander verbindet – scheint es insbesondere auch im Hinblick auf den Forschungsfokus Analogieerkennung/-konstruktion (AE) und Analogienutzung (AN) vielversprechend, die Hauptaufgabe in der ersten Phase darin zu sehen, ein passendes (dynamisches) kognitives Modell der Problemsituation zu entwickeln und gegebenenfalls vorgegebene Fragen zu verstehen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 113–116). Münster: WTM-Verlag

Für die weitere Problembearbeitung scheint uns mit Blick auf Analogieprozesse entscheidend, ob dem Bearbeiter die Nutzung mathematischer Strukturen gelingt, oder ob er (zunächst oder ausschließlich) situationsgebunden vorgeht. Sich von der konkreten Situation zu lösen und auf mathematische Strukturen zu rekurrieren ist ein keineswegs selbstverständlicher (Gray, Pitta, & Tall, 1997), für Analogieprozesse jedoch wesentlicher Schritt.

Mit dem folgenden Modell sollen diese Akzentuierungen herausgearbeitet werden:

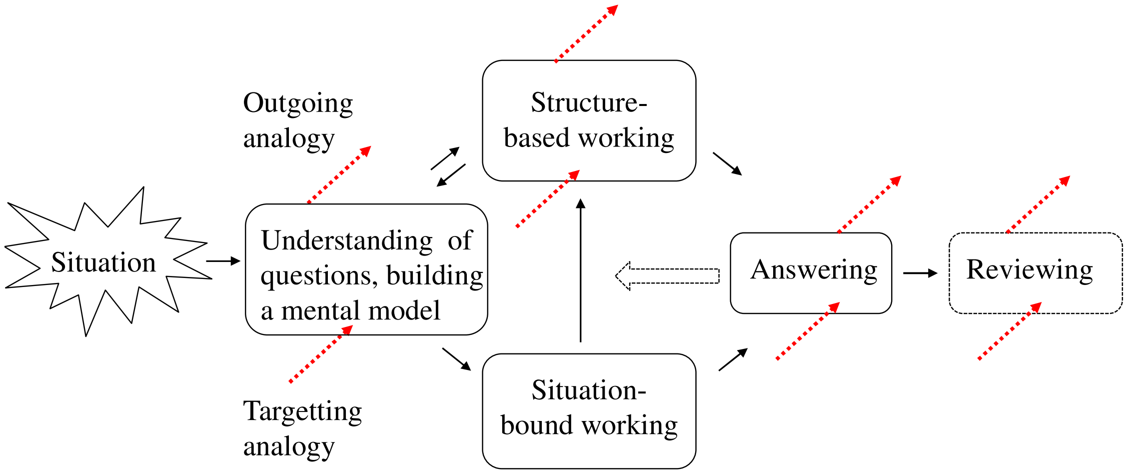


Abb. 1: Modellierung zur Analogiekonstruktion und –nutzung beim Problemlösen

Im Modell werden mit Hilfe der gestrichelten Pfeile zum einen mögliche Stellen für Analogieprozesse aufgezeigt, wobei bei der AN unterschieden wird, ob die aktuell bearbeitete Situation als Quellproblem dient und Vorstellungen, Vorgehensweisen oder Ergebnisse von dieser ausgehend auf eine andere Situation übertragen werden („outgoing analogy“) oder ob Erfahrungen aus einer bereits zuvor bekannten mathematischen Situation für die Bearbeitung der aktuellen (Ziel-) Situation genutzt werden („targetting analogy“). Die Phase „Reviewing“ ist im Modell durch einen punktierten Rahmen gekennzeichnet, weil sie bei eigenständigen Problembearbeitungsprozessen im Grundschulalter sicher selten beobachtbar ist, in dem von uns genutzten Untersuchungsdesign jedoch gegebenenfalls von außen initiiert wurde, um AE anzuregen.

Zum anderen sollen mit dem Modell notwendige Voraussetzungen für eine erfolgreiche AE verdeutlicht werden, die somit einen Teil des besonders hohen kognitiven Anspruchs dieser heuristischen Strategie begründen. So müssen vom Problembearbeiter zunächst die Fragestellung verstanden und ein passendes kognitives Modell der zu bearbeitenden Situation aufgebaut werden. Solange im Anschluss ausschließlich mit situativen Merkmalen und Elementen gearbeitet wird, ist höchstens die Konstruktion von Pseudo-Analogien möglich, die sich lediglich an der Situationsoberfläche – beispielsweise an gleichen Zahlen – orientieren. Gelingt es dem Bearbeiter dagegen, zur Situation passende mathematische Strukturen – also ein mathematisches Modell – zu konstruieren, wird auch eine Erkennung bzw. Konstruktion und Nutzung von strukturellen Analogien, d.h. von Entsprechungen in den Situationen zugrunde liegenden Tiefenstrukturen, möglich. Allerdings können ähnliche Oberflächenmerkmale, ähnliche Vorgehensweisen oder gleiche (Teil-)Ergebnisse auch Auslöser zur Erkennung von strukturellen Analogien sein, insbesondere in den Phasen „Answering" und „(initiated) Reviewing".

Wird tatsächlich eine Analogie genutzt, werden möglicherweise nicht alle Phasen des Modells in Abb. 1 durchlaufen, es könnten aber auch weitere Rücksprünge stattfinden. In diesem Sinne können diese Phasen als deskriptive Module aufgefasst werden, die sich für den jeweiligen Einzelfall sowohl in ihrer Art als auch in ihrer Reihenfolge spezifisch ausprägen.

Empirische Stützung des Modells

Zur empirischen Stützung des Modells dienten die im Rahmen von ViStAD erstellten halbstandardisierten Einzelinterviews. Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler (hauptsächlich Klasse 3 und 4) bearbeiteten jeweils nacheinander zwei zueinander analoge Problemstellungen (teilweise durch Störaufgaben unterbrochen) und wurden gebeten, dabei soweit möglich über ihr Vorgehen zu berichten (lautes Denken). Um Analogieprozesse zusätzlich anzuregen, wurden in den zu bearbeitenden Situationen dieselben Zahlen verwendet. Im Anschluss wurden die Schüler explizit zum Vergleich der Problemstellungen und Vorgehensweisen aufgefordert und nach Ähnlichkeiten und Unterschieden befragt, auch dann, wenn der Interviewer während der Problembearbeitungen keine AN erkennen konnte.

Erwartungsgemäß zeigten sich bei Kindern, die bei der Bearbeitung in der Situation verblieben, keine Analogieprozesse. Für alle anderen Phasen des Verlaufsmodells liefert die Studie geeignete Beispiele, wobei jedoch bei den AN bedingt durch das Studiendesign hauptsächlich „targetting analogies" zu beobachten waren. Auch ist anzumerken, dass AN in den Phasen „Answering" und „Reviewing" vor allem zur Korrektur abweichender Ergebnisse auftraten, ansonsten jedoch selten vorkamen, da die Problembearbeitung in diesen Phasen in der Regel bereits abgeschlossen ist.

Umgekehrt ließen sich alle durch uns rekonstruierbaren Analogiesierungsfälle in das Modell einordnen. Dabei wurden die meisten Fälle den Phasen „Building a mental model" und „Reviewing" zugeordnet, wobei sich problemspezifisch starke Unterschiede in den Verteilungen ergaben. Nur selten zeigten sich AE und AN im (beobachtbaren) Arbeitsprozess.

Fazit und Ausblick

Das hier beschriebene Verlaufsmodell eignet sich in vielfältiger Art und Weise zur Analyse von AE und AN im Problemlöseprozess. Zum einen lässt es sich über alle eingesetzten Problemstellungen hinweg als Analyseinstrument für o.g. Studie anwenden. Unterschiede hinsichtlich der Stelle der AE im Bearbeitungsprozess werden fass- und beschreibbar. Darüber hinaus lassen sich ausgehend von den Phasen des Modells spezifische förderliche und hinderliche Bedingungen zur AE und AN im Problemlöseprozess herausarbeiten. Solche Bedingungen wurden bereits teilweise publiziert (Aßmus & Förster, 2013b), weitere Analysen stehen noch aus. Entsprechendes Wissen zur AE und AN stellt unseres Erachtens eine wichtige Basis dar, um Problemlöseleistungen von Schülern adäquat einschätzen zu können.

Zum anderen ermöglicht das Modell auch eine genauere Einordnung anderer Untersuchungen zur AN beim Problemlösen. Dies schließt sowohl die Ausrichtung der Studien als auch die Einschätzung der Studienergebnisse ein. Studien lassen sich gezielt dahingehend vergleichen, welche Phasen des Modells in der Studie abgebildet und unter welchem Blickwinkel AE und AN betrachtet werden.

Literatur

Aßmus, D., & Förster, F. (2013a). ViStAD – Erste Ergebnisse einer Video-Studie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern. *mathematica didactica, 36*, 45–65.

Aßmus, D., & Förster, F. (2013b). ViStAD – Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 92–95). Münster: WTM.

Gray, E., Pitta, D., & Tall, D. (1997). The Nature of the Object as an Integral Component of Numerical Processes. In E. Pehkonen (Hrsg.), *Proceedings of the 21st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (S. 115–130). Lahti, Helsinki: University of Helsinki.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* London: Addison-Wesley.

Pólya, G. (1945): *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol I: Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen: Ergebnisse einer empirischen Studie.* Münster: WTM.

Zimmermann, B. (2003). On the genesis of mathematics and mathematical thinking - a network of motives and activities drawn from the history of mathematics. In L. Haapasalo & K. Sormunen (Hrsg.), *Towards Meaningful Mathematics and Science Education* (S. 29–47). Joensuu: University of Joensuu.

Sergey ATANASYAN, Moskau

The Conception of the development of Mathematical education in Russia

The president of Russia V. V. Putin on the day of his inauguration May 7, 2012, signed the number of decrees on the development of the social sphere in Russian Federation, including one on the preparation of the Conception of the development of Russian mathematical education. It was elaborated in 2012-2013 and approved in December, 2013 by the Government of Russian Federation. Here we discuss its basic positions.

Nowadays, developed in mathematics ans mastered by a person major concepts, definitions, statements, proofs, algorithms, measurements and models became universal, common cultural and significant tools. They can be applied far beyond limits of mathematical research. The global mathematical education including saturation of our environment and media space by fascinating images, ideas and historical examples of mathematics is required. In modern society each citizen must possess the necessary mathematical competence, and the formation of that competence should begin at early age. There are no children, "incapable to mathematics" – the teaching should be based on the identification of individual dynamic zones of development, maintenance children's self-confidence and their interest to mathematics and its applications to the real life.

Since the last decades, the area of presence of mathematical methods extended dramatically. It is connected with the rise of information (digital) civilization which becomes mathematical in more extent today. Material objects are more often projected to a digital form and analyzed in that form. Creation of means and instruments of information technologies is ultimayely a mathematical activity. Information (digital) civilization and the knowledge-based economy demand new types and levels of mathematical literacy, culture and competence.

What mathematics is necessary to what category of students? Today in Russian education, as well as in many other education systems, it is possible to distinguish the following categories of participants of educational process (indicating estimated percentages):

1 . Leaders: possibly less than 1%

2 . Promising ("good") 5% – 20%

3 . The mass – up to 80% or even more

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 117–120). Münster: WTM-Verlag

4 . Lagging behind – they are always distinct from the mass, and for this group the special strategy of teaching mathematics must be developed.

For example, in a regular secondary school it is possible to allocate the following categories of pupils:

1. Pupils who have shown outstanding achievements who on the achievements and can successfully continue their education at any university of the world.

2. Pupils with a constant eagerness to mathematics and adequate results in learning the subject.

3. Pupils having objective difficulties (connected with health, geographical access to education etc.) in attaining standard requirements.

4. "Ordinary" pupils representing the mass: condition of their mathematical competence matches the general condition of education and society.

5. Pupils really not matching any reasonable expected minimum, neither from the point of view of the motivation, nor from the point of view of participation in the process, nor from the point of view of achievments.

The Conception is addressed to each of these categories.

Besides the important distinction between categories of students, there is also a distinction in their vital interestd and goals. Education, on the one hand, must have featutres of universality, and on the other hand it should take into account this distinction. Today in Russian Federation it is admitted that such distinction arises in upper secondary school i.e. since 10th grade. For example, in case of mathematics the pupil learning in upper secondary school can learn an advanced course of mathematics of 6 hours a week and also obligatory elective courses in the amount of 2 hours per week.

Present approach of authorities in Russia consists in division of powers: decisions in the field of the higher education are made by federal authorities and in the field of the general education by municipal and regional authorities. It is offered, keeping on the regional and municipal authorities their responsibility in the field of mathematical education, to extend the responsibility of federal authorities. For example, in case of the general education all educational institutions receive standard per capita financing according to the number of pupils of each level. The federation government will incur the additional expenses supporting the education for leaders on the best world level, ensuring the effective realization of all extensions of the State Standards.

In the realization of educational programs of tertiary education, the essential role will belong to distance educational technologies. In such remote option the lecturer of a leading university delivers a course, advises instructots from other higher education institutions, and the instructors provide the quality of acquiring of subject matter by students of those institutions. The higher education institution can itself create and successfully realize a course of high level. Quality of the course and results of work of students can be seen in the information environment. Such course must receive federal financing if it obtains the formal approval by the mathematical community on federal level. Free supply of all demanfds of mathematical education in information sources (textbooks, books of problems) and tools (programs of visualization, the statistical analysis, computer algebra, etc.) must be offered, too. This is also on the responsibility of federal authorities (with competitive procedures, public control etc.).

Teachers of mathematics are the main link in the implementation of the Conception. Possibility of successful realization of the purposes atated in the Conception depends on this lonk. As well as in other cases, there is a number of fundamental questions, partially or completely absent in the Conception but worth mentioning. First, it is the dependence of the success of the Conception on the perspectives of Russia, and, in particular, on country's perspectives as modern hi-tech competitive superpower. The most serious strict state policy must be directed on this purpose. The second: the quality of teacher's work depends on her/his financial position and also on the prestigiousness of the profession, on the attitude towards it in society. Today the government started and successfully realizes the following purpose: the salary of the teacher should not be below the average salary in the region.

On the federal level, additional programs of distance professional education for teachers in which also university instructors can participate, must be organized.

Within these programs the following elements will be offered:

- permanent work of students at school (on the basis of federal financing);
- intensive course of the solution of problem solving (in elementary mathematics);
- the state final certification with participation of the university mathematical stuff and representatives of local governing bodies;

- the guaranteed teacher’s job from local educational governing bodies.

In such program can take part students not only of pedagogical universities, but also of technical and classical universities, in this case the participants learn also psychological and pedagogical components. Necessary element of this work is introduction of effective system of the certification based on the Professional standards for teachers. Basis The certification should be based on the expert evaluation of the work of the teacher, recorded in the information environment. Furthermore, solving elementary mathematical problems and reviewing pupils‘ works can be used.

As a result of the implementation of Conception, the following aims should be reached:

- The tendency of the last decades of decrease of the level of mathematical education should be be overcome, the leading position of Russian mathematical education in the world should be recaptured.
- The professional level of in-service and pre-service mathematics teachers should raise;
- Accessibility of mathematical education should increase
- The mathematical literacy of various categories of citizens according to public needs and individual requirements should increase;
- Leaders of mathematical education will get support: new institutes and individual teachers, new active and young leaders will emerge;
- Level of fundamental mathematical research will raise;
- Carrying out of applied mathematical research in industry will be provided with staffs of necessary competence;
- The public status of mathematics and interest to this science should increase.

During the implementation of the Conception, professional requirements to school teachers of mathematics will be strengthened, the best mathematical schools and teachers will receive the federal status, the number of mathematics teachers satisfying the professional standards will raise, the number of foreign authors and members of editorial boards, the international popularity and citation index of Russian mathematical journal will grow.

Ute BALTES, Christian RÜTTEN, Petra SCHERER, Stephanie WES-KAMP, Essen

Mathe-Spürnasen – Grundschulklassen experimentieren an der Universität

1. Konzeptionelle Überlegungen

Im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' werden Lernumgebungen entwickelt, die im Rahmen von Experimentiervormittagen an der Universität Duisburg-Essen für Schulklassen der Jahrgangsstufe 4 angeboten werden. Bzgl. der inhaltlichen Auswahl geht es um zentrale mathematische Inhalte, im Sinne von Kernideen, die als substanzielle Lernumgebungen aufbereitet werden und von den Schülerinnen und Schülern unter vielfältigen Perspektiven bearbeitet werden. Dabei geht es um unterschiedliche mathematische Perspektiven, aber auch um den Einbezug anderer Disziplinen unter fächerübergreifenden Aspekten.

Die Lernumgebungen sollen den Schülerinnen und Schülern ein hohes Maß an Eigenaktivitäten bieten und sie zum Probieren und Experimentieren anregen. Darüber hinaus sollen sie auch eine natürliche Differenzierung ermöglichen. Ein wesentliches Ziel ist dabei der Aufbau vernetzten Wissens durch eine aktive Wissenskonstruktion (vgl. z. B. Wittmann 1995). Auch in den Bildungsstandards wird als zentrales Anliegen ein vernetztes, kumulatives, anschlussfähiges und auf Verstehen ausgerichtetes Lernen formuliert, bei dem den allgemeinen mathematischen Kompetenzen im kognitiven und affektiven Bereich eine zentrale Rolle zukommt (vgl. Walther et al. 2008, 22). Betont wird einerseits das Vernetzen inhaltlicher und allgemeiner Kompetenzen, aber auch die Vernetzung der verschiedenen inhaltlichen Leitideen oder die Vernetzung zu außermathematischen Bereichen (Alltagserfahrungen, historische Genese; vgl. Winter 1995). Für die erfolgreiche Vernetzung der verschiedenen Kompetenzen wird u. a. die Konstruktion von gehaltvollen Lernumgebungen (in Abgrenzung zu isolierten Aufgaben) gesehen (vgl. z. B. Wollring & Rinkens 2008, 131 ff.).

Im Projekt wurden bislang für vier Themenbereiche Lernumgebungen entworfen und erprobt: Platonische Körper, Fibonacci-Folge, Pascal'sches Dreieck sowie Würfel. Letztere wird im Folgenden genauer diskutiert.

2. Lernumgebung ‚Würfel'

Der Würfel stellt im Mathematikunterricht der Grundschule das wichtigste Beispiel für einen geometrischen Körper dar: „Es gibt kaum einen geometrischen Körper, der so zahlreiche und unterschiedliche Möglichkeiten für

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 121–124). Münster: WTM-Verlag

geometrische Entdeckungen bietet“ (Schipper 2009, 262). Daher wird der Würfel in den Bildungsstandards sowohl im Zusammenhang mit den inhaltsbezogenen Kompetenzen ‚Raum und Form’ als auch ‚Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten’ erwähnt und entsprechende Aufgabenbeispiele angegeben. Hier zeigt sich bereits die Vielfalt an Aktivitäten, die der Würfel für den Unterricht auf unterschiedlichen Leistungsniveaus bietet. Unter anderem kann der Würfel dazu dienen, die geometrischen Eigenschaften von Körpern zu thematisieren und diese Eigenschaften mit anderen geometrischen Körpern oder Objekten der Alltagswelt zu vergleichen bzw. bestimmte Phänomene (z. B. in der Stochastik) mit diesen zu erklären.

In der Lernumgebung zum Würfel werden in einer Einführungseinheit zunächst die geometrischen Eigenschaften des Würfels erarbeitet bzw. entsprechendes Vorwissen aktiviert. In drei Vertiefungen forschen die Schülerinnen und Schüler arbeitsteilig in Kleingruppen zu Würfeltricks (vgl. Scherer & Wellensiek 2011), Würfelmehrlingen und deren Augensummen (vgl. Winter 2010) sowie zum Würfel als Zufallsgenerator. Die Einführung und die letztgenannte Vertiefung werden im Folgenden näher vorgestellt.

2.1. Einführung ‚Der Würfel und seine geometrischen Eigenschaften’

Die Einführungsphase dient der Aktivierung des Vorwissens bzgl. des Würfels als geometrisches Objekt bzw. der Thematisierung der geometrischen Eigenschaften des Würfels. Dabei wird ausgehend von würfelförmigen Objekten der Alltagswelt ein mathematisches Modell des Würfels entworfen und vertieft. Anschließend werden Objekte der Alltagserfahrung mit diesem Modell in Beziehung gesetzt, und die Schülerinnen und Schüler erkennen die Eigenschaften an unterschiedlichen Repräsentationen.

Zunächst werden den Lernenden verschiedene Würfel bzw. Bilder von Würfeln, auch Würfelabwicklungen (bzw. -netze) und Schrägbilder gezeigt, wodurch der Begriff ‚Würfel’ geschärft wird. Die einzelnen Objekte bzw. Bilder werden genauer auf die Eigenschaften hin untersucht. Die Lernenden erkennen, dass viele im Alltag als Würfel bezeichnete Objekte lediglich würfelförmig oder würfelähnlich aussehen und nicht in allen Eigenschaften dem idealen mathematischen Modell entsprechen.

Bei den Erprobungen hat sich gezeigt, dass die Begriffe ‚Fläche’, ‚Ecke’, ‚Kante’ vielen Schülerinnen und Schülern nicht präsent waren und es daher sinnvoll ist, diese zu wiederholen. Im Anschluss untersuchen die Schülerinnen und Schüler die Lage und die Repräsentation von Ecken, Kanten und Flächen im Vergleich von Abwicklungen und dreidimensionalem Objekt (vgl. Schipper 2009). Darüber hinaus werden an verschiedenen Schrägbildern die geometrischen Eigenschaften zugeordnet, und das Wechselspiel zwischen zweidimensionaler Darstellung und dreidimensionaler Wahrnehmung wird thematisiert.

Abschließend wird am Beispiel des Spielwürfels das Spannungsfeld zwischen näherungsweisem und exaktem mathematischen Modell in den Blick genommen: Der Spielwürfel stellt ein im Alltag verbreitetes als ‚Würfel' bezeichnetes Objekt dar (bzw. lässt sich der geometrische Begriff ‚Würfel' von dem alltagssprachlich gebräuchlichen Namen vom Spielwürfel ableiten). Auch wenn die Ecken des Würfels in der Regel abgerundet sind, besitzt er dennoch viele geometrische Eigenschaften des Hexaeders, die ihn auch als Zufallsgenerator besonders geeignet erscheinen lassen.

2.2. Vertiefung ‚Mit Schweinen würfeln'

Der Spielwürfel ist ein beliebtes Instrument für Erkundungen in der elementaren Stochastik. Im Rahmen dieser Vertiefung erkunden die Schülerinnen und Schüler die stochastische Relevanz der geometrischen Eigenschaften des Würfels. Dazu betrachten sie die historische Entwicklung von Würfeln mit Knochen zum sechsseitigen Spielwürfel. Anschließend experimentieren sie mit dem Würfel und einem alternativen Zufallsgerät und vergleichen diese.

In der Antike setzte sich das regelmäßige Hexaeder langsam als Spielwürfel durch und löste damit den Astragal (Sprunggelenksknochen von Schaf, Ziege oder Rind) als im Spielkontext genutztes Zufallsgerät ab. Im Gegensatz zum Hexaeder besitzen die einzelnen Ausgänge beim Astragal aufgrund einer unregelmäßigen geometrischen Form unterschiedliche Wahrscheinlichkeit.

Anstelle von Astragali, bei denen nur vier Ausgänge unterschieden werden können, vergleichen die Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Vertiefung ‚Würfelschweine' aus dem Spiel ‚Schweinerei' (engl. ‚Pass the Pigs®') von Moffat mit sechsseitigen Spielwürfeln. Wie das regelmäßige Hexaeder besitzen auch die Würfelschweine sechs Ausgänge, die jedoch wie beim Astragal nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten (vgl. Gormann 2012). Die Schülerinnen und Schüler würfeln sowohl mit den Schweinen als auch mit Spielwürfeln, dokumentieren tabellarisch ihre Ergebnisse und vergleichen diese unter besonderer Beachtung der Spannweiten der absoluten Häufigkeiten. Dabei zeigt sich, dass die Spannweite bei den Würfelschweinen größer als bei den Spielwürfeln ist. Die Schülerinnen und Schüler versuchen, dieses Phänomen unter Rückbezug auf die unterschiedlichen geometrischen Eigenschaften von Würfelschweinen und Hexaeder zu erklären. Annika beispielsweise vergleicht die Ausgänge ‚Faule Sau 1' und ‚Haxe' beim Schweinewürfeln und vermutet, dass Haxe unwahrscheinlicher ist: „‚Haxe‘ ist schwieriger zu würfeln, denn das Schwein kann da leicht umkippen.“ Auf die Frage, ob eine ähnliche Beobachtung auch bei den Ausgängen des sechsseitigen Spielwürfels zu machen sei, antwortet Lisa: „Nein, die sind alle gleich wahrscheinlich.“

Im Zusammenhang mit dem Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit wird den Schülerinnen und Schülern der französische Mathematiker Pierre-Simon Laplace (1749-1827) vorgestellt und der sechsseitige Spielwürfel als Laplace'sches Zufallsgerät charakterisiert. Die geometrische Eigenschaft des Würfels bedingt somit seine stochastische Eigenschaft. Abschließend vergleichen die Lernenden Plexiglasmodelle von Oktaeder und Kuboktaeder und stellen Hypothesen bzgl. der Wahrscheinlichkeiten auf. Im Gegensatz zum Oktaeder handelt es sich beim Kuboktaeder nicht um ein Laplace'sches Zufallsgerät mit gleichwahrscheinlichen Ausgängen, da die Seitenflächen zwar regelmäßig, aber nicht gleich sind.

Literatur

Gorman, M. F. (2012). Analytics, Pedagogy and the Pass the Pigs Game. INFORMS Transactions on Education, 13(1), 57-64.

KMK (Hrsg.) (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004. München: Wolters Kluwer.

Moffat, D. (2012). Schweinerei. Ein saublödes Spiel. Düsseldorf: Winning Moves GmbH.

Scherer, P. & Wellensiek, N. (2011). Verborgene Mathematik – Rechentricks verstehen und begründen. MNU Primar, 3(3), 88-95.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Walther, G., Selter, C., & Neubrand, J. (2008). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther u. a. (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (S. 16-41). Frankfurt/M.: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (2010). Würfel & Co – Kunst und Natur in den Symmetrien von Körpern. In M. Ludwig & R. Oldenburg (Hrsg.), Basiskompetenzen in der Geometrie. Tagungsband der Herbsttagung des AK Geometrie der GDM (S. 35-76). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. C. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K. P. Müller (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 528-531). Hildesheim: Franzbecker.

Wollring, B., & Rinkens, H.-D. (2008). Raum und Form. In G. Walther u. a. (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (S. 118-140). Frankfurt/M.: Cornelsen Scriptor.

Thomas BARDY, Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

„Was muss ich wissen?“ – Zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht

Begriff „Geltung“, Hauptziel der Studie und Forschungsfragen

Wie erlangt im alltäglichen Mathematikunterricht durch Handlungen der Akteure mathematisches Wissen Geltung? Angenommen wird, dass sich diese Prozesse in Handlungspraktiken der Unterrichtskultur zeigen und deshalb beobachtbar sind (siehe auch Bardy 2011). Durch Aushandlungsprozesse zwischen Lehrperson und Lernenden kann es zu einem „gemeinsamen“ (Streeck 1979, 249) oder als „geteilt geltenden (mathematischen) Wissen“ (Bauersfeld 1982, 2; Krummheuer 1983, 9f.; Voigt 1984, 212) kommen, das dann auch verbindlich in der Klasse akzeptiert wird. In der vorliegenden Studie wurde empirisch untersucht, wie die Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht hergestellt wird.

Der Begriff „Geltung“ wird in verschiedenen Wissenschaften benutzt, z.B. in der *Philosophie* oder in der *Rechtstheorie* (siehe dazu Bardy 2011). Grundlage der Studie ist die folgende Definition von *Geltung*: Eine Definition (ein Satz, ein Verfahren usw.) hat „Geltung“ im Mathematikunterricht, wenn sie (er, es) von der Lehrperson (vom Schulbuch oder einer/-m Schüler/-in) verbindlich festgelegt wird und von den (anderen) Lernenden akzeptiert wird. Geltung bedeutet: Verbindlichkeit und Akzeptanz.

Hauptziel der Studie war die Identifikation von Formen der Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht. Diese wurden zu Kategorien zusammengefasst. Weiterhin ging es um die Beantwortung u.a. folgender Forschungsfragen:
1) Wie hoch ist der Anteil der Herstellung von Geltung an der gesamten Unterrichtszeit?
2) Lässt sich Mathematikunterricht im Hinblick auf die Herstellung von Geltung typisieren?

Methodisches Vorgehen

Zunächst wurden eigene Videodaten erstellt (drei Lehrpersonen; insgesamt 19 Unterrichtsstunden zur Einführung in die Differenzialrechnung in der Jahrgangsstufe 10), vollständig transkribiert und einzelne Stellen (Gesprächsbeiträge/Episoden) im Hinblick auf die Herstellung von Geltung interpretiert. Dabei wurde sequenziell vorgegangen. Hypothesen wurden aufgestellt, die dann analysiert und überprüft wurden.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 125–128). Münster: WTM-Verlag

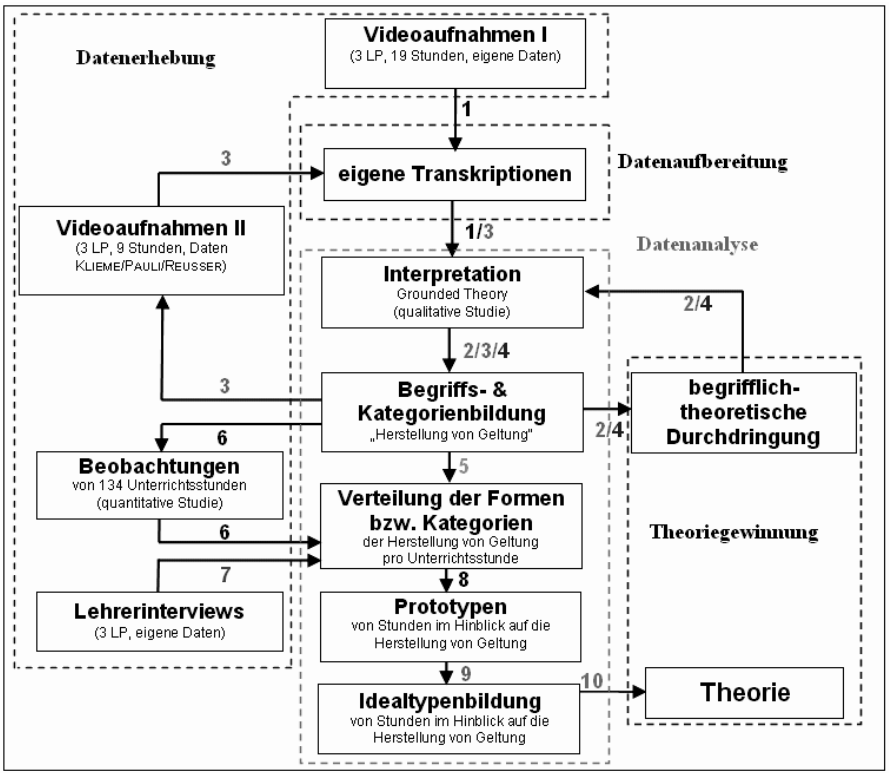


Abb. 1: Übersicht methodisches Vorgehen

Es entstanden so genannte *Formen* der Herstellung von Geltung. Diese wurden im weiteren Verlauf der Analysen mithilfe der Methode des ständigen Vergleichens an neuen/weiteren Transkripten (entstanden aus Videoaufnahmen im Rahmen der Unterrichtsstudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" (Klieme/Pauli/Reusser 2002-2006); drei Lehrpersonen mit je drei Unterrichtsstunden zum Satz des Pythagoras in der Jahrgangsstufe 9) erprobt, präzisiert, gesichert oder aber auch umformuliert oder sogar verworfen. Außerdem kamen auf diese Weise neue, bisher nicht entdeckte Formen der Herstellung von Geltung hinzu. Dabei konnten einzelne Formen speziellen *Kategorien* untergeordnet werden, die bei der Analyse weiterer Transkripte durch neu entdeckte Formen angereichert wurden. Auch konnten neue Kategorien formuliert werden. Außerdem wurden 134 weitere Unterrichtsstunden (verschiedene Klassenstufen und Themen) mithilfe eines – im Laufe des Projekts auf der Grundlage der entwickelten Kategorien hergestellten – Beobachtungsbogens im Hinblick auf die Herstellung von Geltung analysiert. Neben den eigenen Videoaufnahmen wurden mit den drei beteiligten Lehrpersonen Leitfadeninterviews geführt und diese Interviews transkribiert (Fragen zu bestimmten Videoausschnitten, zum (nicht dokumentierten) eigenen Mathematikunterricht, zum Befinden als Lehrperson, zur Einstellung zum Fach Mathematik). Im weiteren Verlauf der Studie konnten *Prototypen* von Unterrichtsstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung identifiziert werden, die als Grundlage für die durchgeführte *Idealtypenbildung* dienten.

Ergebnisse

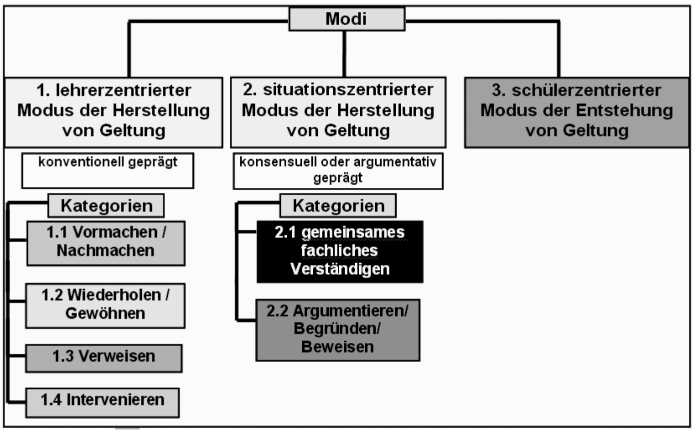


Abb. 2: Modi und Kategorien

In Abb. 2 sind die entwickelten Modi und Kategorien der Herstellung von Geltung zu erkennen. Jede Kategorie umfasst mehrere Formen der Herstellung von Geltung, z.B. die Kategorie 1.1 u.a. die Formen 1.1.1 „gezieltes/ direktes Vormachen durch die Lehrperson“ und 1.1.2 „explizite Definitionen, Begriffs- oder Bezeichnungsfestlegungen durch die Lehrperson“. Der Modus 3 ist nur zur Ergänzung und der Vollständigkeit halber erwähnt, um noch weitere denkbare Möglichkeiten der Herstellung von Geltung bzw. der Entstehung von Geltung aufzuzeigen, die allerdings durch die Studie nicht empirisch belegt sind. Geltung kann innerhalb der Gruppe der Lernenden auch ohne Aktivität der Lehrperson durch Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit entstehen.
Die einzelnen Fälle (Stunden) wurden nach dem Prinzip minimaler und maximaler Kontrastierung miteinander verglichen, wobei eine Zusammenfassung in konventionell (Kategorien 1.1 bis 1.4), konsensuell (Kategorie 2.1) und argumentativ (Kategorie 2.2) sinnvoll erschien. In Abb. 3 ist die Verteilung der Zeitspannen der Herstellung von Geltung (HvG) bezogen auf alle 162 Unterrichtsstunden zu erkennen.

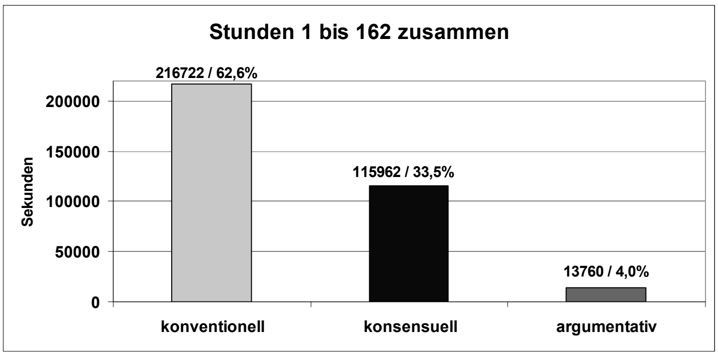


Abb. 3: Verteilung Stunden 1 bis 162

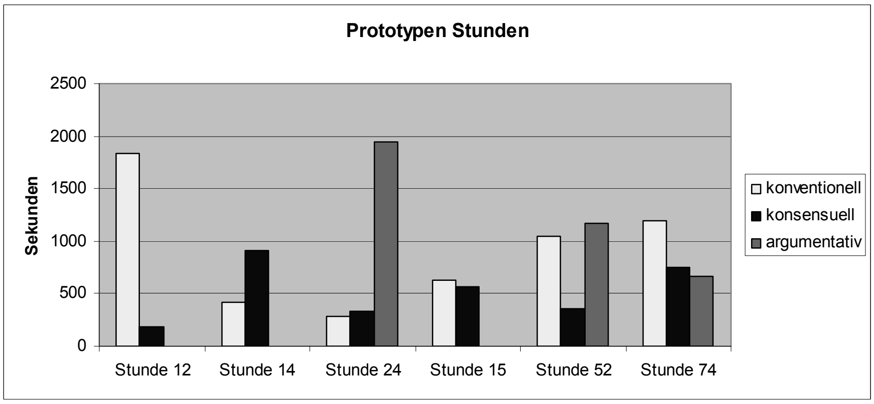


Abb. 4: Prototypen Unterrichtsstunden Mathematik

Folgende Prototypen wurden entdeckt (siehe Abb. 4):
Prototyp A: Std. 12, überwiegend konventionell geprägte HvG;
Prototyp B: Std. 14, überwiegend konsensuell geprägte HvG;
Prototyp C: Std. 24, überwiegend argumentativ geprägte HvG;
Prototyp D: Std. 15, konventionell und konsensuell geprägte HvG;
Prototyp E: Std. 52, konventionell und argumentativ geprägte HvG;
Prototyp F: Std. 74, konventionell/konsensuell/argumentativ geprägte HvG.

Auf Grundlage der Prototypen konnten folgende Idealtypen entwickelt werden:

Idealtyp	Referenz-Prototyp	Charakterisierung
I	A	die lehrergesteuerte Übungsstunde
II	B	die offene Diskussionsstunde
III	C	die Beweisstunde
IV	D	die stark lehrergelenkte Diskussionsstunde
V	E	die stark lehrergesteuerte Begründungsstunde
VI	F	die (im Hinblick auf Herstellung von Geltung) flexible Stunde

Literatur

Bardy, T. (2011). Wie erlangt mathematisches Wissen im alltäglichen Mathematikunterricht für die Lernenden Geltung? – Erste Ergebnisse einer empirischen Studie. *BzMU 2011*, 67-70.

Bauersfeld, H. (1982). Analysen zur Kommunikation im Mathematikunterricht und in darauf bezogenen Situationen. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Analysen zum Unterrichtshandeln*, 1-40. Köln: Aulis.

Krummheuer, G. (1983). *Algebraische Termumformungen in der Sekundarstufe I: Abschlußbericht eines Forschungsprojektes*. Universität Bielefeld.

Streeck, J. (1979). Sandwich. Good for you. – Zur pragmatischen und konversationellen Analyse von Bewertungen im institutionellen Diskurs der Schule. In J. Dittmann (Hrsg.), *Arbeiten zur Konversationsanalyse*, 235-257. Tübingen: Niemeyer.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht – Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Weinheim, Basel: Beltz.

Andreas BAUER, Würzburg

Einfluss externer multipler und dynamischer Repräsentationen auf Schülerargumentationen

Repräsentationen oder Darstellungen spielen beim Lernen und der Benutzung von Mathematik eine überragende Rolle. Durch Aufkommen neuer Technologien wie Rechnern oder Taschencomputer wurde es nicht nur möglich, auch komplexe Darstellungen per Knopfdruck zu erstellen, sondern die Möglichkeiten der Darstellung um dynamische Repräsentationen zu erweitern.

Wie Ainsworth (2006) darstellt, können multiple Repräsentationen verschiedene Vorteile für Lernende bieten. Nicht nur stellen sie zusätzliche Informationen dar, sondern eröffnen die Möglichkeit, durch andere, passendere Herangehensweisen und Strategien eine mathematische Aufgabe effizienter lösen zu können. Nachteil dieser Art der Repräsentation ist eine erhöhte kognitive Belastung, die mit dem zusätzlichen Informationsangebot einhergeht.

In dieser Arbeit bezeichnen wir eine Repräsentation als multipel, wenn sie mehr als eine Repräsentation des gleichen mathematischen Objekts darstellt. Ansonsten bezeichnen wir diese als isoliert. Ein typisches Beispiel für eine multiple Repräsentation ist die gleichzeitige Darstellung einer Funktion als Gleichung, Tabelle und Graph.

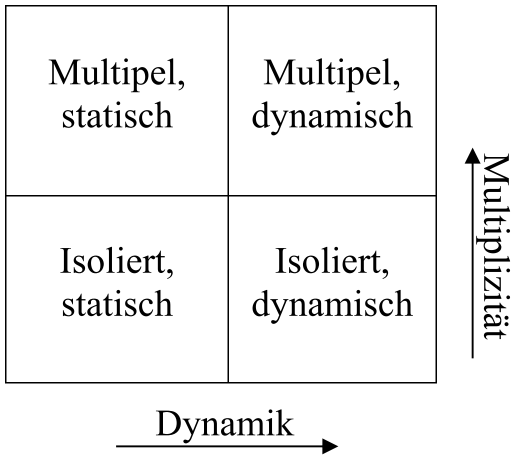


Abb. 1: Taxonomie der Repräsentationen

Auch dynamische Repräsentationen bieten Lernenden zusätzliche Informationen, indem sie eine gegebene Repräsentation variierbar machen. Dies bietet insbesondere beim Argumentieren interessante Möglichkeiten, zum Beispiel beim Formulieren von Vermutungen oder dem Erkunden ihrer Allgemeingültigkeit (Bender 1989, S. 129). Wir bezeichnen eine Repräsentation als dynamisch, wenn sich diese über die Zeit verändert (interaktiv oder automatisch). Als Beispiel denke man an einen Funktionsgraphen, dessen Parameter mit Hilfe eines Schiebereglers variiert werden. Auch dynamische Repräsentationen erhöhen die kognitive Auslastung, da die sich verändernden Zustände der Repräsentation im Arbeitsgedächtnis gehalten werden müssen, um ihre Vorteile nutzen zu können (Schnotz 2002).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 129–132). Münster: WTM-Verlag

Forschungsfragen

Während sie potentiell durchaus Vorteile bieten, erschwert die erhöhte kognitive Auslastung die Nutzung von multiplen und dynamischen Repräsentationen. Aus diesem Spannungsverhältnis formulieren wir die Forschungsfragen für diese Arbeit:

- Werden multiple und/oder dynamische Repräsentationen von Schülerinnen und Schülern in ihren Argumentationen genutzt?
- Hat die Repräsentationsart (s. Abbildung 1) der in der Aufgabenstellung gegebenen Repräsentation den größten Einfluss auf die von den Lernenden in ihren Argumentationen angebotenen Repräsentationen (und nicht etwa persönliche Vorlieben)?

Methode

In der empirischen Untersuchung wurden 89 Schülerinnen und Schüler der 11. Jahrgangsstufe aus Würzburg und Umgebung betrachtet. Die Aufgaben wurden ihnen am Computerbildschirm gestellt, so dass sie die gegebene Repräsentation gegebenenfalls variieren konnten. Die Aufgaben wurden jedoch nicht am Rechner, sondern auf dem Blatt gelöst.

Die Aufgaben waren im Bereich der Funktionen angesiedelt, zum Beispiel sollte die Anzahl der Lösungen einer Gleichung erkannt oder den Einfluss von Parametern auf Grapheneigenschaften wie Symmetrie angegeben werden. Die Aufgaben waren innermathematisch, und die Probanden sollten stets Begründungen für ihre Behauptungen angeben. Jeder Proband hatte vier Probleme zu lösen, welche sich aus zwei Paaren analoger Aufgaben zusammensetzten, die jedoch unterschiedlich repräsentiert wurden. So war zum Beispiel Aufgabe A1 als isolierte, statische Repräsentation (ISR) gegeben, während die analoge Aufgabe A3 isoliert, dynamisch (IDR) dargestellt wurde (vgl. Tabelle 1). Diese Anordnung wurde gewählt, um herauszufinden, ob persönliche Vorlieben statt der gegebenen externen Repräsentation den größeren Einfluss hatten.

Ergebnisse

Die erhaltenen Schülerdokumente wurden dahingehend interpretiert und codiert, ob die dargebotenen Äußerungen der Probanden auf dynamische oder multiple *interne* Repräsentationen schließen lassen. Ersteres ist zum Beispiel der Fall, wenn eine bestimmte Aussage damit begründet wird, dass man den Funktionsgraphen ja „nur *verschieben*“ müsse, um eine Lösung zu erhalten. Analog funktioniert dies bei multiplen Repräsentationen. Wir bezeichnen diese Art der Argumentationen hier der Kürze halber als „dynamische“ bzw. „multiple Argumentationen“.

Wir betrachten die Auswertung der Untersuchung zunächst beispielhaft für das Aufgabenpaar A1/A3, in der eine Funktionenschar betrachtet wird. Zum einen war hier von Interesse, ob die Verteilung von statischen und dynamischen Argumentationen je nach gegebener Repräsentation unterschiedlich ist. In Tabelle 1 wurde daher ein beidseitiger, eindimensionaler χ^2-Tests in Zeile 3 angewandt. Die erwarteten Häufigkeiten ergaben sich aus der Verteilung der Argumentationsarten in Aufgabe A1. Die Signifikanzen aller Aufgabenpaare für diese Auswertung findet sich in Tabelle 3 auf der linken Seite der Ergebnisse.

Tabelle 1: Beispiel für beidseitige, eindimensionale χ^2-Tests auf Unterschiede zwischen erwarteter und beobachteter Häufigkeiten der Argumentationsarten.

	Stat. Arg.	Dyn. Arg.	χ^2	Isol. Arg.	Mult. Arg.	χ^2
A1 (ISR)	13	30		25	18	
Anteil	0.30	0.70		0.58	0.42	
A3 (IDR)	3	39	4.48*	33	9	3.50
Erw. Hfgk.	12.70	29.30		24.42	17.58	

* $p < .05$

Zusätzlich wurde betrachtet, ob einzelne Probanden, die zum Beispiel in Aufgabe A1 statisch argumentierten, durch die dynamische Repräsentation in Aufgabe A3 nun ihrerseits eine dynamische Argumentation vorbrachten. Das Ergebnis dieser Betrachtung ist in Tabelle 2 zu sehen. So argumentierten beispielsweise 10 Probanden, die in A1 noch statisch argumentierten, in A3 nun dynamisch. Die Signifikanzen aller Aufgabenpaare für diese Auswertung findet sich in Tabelle 3 auf der rechten Seite der Ergebnisse.

Tabelle 2: Beispiel für beidseitige Binomialtests, ob die Anzahl der Wechsler in den Argumentationen „entlang“ bzw. „quer“ zum Repräsentationsartwechsel signifikant ist.

		A3 (IDR)				A3 (IDR)	
		Stat. Arg	Dyn. Arg.			Isol. Arg.	Mult. Arg
A1 (ISR)	Stat. Arg.	1	10	A1 (ISR)	Isol. Arg.	20	4
	Dyn. Arg.	2	28		Mult. Arg.	12	15
		$p < .05$				$p > .05$	

Die Zusammenfassung der Ergebnisse ist in Tabelle 3 zu sehen. Sie zeigt ein gemischtes Bild. Die gegebenen Repräsentationen haben zwar einen

Einfluss, aber nicht in einer so direkten Weise, wie dies naiv hätte vermutet werden können. Insbesondere bei Aufgabenpaaren, in denen multiple, dynamische Repräsentationen enthalten waren, zeigen sich deutliche Nebeneffekte. So wurde zum Beispiel beim Aufgabenpaar B2/B4 *weniger* multipel argumentiert, als Dynamik in der Angabe hinzukam.

Der besonders starke Effekt bei Aufgabenpaar B1/B3 lässt sich möglicherweise dadurch erklären, dass die Probanden beim Thema Gleichungen Vorwissen besaßen; insbesondere über die Verbindung der Repräsentationen eine Art Metawissen über Repräsentationen vorhanden war (vgl. Renkl et al 2013). Weitere Gründe und Erklärungen lassen sich ohne zusätzliche Untersuchungen jedoch nicht angeben.

Tabelle 3: Übersicht der Signifikanzen der Ergebnisse. Angaben in Klammern bezeichnen Signifikanz entgegen des Wechsels der Repräsentationsart.

		Verteilung		Wechsler	
		S → D	I → M	S → D	I → M
„Funktionenschar“	A1/A3 ISR → IDR	*		*	
„Fläche als Parabel“	A2/A4 IDR → MDR	(**)		(*)	*
„Gleichungen“	B1/B3 ISR → MSR		**		***
„Symmetrie an Graphen“	B2/B4 MSR → MDR		(*)		(*)

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Literatur

Ainsworth, Shaaron (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16, 183–198.

Bender, Peter (1989). Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: Hermann Kautschitsch und Wolfgang Metzler (Hrsg.): *Anschauliches Beweisen. 7. und 8. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik“ in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988,* 95–145.

Renkl, Alexander; Berthold, Kirsten; Grosse, Cornelia; Schwonke, Rolf (2013): Making Better Use of Multiple Representations: How Fostering Metacognition Can Help. In: Roger Azevedo und Aleven, Vincent A. W. M. M (Hrsg.): *International handbook of metacognition and learning technologies (S. 397–408).* New York: Springer.

Schnotz, Wolfgang (2002): Enabling, facilitating, and inhibiting effects in learning from animated pictures. *International Workshop on Dynamic Visualizations and Learning in Tübingen*.

Andreas BAUER, Würzburg

Blindseilgeometrie

Eine Gruppe von 8-10 Personen mit verbundenen Augen. Ein langes Seil. Und eine Geometrieaufgabe, die zu lösen ist:

> *Wie lässt sich ein Seil in Form eines möglichst großen Sechsecks ablegen – ohne dabei die Augen zu benutzen?*

Die Idee zur Blindseilgeometrie stammt ursprünglich vom Interaktionsspiel „Seilquadrat“, welches in der Pädagogik bekannt ist (siehe z.B. Reiners 2004, S. 112). In diesem Spiel werden Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit verbundenen Augen an einem an den Enden zu einem Ring verknoteten Seil platziert und erhalten die Aufgabe, mit dem Seil ein Quadrat zu bilden. Sie erreichen dies durch Sprechen mit anderen Teilnehmern, indem sie zunächst herausfinden, wie sie zueinander stehen, um sich und das Seil anschließend in die richtige Form zu bringen. Auf diese Weise sollen neben einer Veränderung der Wahrnehmung Kommunikation und Kooperation in der Gruppe geschult werden. Die Präzision des Quadrats wird beim „Seilquadrat“ jedoch nur durch Schätzen erreicht.

Die Blindseilgeometrie erweitert dieses Konzept, indem die geometrischen Objekte nicht nur ungefähr ausgelegt, sondern durch die Nutzung ihrer mathematischen Eigenschaften möglichst präzise konstruiert werden sollen. Wie in der unten vorgestellten Lösung deutlich wird, unterscheidet sich diese Art der Konstruktion von der üblichen Zirkel-und-Lineal-Konstruktion in gewisser Hinsicht. Der Schwerpunkt der Blindseilgeometrie bleibt jedoch, wie beim Seilquadrat, ein pädagogischer, sie bietet darüber hinaus jedoch einen ungewöhnlichen neuen Blickwinkel auf die Geometrie.

Erprobung des Konzepts

Die Blindseilgeometrie wurde zuerst in der Veranstaltung „Didaktik der Geometrie für Haupt- und Realschule“ erprobt. Dafür wurden in den drei Übungsgruppen Untergruppen von jeweils etwa zehn Studierenden gebildet. Der Versuch sollte in eine Planungs-, eine Durchführungs- und eine Reflexionsphase gegliedert sein. Für erstere erhielten die Studierenden etwa 50 cm lange Schnüre, mit denen sie – sehenden Auges – einen Konstruktionsplan erstellen und miteinander absprechen konnten. Anschließend wurde jede Untergruppe mit einem 15 Meter langen Seil ausgestattet vor das Seminargebäude geschickt, um, nun mit verbundenen Augen, ihren Plan in die Tat umzusetzen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 133–136). Münster: WTM-Verlag

Beispiellösung

Alle Gruppen lösten die Aufgabe schneller als erwartet. Die Lösungen unterschieden sich dabei z.T. auf interessante Weise, wegen des beschränkten Platzes soll hier nur auf die häufigste Lösung eingegangen werden.

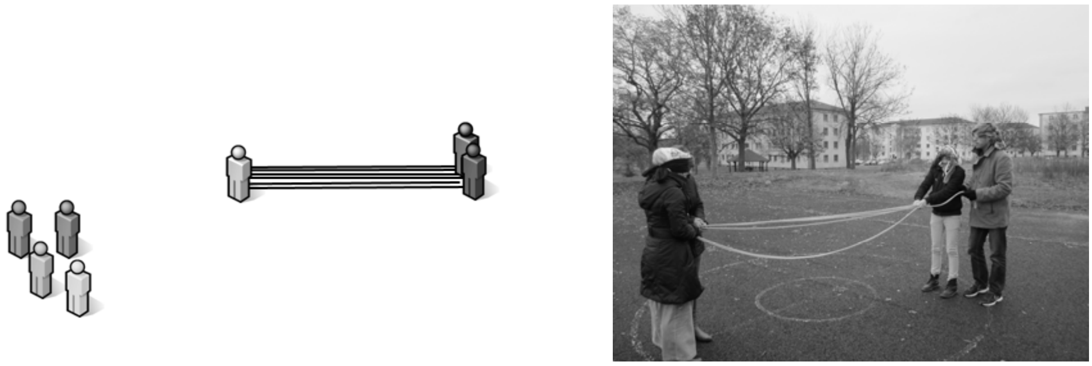


Abbildung 1: Sechsteln des Seils – geometrisch zwar nicht konstruierbar, mit dem Seil aber möglich.

Im ersten Schritt wurde das Seil gesechstelt, um die Seitenlänge des Sechsecks zu erhalten. Dazu stellten sich drei Teilnehmer einander wie in Abbildung 1 gegenüber und teilten das Seil so auf, dass es sechsmal zwischen ihnen hin und her verlief, um so eine Näherung der Länge einer Sechseckseite zu erhalten.

Im nächsten Schritt wurden die Seiten, wie in Abbildung 2 zu sehen, zu einem gleichseitigen Dreieck gespannt, entsprechend der Grundkonstruktion für ein regelmäßiges Sechseck, wie es auch mit Zirkel und Lineal konstruiert würde. Wie zu sehen ist, stehen nun zwei Teilnehmer bereits auf Eckpunkten des Sechsecks, der dritte gewissermaßen im „Mittelpunkt“ des Sechsecks.

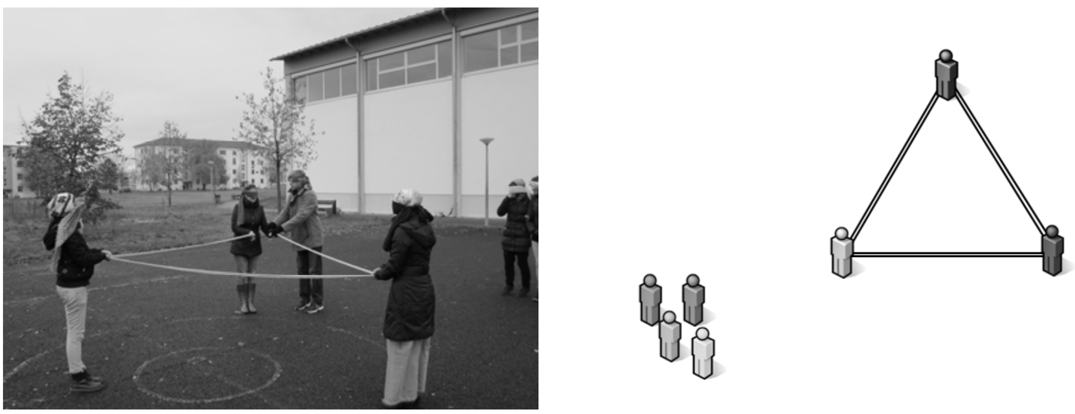


Abbildung 2: Aufspannen des gleichseitigen Dreiecks.

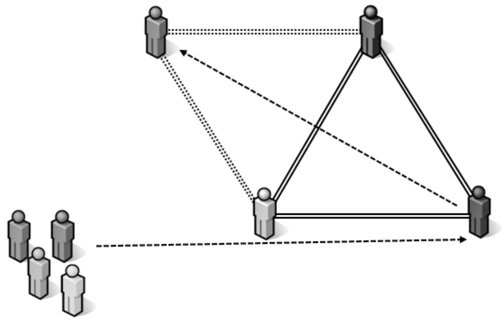



Abbildung 3: Spiegeln eines Eckpunkts an der gegenüberliegenden Dreiecksseite, um den neuen Sechseckpunkt zu erhalten.

Nun muss, ausgehend vom bestehenden gleichseitigen Dreieck, der nächste Eckpunkt konstruiert werden. Dazu nimmt ein neuer Teilnehmer die Seil-„Ecke" eines Teilnehmers auf und geht mit dem Seil unter der gegenüberliegenden Dreiecksseite hindurch (Abbildung 3). Wenn alle Seile wieder auf Spannung sind, steht er auf dem neu konstruierten Sechseckpunkt.

Dieser Vorgang wird nun sukzessive wiederholt. Die Teilnehmer markieren so durch ihren eigenen Standpunkt die Eckpunkte des regelmäßigen Sechsecks. Sind sie alle in Position, nimmt der oder die während der Konstruktion in der Mitte Stehende das Seil auf und legt es den Eckpunkten so in die Hände, dass das Seil gespannt ist. Zum Abschluss legen die Teilnehmer das Seil auf den Boden. Nun dürfen sie die Augenbinden abnehmen und ihr Ergebnis begutachten (Abbildung 4).

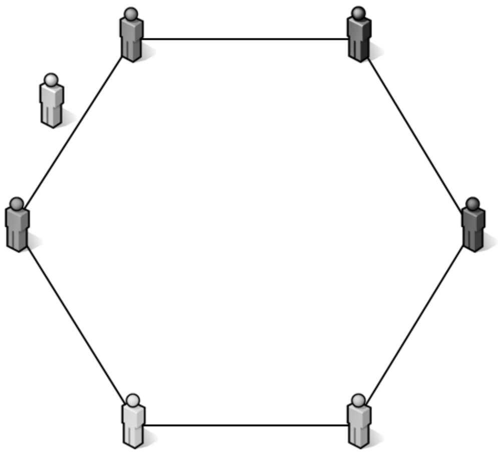



Abbildung 4: Durch sukzessive Wiederholung werden alle Sechseckpunkte festgelegt und das Seil in Position gelegt – fertig!

Reflexion und Ausblick

Im Anschluss an die Durchführung der Konstruktion sollte eine Reflexionsphase angeschlossen werden, in der besprochen wird, inwiefern der zuvor erdachte Plan funktioniert hat und wo Schwierigkeiten in der Durchführung zutage getreten sind.

Bei der Erprobung wurden auch mögliche Erweiterungen des Konzepts thematisiert: Was lässt sich mit in der Blindseilgeometrie überhaupt konstruieren? Was ist besonders schwierig, was verhältnismäßig einfach? Der Ehrgeiz der Studierenden war geweckt, und so wurden Konstruktionsbeschreibungen von Mittelsenkrechten, gleichschenkligen Dreiecken, Rechtecken oder Rauten gefunden.

Fazit

Die Studierenden, die in der Erprobung mitgewirkt haben, äußerten sich im Anschluss durchweg positiv, besonders über den Reiz der „blinden“ Durchführung der Konstruktion und der Andersartigkeit gegenüber der „normalen“ Geometrie. Die pädagogischen Vorteile standen für sie eindeutig im Vordergrund. Zwar kam bei der Durchführung manchmal Frust auf, wenn etwas wegen der erschwerten Kommunikation nicht funktionierte, durch die Einführung eines sehenden „Koordinators“ oder eines Probelaufs ohne Augenbinden ließe sich dies jedoch abmildern. Auch waren sich die Studierenden nicht sicher, ob das Erstellen eines Planes für Schüler alleine nicht zu schwierig sein könnte.

Abbildung 5: Stolze Blindseilgeometer

Zusammenfassend lässt sich also festhalten:

Blindseilgeometrie …

- ist eine knifflige Herausforderung.
- fördert Kommunikation und Gruppengefühl.
- bietet einen neuen, interessanten Blick auf die Geometrie.
- macht Spaß!

Literatur

Reiners, Annette (2004). *Praktische Erlebnispädagogik: neue Sammlung motivierender Interaktionsspiele*. Augsburg: ZIEL.

Arno BAYER, Claudio Christiano LIEL, Canoas (Brasilien)

Umweltbildung und Nachhaltigkeit in brasilianischen Schulbüchern

Umweltbildung und Nachhaltigkeit sind als Ausdruck der Besorgnis vieler Menschen über die Situation der Welt in vielen Lehrplänen verankert. Dabei spielen Schulbücher eine bedeutende Rolle. Sie sind keine neutralen Unterrichtswerkzeuge der Lehrenden, sondern sie vermitteln den Lernenden auch implizite Werte.

In der späten 1960er begann eine Gruppe von Geschäftsleuten, Diplomaten und Wissenschaftlern in Rom, die Hauptprobleme der Menschheit, einschließlich der möglichen Umweltauswirkungen, im Zusammenhang mit dem Wirtschaftswachstum zu diskutieren. Dies führte im Jahr 1968 zur Gründung des Club of Rome durch Aurelio Peccei und Alexander King, die eine ausführliche und systematische Studie über die Auswirkungen des Wirtschafts- und Bevölkerungswachstums an das Massachusetts Institute of Technology-MIT in Auftrag gaben. Die Studie wurde 1972 abgeschlossen und veröffentlicht unter dem Titel Grenzen des Wachstums (The Limits of Growth) und seit damals mehrfach aktualisiert (z.B. Meadows, Meadows & Rangers 2007). Das besondere dieser Studie war die Einführung von computergestützten Simulationen von Szenarien, die auf verknüpften Regelkreisen basierten. Da diese Szenarien meist den Zusammenbruch der Systeme prognostizierten, verursachte die Veröffentlichung heftige Kontroversen und war außerordentlich wirksam bei der Entstehung und Ausbreitung von unterschiedlichen Meinungen über Umweltthemen.

Auch im politischen Bereich war die Studie außerordentlich wirksam. Sie bereicherte die Diskussion bereits bestehender Umweltkonferenzen (z.B. Stockholm 1972) die seit dem „Weltgipfel in Rio“ 1992 nicht nur Regierungen sondern auch Nicht-Regierungsorganisationen (NGOs) in die weltweiten Anstrengungen zur Erhaltung der Umwelt mit einbeziehen. Aus diesem Umfeld wurden auch Forderungen zur Umweltbildung als Teil der Bildungsstruktur des im Klassenzimmer erworbenen Wissens erhoben.

Das Bildungsministerium von Brasilien, griff diesen Impuls auf, durch seinen Vorschlag, übergreifende Umweltthemen die in der Schulpraxis aller Fächer zu integrieren. Die Umweltbildung soll den Vorschlägen des brasilianischen Bildungsministeriums zufolge, einen Prozess der pädagogischen Innovation bewirken (Secretaria de Educação Fundamental 1997, 1998).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 137–140). Münster: WTM-Verlag

Auch der Mathematikunterricht soll durch die Integration von Umweltthemen in allen Inhaltsbereichen an diesem Prozess mitwirken.

Schulbücher sind im Fach Mathematik ist ein wichtiges Element des Wissenserwerbs. Die in den Büchern dargestellten und eingeübten Strategien zur Bewältigung problemhaltiger Situationen mit mathematischem Kontext sollten inhaltlich verstärkt Umweltthemen berücksichtigen. Die Verfügbarkeit geeigneter Lehrwerke an den Schulen ist daher besonders wichtig.

Das brasilianische Bildungsministerium stellt sicher, dass jeder Schüler Zugang zu einem Lehrbuch hat. Im Jahr 1985 wurde das Nationale Schulbuch-Programm PNLD geschaffen mit dem Ziel, allen Schülerinnen und Schülern kostenlos den Zugriff zu geeigneten Lehrbüchern zu ermöglichen. Die Nationale Schulbuch-Programm definiert Kriterien für die Auswahl der im Handel erhältlichen Schulbücher durch die Lehrer und verlangt die Wiederverwendbarkeit des Buches von anderen Schülern in späteren Jahren. Heute erreicht das Programm alle Schüler an öffentlichen Schulen, weil die Zuteilung der Bundesmittel an die Teilnahme der Staaten am Nationalen Schulbuch-Programm geknüpft ist.

Nach den Richtlinien der nationalen Bildungsstandards „Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN“ muss das Thema Umweltbildung in angemessenem Umfang in den Mathematikbüchern vorhanden sein.

Untersuchung von Mathematikbüchern

In unserer Studie untersuchten wir, wie und in welchem Umfang Umweltthemen in den Lehrbüchern der oberen Klassen der Grundschule (die Grundschule in Brasilien hat 8 Klassenstufen entsprechend der Primarstufe und der Sekundarstufe I) und Mittelschule (das entspricht etwa den 3 Jahren der Sekundarstufe II) in zehn staatlichen und kommunalen Schulen der Stadt São Sebastião do Caí/RS, thematisiert werden.

Danach fragten wir nach dem Zusammenhang der Themen mit

- der Lebenswirklichkeit der Schüler (Vermutung: einfache, lebensnahe Alltagssituationen in der Grundschule – komplexe, systemrelevante Situationen in der Sekundarstufe II)
- der Affinität der Themen zu mathematischen Aspekten (Vermutung: Anwendung elementarer mathematischer Aspekte in der GS – Bedeutung mathematischer Aspekte bei der Analyse von Umweltsituationen in der S II).

Es ging uns also darum zu erkunden, ob Umweltthemen integrativ im Mathematikunterricht eingebunden sind oder ob sie nur additiv als ein bloßes

Veranschaulichungs- bzw. Übungsfeld mathematischer Fertigkeiten angefügt wurden.

THEMA	Anteil der Umweltthemen (%)
Abholzung	30
Stromverbrauch und seine Verbindung mit der Umwelt	30
Wasserverbrauch	23
Kernenergie	11
Tiere (Artenschutz)	6

Tab, 1: Themen in der Grundschule/S I (aus Andrini & Vasconellos 2012a)

Thema	Anteil der Umweltthemen (%)
Bodenverschmutzung	19
Abholzung	13
Wasserverbrauch	13
Stromverbrauch und seine Verbindung mit der Umwelt	12
Tiere (Artenschutz)	12
Regenerative Energiequellen	7
Lärmbelastung	5
Luftverschmutzung	5
Umweltkatastrophen	5
Kernenergie	4
Abgas	2
Wasserverschmutzung	2
Globale Erwärmung	1

Tab. 2: Themen in der Mittelschule/S II (aus Andrini & Vasconellos 2012b, Dante 2012)

Die Absicht der Autoren, Schülern zunehmend komplexe Umweltthemen nahezubringen, war erkennbar. Die Bücher präsentieren Fotos und Fragen welche die Schüler dazu anregen zu reflektieren, wie wir dazu beitragen können, eine nachhaltige Umwelt zu gestalten. Es wurde klar, dass die Absicht der Autoren war, den Zusammenhang zwischen dem Thema und Mathematik zu verdeutlichen, um den Schülern ein Verständnis der realen Welt zu ermöglichen, die von Handlungsentscheidungen der einzelnen Menschen beeinflusst wird.

Der Zusammenhang der Themen mit mathematischen Inhalten war jedoch häufig nicht erkennbar. So wurde beispielsweise das Thema „Wasserverbrauch“ ohne den mathematischen Inhalt des betreffenden Kapitels „Maßeinheiten“ diskutiert. Sinnvoller wäre ein konsequenter Aufbau der Umweltthemen, ausgehend von der geschärften Wahrnehmung der Umweltproblematik mithilfe mathematischer „Methoden“ wie zählen, vergleichen, darstellen als Diagramm oder Graph usw. hin zu einfachen Modellierungen von Umweltszenarien in dynamischen, vernetzten Systemen. Dadurch würde zum Verständnis der Debatte um die Umweltthemen beigetragen, wie sie durch die am Anfang des Beitrags erwähnte Literatur des Club of Rome einer breiten Öffentlichkeit zugänglich gemacht wurde. Die Schulbücher thematisieren zwar einige notwendige Voraussetzungen dazu, bleiben aber hinter den Möglichkeiten zurück.

Insgesamt hat unsere Untersuchung auch gezeigt, dass die Arbeit mit Umweltthemen in Mathematik Lehrbüchern noch wenig didaktisch aufgearbeitet ist. Die in den Texten, Aktivitäten und Übungen zu diesen Themen angestrebten Kompetenzen, könnten mehr auf kritische Konzeption und kontextualisierte mathematische Kenntnisse ausgerichtet sein, und so die Grundlage zur Ausbildung einer realistischen und wertgebundenen Haltung verantwortungsbewusster Bürger schaffen.

Literatur

Andrini, A.; Vasconcellos, M. J. (2012a) *Praticando Matemática 6. 3ª edição.*. São Paulo:Editora do Brasil.

Andrini, A.; Vasconcellos, M. J. (2012b) *Praticando Matemática 7. 3ª edição.*. São Paulo:Editora do Brasil.

Secretaria de Educação Fundamental (Hg.) (1997) *Parâmetros curriculares nacionais: meio ambiente, saúde*. Brasília: MEC/SEF.

Secretaria de Educação FundamentaL (Hg.) (1998) *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais.* Brasília: MEC/SEF.

Dante; L. R.. *Tudo é Matemática 6º . 3ª edição:* São Paulo: Ática.

Meadwos, D; Meadwos, D; Randers, J. (2007) *Limites do crescimento: a atualização de 30 anos.* Rio de Janeiro: Qualitymark.

Silvia BECHER, Paderborn

Einstellungen von Lehramtsstudierenden (Gym) zur fachmathematischen und (fachdidaktischen) universitären Ausbildung

Dieser Vortrag wurde im Rahmen des Tages der Nachwuchsförderung gehalten, der dazu diente, Ideen des Dissertationsvorhabens vorzustellen und anschließend zu diskutieren.

Schon eine im Jahr 1999 durchgeführte Befragung von Referendaren zur ihrem Mathematikstudium zeigte folgende Problemlage auf:

„Eine deutliche Mehrheit hält die fachwissenschaftlichen Anforderungen im Studium für zu hoch und für zu schwach verbunden mit dem Berufsziel. Viele verlassen die Universität mit (nach eigener Wahrnehmung) unzureichender mathematischer Kompetenz und mit geringem Selbstvertrauen.“ (Beutelspacher et. al. 2011, S.5)

Auch nehmen Lehramtsstudierende im Vergleich zu Diplomstudierenden das Studium weniger als eine vielseitige Lernerfahrung wahr (Vgl. Pieper-Seier 2002, S.397). Um diese unbefriedigende Lage genauer zu verstehen möchte ich mit meiner Dissertation Beziehungen zwischen verschiedenen Merkmalen der Studierenden aufzeigen, die die Einstellungen zur fachmathematischen Ausbildung beeinflussen. Dabei werden neben den subjektiven Relevanzkriterien für fachmathematische Inhalte und deren Anwendung auch die Verbindung des schulmathematischen Wissen zum Fachwissen, die Übertragbarkeit der Inhalte auf die Praxis, das mathematische Weltbild, die Sicht auf die Lehrerrolle und auf die Ziele des Mathematikunterrichts, das eigene Selbstbild, die Motivation für das Studium und vermutlich auch die eigenen fachlichen Fähigkeiten eine Rolle spielen. Damit werden verschiedene Forschungsbereiche in die Arbeit einbezogen. Den größten Bereich bildet die Belief-Forschung in die u.a. das mathematische Weltbild, die Sicht auf die Lehrerrolle und die Ziele des Mathematikunterrichts fallen. Aber auch die Biographie- und Transition-Forschung spielen eine Rolle und bedingen sich gegenseitig.

Methode

Da in diesem Gebiet bisher kaum fundierte Theorie vorhanden ist, verschiedene Gruppen befragt werden und das erhobene und einzubeziehende Material (Interviews, Aufsätze, Fokusgruppen...) sehr vielfältig ist, bietet sich die Qualitative Sozialforschung und dort speziell die Grounded Theory nach Strauss und Corbin (1996) als Auswertungsmethode an. Ein weiterer wichtiger Punkt, der für diese Methode spricht, ist die Möglichkeit des suk-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 141–144). Münster: WTM-Verlag

zessiven Aufbaus des theoretischen Samplings, um aus den Daten heraus weitere interessante Untergruppen zu identifizieren. Die ersten Überlegungen zum theoretischen Sampling sehen Studierende des gymnasialen Lehramts und die Ausbilder als zwei Großgruppen vor. In ersterer befinden sich die Hauptteilgruppe mit Studierenden die am Anfang des Studiums, nach der Analysis-1-Vorlesung und am Ende des Studiums befragt werden. Des Weiteren wär es auch interessant, Studierende, die vom gymnasialen Lehramt auf Haupt- und Realschullehramt gewechselt haben, oder Doktoranden, die nun in der Fachmathematik oder in der Fachdidaktik promovieren, zu befragen. Auch sollte eine rückblickende Perspektive vertreten sein, diese würde durch Referendare und Lehrer mit mehrjähriger Schulerfahrung eingebunden. Zur Gruppe der Ausbilder zählen die Professoren der Fachmathematik und der Fachdidaktik, denn auch diese haben eine Meinung zur Relevanz der Fachausbildung zukünftiger Lehrer und vermitteln diese in ihren Veranstaltungen.

Daten

Zur ersten Exploration wurde in der Veranstaltung „Didaktik der Sekundarstufe II (Teil 1)“ in Anlehnung an Törner (1999) die folgende ausdifferenzierte Aufgabenstellung als Übungsaufgabe gestellt:

„Schreiben Sie einen kurzen Aufsatz (ca. 4-5 Seiten) über Ihre Beziehung zur Analysis. Gliedern Sie Ihren Aufsatz mit den folgenden 5 Punkten:

1. Wie war mein Analysisunterricht in der Schule? Beschreiben Sie auch ihre Einstellungen und Emotionen.
2. Wie haben sich durch die Analysis-Vorlesung an der Universität meine Einstellung, mein Wissen (zum Beispiel über bestimmte Begriffe), meine Emotionen zur Analysis verändert?
3. Worin sehen Sie den Nutzen der Analysisvorlesung für Ihren späteren Beruf als Lehrer?
4. Welche neuen Impulse nehme ich aus den von mir bisher erlebten universitären Analysisveranstaltungen für meinen eigenen Unterricht mit?
5. Was würde ich in meinem eigenen Analysisunterricht im Vergleich zu meinem erlebten Unterricht anders machen?“

An dieser Veranstaltung nehmen sowohl Studierende mit dem angestrebten Abschluss Staatsexamen, als auch Bachelorstudierende für das gymnasiale Lehramt und Berufskolleg teil. Die Staatsexamen-Studierenden befinden sich am Ende ihres Studiums, die Bachelor-Studierenden am Ende Ihres Bachelor-Studiums. Insgesamt wurden 38 Aufsätze mit einer durchschnittlichen Länge von 3 Seiten abgeben. Die Aufsätze verteilen sich auf die einzelnen Gruppen wie folgt: 23 Lehramt Gy/Ge – Bachelor (5. Semester); 7 Lehramt Gy/Ge Staatsexamen (Ø 11. Sem.) und 8 Lehramt Berufskolleg Bachelor (Ø 5. Sem.)

Bei der Auswertung der Daten muss bedacht werden, dass verschiedene Selektionseffekte vorlegen. Zum einen wurde die Aufgabe nur von 38 der 60 Teilnehmer bearbeitet. Da die Aufsätze nicht anonym waren, könnten sie durch soziale Erwünschtheit beeinflusst sein. Des Weiteren sitzen in der Veranstaltung Studierende, die schon relativ weit im Studium sind, wodurch die „Abbrecher" nicht erreicht werden können. Insbesondere bei den Bachelorstudierenden, welche die größte Teilgruppe unter den Aufsätzen ausmachen, werden nur Studierende, die bisher „nach Plan" studiert haben, erreicht. Trotz dieser Effekte bilden die Aufsätze eine gute Grundlage. Schlaglichtartig werde ich nun Aussagen vorstellen.

Die Bewertung des Universums Mathematik:

„Ich selbst sehe die Mathematikvorlesungen in der Universität immer sehr kritisch. Der Stoff der dort vermittelt wird, ist meines -erachtens nach sehr anspruchsvoll und bei vielen Inhalten denke ich mir, dass ich es nie wieder brauchen werde, da sie mit der Schulmathematik so gar nichts zu tun hat." (BA Gym, 5.Sem.)

Diese Aussage unterstützt die in der Literatur beschriebenen Einstellungen von Lehramtsstudierenden und zeigt, dass die Verbindung zur Schulmathematik nicht gesehen wird. Jedoch finden sich in den Aufsätzen auch einige positive Äußerungen.

„Man schaute von nun an hinter die Kulissen und auf den breiteren Kontext, es ging nicht länger um das bloße Lernen von Lösungsstrategien und das anschließende Bestehen der Klausur, sondern die stückweise Erschließung des Universums der Mathematik." (BA Gym, 5.Sem.)

Hier spiegelt sich ein Unterschied zwischen Schule und Hochschule wieder, jedoch wird dieser positiv aufgenommen und das Studium wird als Bereicherung erlebt.

Als eine weitere Studiumsmotivation wird oft der „interessierte Schüler" herangezogen:
„Hauptnutzen ist aber sicherlich, dass man die Schulanalysis (und mehr) versteht und so interessierten Schülerinnen und Schülern auch etwas erklären kann."(SE Gym, 19.Sem)

Jedoch gibt es auch vereinzelte Studierende die dies anzweifeln:

„...es mir schwer fällt sich vorzustellen, dass Schüler Fragen stellen, die universitäres Wissen verlangen" (BA BK, 5.Sem)

Auffällig war in den Aufsätzen, dass das Thema Beweise häufig angesprochen wurde, obwohl nicht explizit danach gefragt wurde, und die Studierenden den Beweisen oft eine positive Einstellung entgegenbrachten, so dass sie diese auch in ihren eigenen Unterricht integrieren möchten.

„Sätze beweisen und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Begrifflichkeiten der Analysis herstellen ist für mich ein Ziel, was ich als zukünftiger Mathematiklehrer versuchen werde zu erreichen. Denn nur so kann die Analysis als eine art eingeständig geordnete Welt von Schülerinnen und Schülern erfahren und verstanden werden." (SE GYM, 7.Sem)

In der folgenden Aussage zeigt sich ein stark fachmathematisch ausgeprägtes Beweisbedürfnis verschiedener Sachverhalte, welches auf die Schülerinnen und Schüler im Unterricht übertragen werden soll.

„Je nach Leistung der Schülerinnen und Schüler werde ich den Unterricht variieren und versuchen klarzumachen, dass man einen Satz ohne einen Beweis nicht einfach so hinnehmen kann." (BA BK, 5.Sem)

Ausblick

Aufgrund der bisher erhobenen Daten, zu denen neben den Aufsätzen auch zwei Fokusgruppen mit Lehramtsstudierenden aus der Veranstaltung Analysis 1 gehören, werden nun Hypothesen formuliert. Für die weiteren Befragungen wird ein Interviewleitfaden entworfen und ein Fragebogen erstellt.

Die Diskussion hat ergeben, dass das Projekt weiter eingegrenzt werden sollte. So könnte man sich beispielsweise auf einen bestimmten Begriff in der Analysis fokussieren. Auch sollte das theoretische Sampling im Hinblick auf die Weite überdacht werden. Dies wird sich jedoch schließlich erst auf Grundlage der erhobenen Daten entscheiden lassen.

Literatur

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). Mathematik neu denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Wiesbaden: Vieweg+ Teubner.

Pieper-Seier, I. (2002). Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik. In W. Peschek (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. (S.395 – 398), Hildesheim, Franzbecker.

Törner, G. (1999). Analyse von narrativen Elementen und der Zusammenhang mit Vorstellungen über den Analysisunterricht. In Neubrand, M. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. (S.543 – 546), Hildesheim,Franzbecker.

Strauss, A. L., Corbin, J. (1996). Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Beltz, PsychologieVerlagsUnion.

Johannes BECK, Würzburg

Lösungsdokumentationen beim Einsatz neuer Technologien im Umfeld des Arbeitens mit Funktionen

Der Einsatz neuer Technologien bringt Veränderungen des Mathematikunterrichtes mit sich. Gerade wenn Verfahren verwendet werden, die eine Lösung ermöglichen, die vom üblichen handschriftlichen Rechnen abweicht, stellt insbesondere die Dokumentation des Lösungsprozesses ein neues Problem dar.

In diesem Beitrag werden primär solche Geräte (Taschencomputer TC) und Softwareprogramme im Fokus stehen, welche die Funktionen von wissenschaftlichen Taschenrechnern, dynamischen Geometrie-Softwares, Tabellenkalkulationsprogrammen und Computeralgebrasystemen in sich vereinen und damit bei vielen Aufgaben verschiedene Lösungswege eröffnen.

Ziel dieses Beitrags ist es, ein Arbeitsschema für Kategorien von Dokumentationen zu präsentieren, das als theoretischer Hintergrund dient, und aus dem sich Hilfestellungen für die Schulpraxis ableiten lassen. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass die Dokumentation nur auf Papier geschieht und auf digitale Unterstützung, wie etwa das Speichern von Dateien oder Anfertigen von Screenshots, verzichtet wird. Zum einen erscheint es schwieriger, sich beim Dokumentieren auf Stift und Papier zu beschränken, zum anderen gilt z.B. in Bayern, dass in Prüfungen nur auf Papier dokumentiert werden darf (vgl. ISB, S. 79).

Einflüsse eines TC auf die Lösungsdokumentation

Oft wird als Vorteil von TC angeführt, dass sie SuS vom Kalkül befreien (vgl. Barzel ea. 2005, S. 38f.), da die Rechnungen vom Gerät ausgeführt werden können. Das bedeutet aber, dass ein Teil des Lösungsprozesses im TC und nicht mehr auf Papier stattfindet. Damit stellt sich die Frage, wie dieser Teil des Lösungsprozesses zu dokumentieren ist. Geht man davon aus, dass die meisten Dokumentationen ungefähr chronologisch den Lösungsprozess „nacherzählen“, so lassen sich auf einer strukturellen, vom Inhalt weitgehend unabhängigen Ebene drei Phasen unterscheiden. Die Idee und die hier verwendeten Bezeichnungen stammen aus der Zulassungsarbeit von Moritz Gütlein.

Die erste Phase ist die *Vorarbeit*. In ihr werden die Aufgabenstellung gelesen, im Idealfall verstanden und wichtige Informationen für die weitere Bearbeitung festgestellt. Auch der mögliche Einsatz des TC wird geplant. Die zweite Phase ist die *Verarbeitung*, in der mit dem TC gearbeitet wird. In ihr

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 145–148). Münster: WTM-Verlag

werden zum Beispiel Funktionen eingegeben und (systematisch) manipuliert, um die Aufgabe zu lösen. Vor allem in dieser Phase wird der TC als Werkzeug eingesetzt. Die dritte Phase ist die Auswertung. In ihr werden die im TC angezeigten Resultate interpretiert und als Antwort notiert.

Der Einsatz eines TC beeinflusst die Dokumentation vor allem auch in inhaltlicher Hinsicht. Dadurch, dass viele mathematische Tätigkeiten im TC stattfinden, stellt sich die Frage, was man davon noch einmal auf Papier niederschreiben muss. Ball und Stacey schlagen als Antwort auf diese Frage ein Schema vor, das vier wesentliche Kategorien umfasst und als Richtlinie sowohl für Schüler als auch für Lehrer gedacht ist. Diese Kategorien sollen nun einmal kurz beschrieben werden (vgl. Ball & Stacey 2003):

- *Reasons*: Ball & Stacey schlagen vor, dass die Schülerinnen und Schüler ihre mathematischen Überlegungen dokumentieren sollen, dass sie *Argumente* dafür angeben, was sie tun. Die Hoffnung, die dahinter steckt, ist die, dass CAS den Blick der Schüler weg vom kleinschrittigen Rechendetail hin zum großen Ganzen öffnen (vgl. ebn. S.292).
- *Information*: Schüler sollen angeben, welche Angaben (aus der Aufgabenstellung), welches *Wissen* und welche *Rechnerbefehle* sie zur Lösung der Aufgabe verwenden. Dabei soll auf die Verwendung der mathematischen Fachsprache geachtet werden.
- *Plan*: Die Schüler sollen darauf achten, dass in der Lösung insgesamt der Lösungsweg klar ersichtlich ist. Eine Wechselbeziehung zwischen *Plan* und *Reasons* scheint unvermeidlich.
- *Answers*: Schüler sollen nicht alle kleinen Zwischenergebnisse angeben, sondern nur die wichtigsten Lösungsschritte anführen.

Kombiniert man dieses primär auf den Inhalt ausgerichtete Verfahren zur Dokumentation mit den Phasen der strukturellen Ebene, so ergibt sich ein 3x4-Raster mit 12 einzelnen Kategorien, nach denen man Schülerlösungen analysieren könnte. Zu jeder dieser Kategorien kann man nun versuchen, allgemeine Fragen danach zu stellen, was hier dokumentiert werden könnte, um erste allgemeine Hilfestellungen für Schüler (und Lehrer) zu erhalten.

	Argumente	Wissen & Rechnerbefehle	Lösungs sungs-weg	Ergebnisse
Vorarbeit	„Gesucht“	Welche Angaben sind für die (Teil-)Aufgabe relevant?		Kann ich etwas im Kopf umformen / ausrechnen?
Verarbeitung	Warum verwende ich ein bestimmtes Fenster?	In welchem Fenster löse ich die Aufgabe? Graphikfenster, CAS-Fenster, Tabelle…		
Interpretation		Was bedeuten die Ergebnisse im Kontext der Aufgabe?		Übersetze die Rechnersprache in „normale“ mathematische Formelsprache

Kritische Reflexion des Dokumentationsrasters

Die drei Phasen der strukturellen Dimension finden sich in vielen Bearbeitungen von Aufgaben sowohl mit als auch ohne TC. Bei der Vorarbeitsphase denkt man schnell an die Schlagworte „Gegeben“ und „Gesucht“, die letztlich das verwendete Wissen und die Zielüberlegung (Argumente) der Aufgabe umfassen. Bei der Verarbeitungsphase steht der eigentliche Lösungsprozess im Mittelpunkt, unabhängig davon, auf welche Weise dieser ausgeführt wird. Dies ist deshalb von Vorteil, da man sich auch ohne TC-Einsatz an diesem Schema orientieren kann und der Einsatz neuer Technologien keine Voraussetzung z.B. zur Analyse von Schülerlösungen ist.

Auf inhaltlicher Ebene stellen vor allem die Dokumentation von Rechnerbefehlen und solchen mathematischen Tätigkeiten eine Schwierigkeit dar, die im handschriftlichen Rechnen nicht oder nur sehr eingeschränkt auftreten.

Dokumentation von Rechnerbefehlen

Rechnerbefehle ließen sich im Grunde auf drei Arten dokumentieren, die sich auch alle in den Schülerlösungen im Rahmen des M³-Projekts (vgl. Bichler 2010) finden lassen. Man könnte die Eingaben in Form von Tastenkombinationen festhalten, was wenig aufwendig ist. Allerdings verhindert eine solche Dokumentation, dass man die Lösung mit einem anderen Gerät reproduzieren kann und stellt daher keine praktikable Variante dar. Außerdem ist diese Art der Dokumentation nicht möglich, wenn man eine PC-gestützte Software verwendet. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, die Rechnersprache zu notieren. Doch auch diese ist produktspezifisch, so dass wiederum die Reproduzierbarkeit unter Umständen beeinträchtigt ist. Hier stellt sich auch die Frage nach der Sinnhaftigkeit, da man den Vorteil der Entlastung von Kalkülen durch eine erhöhte Belastung durch wenig gewinnbringende Abschreibarbeit zunichte macht. Als dritte Möglichkeit könnte man die ausführbaren Tätigkeiten kodifizieren und dadurch knapp beschreibbar machen. Im M³-Projekt haben Schüler immer wieder die Benennungen der Rechnerbefehle in der Menüauswahl dokumentiert, z.B. „Graph zeichnen – Graph analysieren – Nullstellen". Der Nachteil dabei ist, dass v.a. bei Eingaben in das CAS Details verloren gehen, die für die Bestimmung der Fehlerursache hilfreich wären.

Ausblick

Die obige Matrix stellt einen ersten Arbeitsschritt im Rahmen eines Promotionsverfahrens dar. Die Leerstellen darin zeigen, dass es von konkreten Aufgaben losgelöst nicht so leicht möglich ist, ganz allgemeine Richtlinien aufzustellen. Deshalb sollen in naher Zukunft authentische Schülerlösungen erhoben und analysiert werden, um daran die Matrix konkreter auszurichten. Außerdem sollen die Anforderungen, die Lehrer an Lösungen stellen, mittels eines Fragebogens erhoben werden, da diese bisher noch zu wenig berücksichtigt wurden.

Eine spannende Frage ist, inwieweit Lösungsdokumentationen überhaupt als *statisch* im Lernprozess angesehen werden können. In Anlehnung an Yackel (vgl. Ball & Stacey 2003, S. 292) könnte man auch erwarten, dass sich auf inhaltlicher Ebene die Anforderungen, die Schüler und Lehrer an ihre und an andere Dokumentationen stellen, verändern, dass also „Richtlinien" eher *dynamisch* aufzufassen sind. Inwieweit in diesem Fall obige Matrix dennoch geeignet ist, diese Dokumentationen zu beschreiben, bleibt derzeit eine offene Frage.

Literatur

Ball, Lynda; Stacey, Kaye (2003). What Should Students Record When Solving Problems with CAS? – Reasons, Information, the Plan, and Some Answers. In James T. Frey ea. *Computer Algebra Systems in Secondary Mathematics Education* (S.289-303). Reston: NCTM.

Barzel, Bärbel ea. (2005). *Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bichler, Ewald (2010). *Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M³) am Gymnasium.* Kovac: Hamburg

Gütlein, Moritz (2014). *Erster Entwurf einer Protokollierungsmethodik für das Arbeiten mit einem graphikfähigem Taschenrechner*. Schriftliche Hausarbeit zur 1. Staatsprüfung für das Lehramt an Realschulen. Eingereicht bei Nicolai von Schroeders an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. (2011). *Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums – Jahrgangsstufe 10*. München

Daniela BEHRENS, Christina Marie KRAUSE, Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

„Ich zeig‘ uns was, was du nicht siehst“ – Zur epistemischen Rolle von Gesten

Prozesse der Wissenskonstruktion werden bisher vor allem in Bezug auf Sprache und Inskription in sozialen Interaktionen untersucht (z.B. Bikner-Ahsbahs 2005). Jedoch zeigen neue Studien insbesondere bei graphisch-nahen Lernumgebungen, dass auch der Gebrauch von Gesten einen Beitrag zur Wissenskonstruktion leistet (z.B. Reynolds & Reeves 2002).

Im vorliegenden Beitrag wird die Fallstudie einer Masterarbeit vorgestellt. Diese untersucht, welchen Beitrag Gesten zum mathematischen Erkenntnisprozess bei arithmetisch-analytischen und somit graphisch-abstinenten Aufgaben leisten können.

Theoretischer Rahmen

Als theoretische Grundlage für die Beschreibung von Wissenskonstruktionsprozessen eignet sich das SVSt-Modell (Bikner-Ahsbahs 2005), das aus sozial-konstruktivistischer Sicht die drei aufeinander aufbauenden, eher heuristisch angelegten epistemischen Handlungen des *Sammelns*, *Verknüpfens* und *Struktursehens* unterscheidet (Bikner-Ahsbahs, Dreyfus & Kidron 2010, S. 1).

Diesem Modell zufolge werden zunächst verschiedene mathematische Bedeutungen (Beispiele, Gegenbeispiele, Assoziationen,…) gesammelt. Diese werden dann miteinander verknüpft, indem Zusammenhänge der zuvor gesammelten Bedeutungen erfasst oder Begründungen gegeben werden. Die angestrebte Handlung im Erkenntnisprozess ist Struktursehen. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass „mathematische Strukturen, in Gestalt von Regelmäßigkeiten, Gesetzmäßigkeiten, musterhaften Lösungen“ erkannt werden (Bikner-Ahsbahs 2005, S. 202).

Als Gesten werden in dieser Untersuchung diejenigen Bewegungen von Händen und Armen bezeichnet, die sprachbegleitend stattfinden, spontan ausgeführt werden und keinen funktionalen Handlungen zuzuordnen sind (McNeill 1992, S. 37; Kendon 2004, S. 15). Um diese Gesten interpretieren zu können, müssen sie im Zusammenhang mit der Sprache auf ihre Bedeutung hin analysiert werden, da Gesten durch ihre Mehrdeutigkeit vom inhaltlichen Kontext der Sprache abhängen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 149–152). Münster: WTM-Verlag

Methodische Überlegungen

Ein Schülerinnenpaar (11. Jahrgang, Gymnasium in Bremen) bearbeitet gemeinsam eine Aufgabe zur Kettenbruchentwicklung aus dem Projekt „Effective knowledge construction in interest-dense situations“ (gefördert von der German-Israeli-Foundation). Die Videodaten des Bearbeitungsprozesses zeigen drei Perspektiven (halbfrontal rechts, halbfrontal links, Schreibprozess) im Split Screen Format. Transkribiert wurden die sprachlichen Äußerungen, die nicht-sprachlichen Handlungen und die Körperbewegungen.

Die Daten werden hinsichtlich folgender Forschungsfrage untersucht:

Welchen Beitrag können Gesten zum mathematischen Erkenntnisprozess bei der Bearbeitung einer arithmetisch-analytischen Aufgabe zum Grenzwert einer Kettenbruchentwicklung leisten?

Die Analyse des Erkenntnisprozesses erfolgt interpretativ, die Ergebnisse werden mit dem SVSt-Modell dargestellt (Bikner-Ahsbahs 2005, S. 197). Darin eingebettet wird eine Gestenanalyse im Kontext des Semiotischen Bündels (Arzarello 2006), in der die Rolle von Gesten aus dem Wechselspiel der verschiedenen Ressourcen (Sprache, Inskription, Gesten, Artefakte,…) gewonnen wird. Abschließend wird identifiziert, welchen Beitrag die untersuchten Gesten im Erkenntnisprozess leisten.

In der zugrunde liegenden Aufgabe untersuchen die beiden Schülerinnen die in Abb. 1 zu sehende Kettenbruchentwicklung. Die Aufgabe zielt auf das Erschließen rekursiver Bildungsstrukturen und den Grenzwert. In den im Folgenden analysierten Szenen erkennen sie beim Sammeln von Folgengliedern in der Tabelle (Abb. 2) ein rekursives Muster für Zähler und Nenner. Dies besagt unter anderem, dass der Zähler von $f(x)$ zum Nenner von $f(x+1)$ wird und wird von den Schülerinnen wie folgt (Abb. 3) notiert:

$$f(0)=1$$
$$f(1)=1+\frac{2}{1}=1+2=3$$
$$f(2)=1+\frac{2}{1+\frac{2}{1}}=1+\frac{2}{1+2}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

Abb. 1

$f(2)$	$\frac{5}{3}$
$f(3)$	$\frac{11}{5}$
$f(4)$	$\frac{21}{11}$
$f(5)$	$\frac{43}{21}$
$f(6)$	$\frac{85}{43}$

Abb. 2

$$f(x)=\frac{a_1}{b_1} \rightarrow f(x+1)=\frac{2\cdot a_1 \pm 1}{a_1}$$

Abb. 3: Notation der rekursiven Bildungsstruktur von Zähler und Nenner

Ergebnisse & Fazit

Bevor Rosa die Bildungsstruktur für den Zähler erkennt, sieht und beschreibt Lisa das Muster für den Nenner:

299/301 Lisa: *Man hat immer den* (zeigt auf den Zähler im Bruch von f(4))…	*…dann unterm Bruchstrich.* (zeigt auf den Nenner im Bruch von f(5)) *[…]*	*…Und den* (zeigt auf den Zähler von f(5))…	*…dann unterm Bruchstrich.* (zeigt auf den Nenner von f(6)).

Abb. 4

Mit den von Christina Krause ausgearbeiteten Präzisierungsfunktionen von Gesten (im Projekt „Rolle von Zeichen in Prozessen mathematischer Wissenskonstruktion“) wird deutlich, dass die sprachlichen Beschreibungen durch Zeigegesten präzisiert werden, wobei zum einen das Was („*den*“ (Z. 299/301)) und zum anderen das Wo („*unterm Bruchstrich*“ (Z. 299/301)) präzisiert wird. Dies zeigt, dass und wie Gesten die Sprache entlasten können.

Lisa weist sprachlich auf eine gesehene Struktur hin: Der Zähler eines Bruches findet sich „*immer*“ im Nenner des Bruches des nächsten Folgengliedes wieder. Mit einer Zeigegeste konkretisiert sie dies an zwei Beispielen (zeigt von $\frac{21}{11}$ zu $\frac{43}{21}$ und von $\frac{43}{21}$ zu $\frac{85}{43}$; siehe Abb. 4). Hierbei werden Zähler und Nenner der jeweiligen Brüche in der Tabelle präzisiert. Es muss somit nicht nachgedacht werden, wie man „*den*“ „*unterm Bruchstrich*“ nennt. Hierdurch kann die Beobachtung vereinfacht und spontan ausgedrückt werden. Während diese Geste zwei Strukturbeispiele *sammelt*, suggeriert sie durch die Gleichförmigkeit der Bewegung (im Bogen nach unten) eine regelhafte *Verknüpfung*.

Um das Nennermuster schriftlich zu fixieren, formuliert Rosa dieses im Folgenden aus. Dabei nimmt sie Lisas dynamische, verknüpfende Geste (siehe Z. 299/301) wieder auf und projiziert sie vom Aufgabenblatt in den horizontalen Gestenraum (siehe Abb. 5). Diesen nutzt sie dabei so, als läge das Aufgabenblatt virtuell vor ihr.

473 R: *dass der Nenner immer* (beide Zeigefinger berühren sich im rechten Winkel)…	*…nein.* (rechte Hand wird fallen gelassen, linke Hand holt nach vorne aus) *dass der Zähler immer…*	*…in den Nenner* (beide Finger werden wieder aufeinander zu und zum Körper bewegt)...	*…in dem nächsten kommt* (linke Hand wird in der Luft gehalten, rechte Hand gesenkt)

Abb. 5

Rosa löst sich nun sprachlich wie gestisch vom konkreten Beispiel. Sprachlich beschreibt sie die Bildungsstruktur begrifflich präzise, indem sie die mathematischen Begriffe „*Zähler*“ und „*Nenner*“ (siehe Z. 473) verwendet. Während die Bedeutung der Zeigegeste von Lisa (vgl. Z. 299/301) durch den Verweis auf konkrete Folgenglieder gegeben ist, wird bei Rosa die dynamische Bewegung im Gestenraum bedeutungstragend. Diese erinnert an das konkrete Beispiel, ohne auf dieses verweisen zu müssen.

Insgesamt zeigt sich: Gesten können das Sammeln und Verknüpfen im epistemischen Prozess übernehmen. Außerdem ermöglicht der Gestengebrauch eine visuelle Strukturierung der geäußerten Gedanken, indem das Bildungsmuster flüchtig und dynamisch illustriert und ausgelagert wird.

Gesten richten sich somit nicht nur kommunikativ an ein Gegenüber, sondern auch an den Sprecher selbst: „Ich zeig‘ uns was, was du nicht siehst.“.

Für die Unterrichtspraxis empfiehlt sich daher ein bewusster Einsatz von Gesten im Unterricht; als Ressource für die Lernenden, sowie als didaktisches Mittel für die Lehrkraft.

Literatur

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process. In *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial, 267-299.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation.* Berlin, Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T. & Kidron, I. (2010). „General Epistemic Need“ - Ein Motor für Erkenntnisentwicklung? In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der Jahrestagung der GDM 2010 in München.*

Kendon, A. (2004). *Gesture: Visible Action as Utterance*. Cambridge: Cambridge University Press.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind. What gestures reveal about thought*. Chicago: The University of Chicago Press.

Reynolds, F. J. & Reeve, R. A. (2002). Gesture in collaborative mathematical problem-solving. In *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 447–460.

Ramona BEHRENS, Würzburg

Lernen, Fragen zu stellen – unterstützt durch den Einsatz eines Taschencomputers

Forschendes Lernen in der Schule ist ein aktiver Lernprozess, der sich dadurch auszeichnet, dass die Lernenden durch das Stellen von Fragen mit dem Ziel diese zu beantworten, weitgehend eigenständig Erkenntnisse erwerben, die für sie selbst neu sind. Die Arbeitsweisen beim forschenden Lernen beinhalten eine planmäßige Vorgehensweise sowie eine reflektierte Strategiewahl und eine für andere nachvollziehbare Darstellung der Ergebnisse (vgl. u. a. Bruce & Bishop 2008; Messner 2009; Bönsch 1991).

Beim forschenden Lernen geht es um die Erforschung einer Gesamtsituation durch Stellen und Beantworten von Fragen sowie durch Öffnen und Variieren der Situation (vgl. auch Behrens 2012).

Ein wichtiger Aspekt des forschenden Lernens ist das Stellen von Fragen. Das Entwickeln von Fragestellungen findet sich in der Literatur unter dem Begriff "Problem Posing", also der Generierung von Problemen bzw. dem Stellen von Fragen (vgl. Walter & Brown 1983). Beim "Problem Posing" wird von einer vorgegebenen Situation ausgegangen, zu der dann jeweils Fragestellungen formuliert werden sollen. Neben dem Entwickeln von Fragestellungen zur gegebenen Situation durch Erfassen von Eigenschaften der gegebenen Elemente, wird auch die "what-if-not"-Strategie als Hilfe zur Formulierung von Fragestellungen aufgeführt. Bei dieser Strategie werden durch Variation der Eigenschaften der gegebenen Elementen neue Fragen formuliert, indem überlegt wird, welche alternativen Eigenschaften das jeweilige Element haben könnte (vgl. Brown & Walter 1983).

Als Erweiterung der "what-if-not"-Strategie findet sich in der Literatur die "what-else"-Strategie zur Variation von Aufgaben. Dabei wird ausgehend von einer gelösten Aufgabe nach Variationen für die Aufgabe gesucht, indem in der Aufgabe enthaltene Angaben und Begriffe sukzessive abgeändert werden (vgl. Schupp 2002, S. 19). Der Hinweis zur Variation dient als Einstiegsstrategie für Schülerinnen und Schüler, die noch keine Erfahrung mit der Variation von Aufgaben haben. Wichtig ist, dass nach dem Erlernen dann weitere heuristische Basisstrategien zum Variieren bewusst gemacht werden, die zum Beispiel auch beim Problemlösen hilfreich sind (Schupp 2002, S. 31).

Für das Lernen Fragen zu stellen und das Variieren einer Situation gibt es mehrere Gründe. Zum einen motiviert die Beantwortung eigener Fragen mehr als die Beschäftigung mit Fragen, die jemand anders gestellt hat. Zum

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 153–156). Münster: WTM-Verlag

anderen können auch Variationen nach der Lösungserarbeitung einer Aufgabe helfen, einen Sachverhalt besser zu verstehen, da die Bedeutsamkeit einer Lösung oft erst erkannt wird, wenn weitere Probleme oder Fragen erzeugt und analysiert werden (vgl. auch Brown &Walter, 1983; Schupp 2002). Die Frage nach einer verwandten Aufgabe, deren Lösung bei der Bearbeitung der eigentlichen Frage hilfreich sein kann, findet sich bereits beim Problemlöseprozess nach Polya (1949). Des Weiteren spielt das Stellen von Fragen auch im Leben eine bedeutende Rolle, da es immer wieder Situationen gibt, die eingeschätzt und bewertet werden müssen.

Auch beim forschenden Lernen ist das Lernen Fragen zu stellen ein wesentlicher Aspekt. Aus diesem Grund verfolgt das Forschungsprojekt das Ziel, zu untersuchen, wie Schülerinnen und Schüler bei der Formulierung von Fragestellungen und bei der Variation von Situationen vorgehen, die diesbezüglich keine bzw. wenig Vorerfahrungen haben. Die Identifizierung von verwendeten Strategien und auftretenden Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern ist wichtig, um die Ausgangssituation der Lernenden einschätzen zu können. Dabei ist es auch von Interesse, welche Bedeutung ein Taschencomputer beim Formulieren von Fragestellungen und der Variation von Situationen hat. Ein weiteres Anliegen der Untersuchung ist es, aus den Befunden Hinweise auf mögliche Maßnahmen zu erhalten, die beim Lernen Fragen zu stellen helfen können (vgl. auch Behrens 2013).

Bei der Untersuchung nahmen 35 Schülerinnen und Schüler aus der 10. bzw. 11. Klasse von drei Gymnasien teil, die noch keine oder nur sehr wenig Erfahrung im selbstständigen Formulieren von Fragestellungen hatten. Im Mathematikunterricht der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler werden Taschencomputer eingesetzt.

Bei der Untersuchung nahmen elf Dreiergruppen und eine Zweiergruppe teil. Die Gruppenzusammenstellung erfolgte durch Einschätzung der jeweiligen Lehrpersonen bezüglich des Leistungsstands der Lernenden, so dass Gruppen jeweils leistungshomogen waren. Diese Einteilung wurde vorgenommen, damit in den Gruppen jeweils von ungefähr gleichen Vorkenntnissen ausgegangen werden konnte.

Jeweils eine Schülergruppe hat in einer 45-Minuten-Einheit eine Situation bearbeitet. Es wurden Situation aus dem Themenbereich Funktionen verwendet, da dort verschiedene Fragestellungen und Variationen möglich sind, beispielsweise können verschiedene Funktionstypen, Eigenschaften von Funktionen anhand von dem Funktionsterm oder Graphen, sowie einzelne Fälle oder Verallgemeinerungen betrachtet werden. Außerdem bietet der Taschencomputer in diesem Bereich Möglichkeiten zur Unterstützung bei der Formulierung von Fragestellungen und Variationen der Ausgangssituation. Zum Beispiel können mehrere Funktionsgraphen gleichzeitig veranschaulicht werden oder Auswirkungen einer Änderung von Parametern auf den Graph einer Funktion untersucht werden (vgl. auch Behrens 2012, 2013).

Bei der Untersuchung ging es vor allem um die Formulierung von Fragestellungen zu der vorgegebenen Situation sowie deren Variation. Den Taschencomputer durften sie zu jeder Zeit einsetzen. Die Durchführung lief in drei Phasen ab: Einzelarbeit, Gruppenarbeit, Gruppeninterview.

In der ersten Phase haben die Schülerinnen und Schüler eine Situation vorgegeben bekommen, wie zum Beispiel die folgende:

Gegeben sind eine Funktion f mit $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ und eine Gerade g, die durch den Punkt $P(3|0)$ verläuft.

Als erstes haben die Schülerinnen und Schüler individuell überlegt, welche mathematischen Fragestellungen ihnen zu der gegebenen Situation einfallen. Die Einzelarbeit wurde gewählt, damit jeder die Möglichkeit hatte, sich selbstständig eigene Fragestellungen zu überlegen. Die Schülerinnen und Schüler durften dabei alle mathematischen Fragestellungen notieren, die ihnen eingefallen sind.

In der anschließenden Gruppenarbeitsphase, die mithilfe einer Videokamera aufgezeichnet wurde, ging es um die Sammlung der entwickelten Fragestellungen, bei der auch einige Fragestellungen durch die Initiative der Schülerinnen und Schüler bewertet, sortiert oder hinsichtlich ihrer Lösung diskutiert wurden. Die Gruppenarbeit wurde gewählt, da es sich als erfolgreich herausgestellt hat, dass Lernende beim forschenden Lernen mit anderen über ihre Gedanken und Vorgehensweisen austauschen können (vgl. Messner 2009, S. 27) und so auch der Beobachter der Gruppenarbeit bereits einige Gedanken und Erklärungen der Schülerinnen erfassen konnte.

Während der Gruppenarbeitsphase wurde noch ein weiterer Arbeitsauftrag gegeben, bei dem die Schülerinnen und Schüler sich Möglichkeiten zur Variation der Situation und der daraus resultierenden Fragestellungen überlegen sollten.

Im Anschluss daran wurde ein Gruppeninterview durchgeführt, bei dem die Schülerinnen und Schüler unter anderem zu ihrem Vorgehen, zu aufgetretenen Schwierigkeiten sowie dem Einsatz des Taschencomputers befragt wurden. Außerdem sollten die Gruppen erläutern, wie sie vorgehen würden, um eine ihrer Fragen zu beantworten. Auch das Gruppeninterview wurde gefilmt, damit später die Ausführungen der Schülerinnen und Schüler noch einmal genauer betrachtet werden können.

Nach der Durchführung mit den Schülergruppen wurde ein Lehrerinterview durchgeführt, das auch aufgezeichnet wurde. Dabei wurden unter anderem identische Fragen wie in den Gruppeninterviews hinsichtlich des Taschencomputer-Einsatzes im Unterricht, zur Einschätzung der Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler, welche Inhalte im Mathematikunterricht bereits behandelt wurden und ob die Lernenden bereits selbstständig Fragestellungen im Unterricht formuliert haben. Zudem sollte die Lehrperson einschätzen, welche Fragen von den Schülerinnen und Schüler bei den jeweiligen Situationen aufgrund des Vorwissens formuliert worden sind.

Als weiteres Vorgehen ist die Auswertung der Schülerdokumente aus Einzel- und Gruppenarbeit, der Videoaufzeichnungen und Transkripte der Gruppenarbeit, der Schüler- und Lehrerinterviews sowie der Taschencomputer-Screenshots, die nach Ende der Gruppenarbeit aufgenommen wurden, geplant.

Literatur

Behrens, R. (2012): Forschendes Lernen im Mathematikunterricht – unterstützt durch den Einsatz von Taschencomputern. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 109 - 112.

Behrens, R. (2013): Forschendes Lernen – unterstützt durch Taschencomputer. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 116-119.

Bönsch, M. (1995): Variable Lernwege - Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden, Paderborn, München, Wien, Zürich, Verlag Ferdinand Schöningh.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983): The Art of Problem Posing. Philadelphia, The Franklin Institute Press.

Bruce, B. C. & Bishop, A. P. (2008): New Literacies and Community Inquiry. In Coiro u. a.: Handbook of research on new literacies, Taylor & Francis Group, LLC, S. 699-742.

Messner, R. (Hrsg.) (2009): Schule forscht. Ansätze und Methoden zum forschenden Lernen. Edition Körber-Stiftung.

Polya, G. (1995): Schule des Denkens. Bern, München, Francke.

Schupp, H. (2002): Aufgabenvariation Schupp, H. (2002): Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim, Verlag Franzbecker.

Jana BEITLICH, Kristina REISS, München

Das Lesen mathematischer Beweise – Eine Eye Tracking Studie

Verständnis mathematischer Beweise

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft (Reiss & Ufer, 2009) und die deduktive Struktur der Mathematik, die in universitären Vorlesungen und Lehrbüchern durch das typische Definition – Satz – Beweis Schema sichtbar wird, erfordert unabdingbar den Umgang mit Beweisen. Neben dem Verfassen von Beweisen sind insbesondere das Lesen und Verstehen von Beweisen zentrale Aktivitäten im Mathematikstudium (Mejia-Ramos & Inglis, 2009). Doch viele Studierende haben hier Schwierigkeiten. Das für dieses Themengebiet relevante Vorwissen aus der Schule basiert zum Teil auf der in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife der Kultusministerkonferenz festgelegten allgemeinen mathematischen Kompetenz „Mathematisch Argumentieren" (Kultusministerkonferenz, 2012), umfasst aber wenig systematisches Beweisen. Entsprechend schwierig gestaltet sich der Umgang mit Mathematik in der Universität, wo ein streng axiomatischer Theorieaufbau und abstraktere Begriffe die Regel sind.

In einer Studie von Inglis und Alcock (2012) überprüften Studienanfänger und Mathematiker Beweise auf ihre Gültigkeit hin, während ihre Blickbewegungen aufgezeichnet wurden. Die Ergebnisse zeigten, dass Studierende länger als Mathematiker Formeln betrachteten, die in den Beweisen vorkamen (im Vergleich zu den Teilen der Beweise, die keine Formeln enthielten). Außerdem sprangen die Mathematiker häufiger zwischen den Zeilen des Beweises als die Studierenden. Ging es in dieser Studie um das Lesen von Beweisen, um diese auf ihre *Gültigkeit* hin zu überprüfen, wollen wir in unseren Studien auf das Lesen von Beweisen fokussieren, um diese zu *verstehen*, was für Studienanfänger wohl die zentrale Rolle zu Beginn des Studiums einnimmt.

Eine verbreitete Herangehensweise, Studierende beim Verstehen von Beweisen zu unterstützen, ist der Einsatz von den Textinhalt ergänzenden Abbildungen in Lehrbüchern und Vorlesungen. Kognitionspsychologische Theorien zum multimedialen Lernen stützen diesen Ansatz (z. B. Mayer, 2001; Schnotz, 2005) und viele Studien haben gezeigt, dass der Wissenserwerb mit Texten und Bildern erfolgreicher ist als das Lernen nur aus Texten (für eine Übersicht siehe z. B. Levie & Lentz, 1982). Die Kombination aus Text und Abbildungen scheint besonders wirkungsvoll zu sein, wenn die Repräsentationen semantisch verwandt sind oder räumlich nah zusam-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 157–160). Münster: WTM-Verlag

men präsentiert werden (Schnotz, 2005), da dann die Informationen aus den Repräsentationen gut integriert werden können. Allerdings können Abbildungen nicht hilfreich und sogar erschwerend sein, etwa wenn sie den Text in einer unpassenden Weise visualisieren. Die Art der Visualisierung beeinflusst die Struktur des mentalen Modells, das aus diesem Bild gebildet wird (Schnotz, 2005).

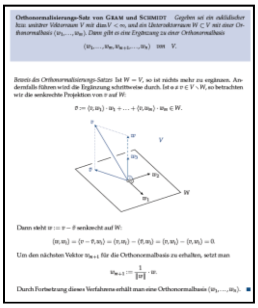
Im Bereich der Mathematik gibt es wenig empirisch fundierte Forschung zum Effekt der Kombination aus Text und Abbildungen. In einer kürzlich veröffentlichten Studie von Dewolf, Van Dooren, Hermens und Verschaffel (2013) mit Studierenden hatten zusätzlich zum Text präsentierte Bilder keinerlei Effekt auf die Lösungen von Textaufgaben. Ein möglicher Grund hierfür war, dass die Studierenden die Bilder kaum betrachteten. Angesichts dieser Ergebnisse ist es fraglich, ob Personen Abbildungen, die als Teil eines mathematischen Beweises präsentiert werden, *überhaupt* Beachtung schenken.

Studie zur Rolle von Abbildungen beim Lesen von Beweisen

Ziel unserer Studie war es, empirische Erkenntnisse darüber zu gewinnen, ob – und wenn ja, in welcher Weise – Abbildungen beachtet werden, die gemeinsam mit einem mathematischen Beweis präsentiert werden. Dabei wurde der Beweis gelesen, um ihn zu verstehen.

Das Messen von Leseverhalten ist eine methodische Herausforderung, bei der sich mehrere Zugänge anbieten. Eine mögliche Vorgehensweise ist die mündliche Befragung der Versuchspersonen unmittelbar nach dem Lesevorgang. Eine andere Möglichkeit ist, die Teilnehmer während des Lesens laut denken zu lassen. Ein Nachteil beider Methoden ist jedoch, dass sie subjektiv geprägt sind und daher keine zuverlässige Auskunft über das tatsächliche Leseverhalten geben. Eine objektivere Methode ist, Blickbewegungen mit Hilfe eines Eye Trackers sichtbar zu machen und so das Leseverhalten zu erfassen.

Für die hier beschriebene Studie wählten wir als Teilnehmer Erwachsene mit hoher Expertise in Mathematik und zwar sechs Universitätsmitarbeiter mit einem Hochschulabschluss in Mathematik und zwei Mathematikstudierende höherer Semester. Die Teilnehmer sahen auf einem Bildschirm, der an einen Remote Eye Tracker angeschlossen war, nacheinander drei Items bestehend aus einem Satz, seinem Beweis und einer Abbildung, die im Text platziert war und den geschriebenen Beweis visualisierte, ohne andere



Orthonormalisierungs-Satz von Gram und Schmidt *Gegeben sei ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum V mit $\dim V < \infty$, und ein Untervektorraum $W \subset V$ mit einer Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_m)$. Dann gibt es eine Ergänzung zu einer Orthonormalbasis*

$$(w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n) \quad \text{von} \quad V.$$

Beweis des Orthonormalisierungs-Satzes Ist $W = V$, so ist nichts mehr zu ergänzen. Andernfalls führen wir die Ergänzung schrittweise durch. Ist $0 \neq v \in V \setminus W$, so betrachten wir die senkrechte Projektion von v auf W:

$$\tilde{v} := \langle v, w_1 \rangle \cdot w_1 + \dots + \langle v, w_m \rangle \cdot w_m \in W.$$

Dann steht $w := v - \tilde{v}$ senkrecht auf W:

$$\langle w, w_i \rangle = \langle v - \tilde{v}, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \langle \tilde{v}, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \langle v, w_i \rangle = 0.$$

Um den nächsten Vektor w_{m+1} für die Orthonormalbasis zu erhalten, setzt man

$$w_{m+1} := \frac{1}{\|w\|} \cdot w.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man eine Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_n)$. ■

Abb. 1: Beispielitem bestehend aus einem Satz (schattierter Absatz) und seinem Beweis inklusive einer Abbildung.

zusätzliche Informationen darzubieten (für eine grobe Illustration siehe Abb. 1). Sie sollten versuchen, die dargebotenen Inhalte der Items zu verstehen. Nach jedem Item beantworteten sie Verständnisfragen im multiple-choice Format, indem sie auf die richtige Antwort auf dem Bildschirm klickten. Die Items stammten aus typischen Lehrbüchern für Studienanfänger.

Zur Analyse der Blickbewegungen wurden für jedes Item Areas of Interest (AOIs) definiert, nämlich *Text* (für den Beweistext über und unter der Abbildung, ohne den zu beweisenden Satz) und *Bild* (für die Abbildung). Die Auswertung der Blickzeiten für die AOIs *Bild* ergab, dass alle Teilnehmer die Abbildungen berücksichtigten. Ein *t*-Test für verbundene Stichproben zeigte für Item 1 keinen signifikanten Unterschied in der Betrachtungsdauer pro Pixel (normiert an der Größe der AOIs) zwischen *Text* und *Bild*, $t(6)_{item\_1} = -1.26$, $p = .25$. Bei Item 2 und Item 3 zeigten sich dagegen signifikante Differenzen, $t(6)_{item\_2} = 3.49$, $p = .013$, $d = 0.52$, $t(6)_{item\_3} = 3.17$, $p = .019$, $d = 1.71$. In beiden Fällen wurde der Text länger betrachtet als die Abbildung. Ein möglicher Grund hierfür ist, dass die Abbildung zwar den Teilnehmern helfen konnte, den Text besser zu verstehen, sie jedoch zum Verständnis nicht zwingend notwendig war und auch nicht den kompletten Beweis veranschaulichte. Ferner waren die Teilnehmer alle mit mathematischen Beweisen im Allgemeinen und mit den dargebotenen Inhalten aus Lehrbüchern für Studienanfänger im Speziellen vertraut. Das Ergebnis bei Item 1 ist möglicherweise dadurch erklärbar, dass die Teilnehmer zunächst annahmen, dass die Verständnisfragen zu den Items explizit auf die Abbildung Bezug nehmen. Nachdem sie beim Beantworten der ersten Fragen merkten, dass dies nicht der Fall ist, kehrten sie zu ihrem natürlichem Leseverhalten zurück und schenkten der Abbildung weniger Beachtung. Eine Analyse der Blickpfade zeigte ferner, dass die Blicke der Teilnehmer beim Lesen der Beweise häufig zwischen dem Text und der Abbildung hin- und hersprangen, was ein Indikator dafür sein könnte, dass die Probanden versuchten, die gegebene Information zu integrieren. Dies scheint plausibel, da der Text und die Abbildung jeweils semantisch verwandt waren.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse dieser ersten Studie deuten darauf hin, dass Personen mit hoher Expertise in Mathematik eine Abbildung beachten, die gemeinsam mit einem Beweis präsentiert wird, während sie den Beweis lesen, um ihn zu verstehen. Dabei wird der Text länger betrachtet als die Abbildung. Ferner springen die Personen beim Lesen zwischen dem Text und der Abbildung, was darauf hindeutet, dass sie versuchen, die gegebenen Informationen zu verknüpfen. Außerdem kann als ein Ergebnis angesehen werden, dass die Methode des Eye Trackings prinzipiell nützlich ist, um das Leseverhalten zu analysieren. Eine detaillierte Analyse von Blickbewegungen ermöglicht zuverlässigere Schlüsse über das tatsächliche Leseverhalten als dies mit verbalen Berichten der Teilnehmer möglich gewesen wäre.

Eine Einschränkung dieser Studie ist sicherlich die geringe Teilnehmerzahl. Es sind deshalb, neben der weiteren Datenauswertung, weitere Studien geplant. Hier soll beispielsweise außer dem Einfluss von Abbildungen auch der Einfluss von den Beweis erklärenden Texten untersucht werden, da dies ebenfalls eine Methode darstellt, um Studierende beim Verstehen von Beweisen zu unterstützen. Ferner sollen Studierende in den ersten Semestern einbezogen werden, um deren Leseverhalten mit dem von Experten zu vergleichen. Langfristig kann ein besseres Verständnis des Leseverhaltens mathematischer Beweise dabei helfen, Wege zu finden, das Beweisverständnis von Studierenden bestmöglich zu unterstützen und Lehrmaterialien an die Bedürfnisse der Studierenden anzupassen.

Literatur

Dewolf, T., Van Dooren, W., Hermens, F., & Verschaffel, L. (2013). Do students attend to and profit from representational illustrations of non-standard mathematical word problems?. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 217-224). Kiel, Germany: PME.

Inglis, M, & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.

Kultusministerkonferenz (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Bonn: KMK.

Levie, W. H., & Lentz, R. (1982). Effects of Text Illustrations: A Review of Research. *Educational Communication and Technology Journal, 30*(4), 195-232.

Mayer, R. E. (2001). *Multimedia learning*. New York: Cambridge University Press.

Mejia-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 88-93). Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei.

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). *Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Jahresbericht der DMV, 111(4), 155-177.

Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.

Ralf BENÖLKEN, Münster

Von der Begabungstheorie zur Rechenschwäche – Versuch eines Brückenschlages

1. Einleitung

Nach den Ergebnissen von Vergleichsstudien wie TIMSS verfügt etwa ein Fünftel aller Grundschulkinder in Deutschland nur über elementares mathematisches Wissen (z.B. Bos et al. 2012). Insbesondere zählen dazu arithmetische Basisfähigkeiten. Hier gelangt man in das verhältnismäßig junge, interdisziplinär geprägte Forschungsfeld der „Rechenschwächen". Als mehrheitlich akzeptiert gilt, dass Rechenschwächen multifaktoriell verursacht (wobei Ursachen nicht eindeutig bestimmbar sind), aber kompensierbar sind und dass demgemäß eine möglichst frühzeitige Diagnostik und Förderung sinnvoll ist (Lorenz 2009). Desiderate bestehen hingegen beispielsweise in der Präzisierung einer tragfähigen Definition und Modellierung des Phänomens als Grundlage einer darauf aufbauenden adäquaten Diagnostik und Förderung nebst der Überprüfung ihrer jeweiligen Wirksamkeit. Das Ziel des vorliegenden Beitrags besteht darin, ausgehend von Aspekten der Modellierung mathematischer Begabungen, die disziplinübergreifend Konsens finden, die theoretisch-analytische Präzisierung einer Modellierung zur Entstehung von Rechenschwächen zu skizzieren, die sich als Grundlage einer ganzheitlichen Prozessdiagnostik eignen kann.

2. Der Begabungsbegriff in der wissenschaftlichen Diskussion

Für die Modellbildung zum Begabungsbegriff gelten die folgenden Aspekte mehrheitlich als akzeptiert (z.B. iPEGE 2009): (1) Begabung ist ein bereichsspezifisches Phänomen – so identifizierte man spezifische Merkmale mathematischer Begabungen (z.B. Käpnick 1998). (2) Es handelt sich um ein dynamisches Phänomen, d.h. ausgehend von einem individuell geprägten Potenzial entfaltet sich eine sichtbare Leistung (Performanz). (3) Begabung ist ein komplexes Phänomen, das die Berücksichtigung co-kognitiver intra- und interpersonaler Faktoren verlangt. (4) Notwendig ist eine frühzeitige, ganzheitliche (Prozess-) Diagnostik und Förderung begabter Kinder, um diese in der Entfaltung ihrer Potenziale zu unterstützen.

3. Skizze einer Diskussion von Theorienansätzen zu Rechenschwächen

An Modellierungen mathematischer Begabungen ist der Anspruch zu stellen, die in Kap. 2 genannten Aspekte zu berücksichtigen (umgesetzt z.B. bei Fuchs und Käpnick 2009). Ausgehend von der Annahme, dass Rechenschwächen keine fest erworbenen Dispositionen darstellen, wird im Fol-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 161–164). Münster: WTM-Verlag

genden begründet, dass sich diese Aspekte als Grundpositionen verwenden lassen, die sich zur Diskussion von Theorieansätzen zu Rechenschwächen eignen, d.h. als Postulate, die an diese zu stellen sind: (1) Disziplinübergreifend bemüht man sich um die Kennzeichnung spezifischer Erscheinungsformen von Rechenschwächen. Eine Modellierung des Phänomens sollte diese daher konkret ausweisen (ähnlich zu mathematischen Begabungsmerkmalen, die die Bereichsspezifik von Begabungsmodellen bestimmen). (2) Aktuelle Modellierungen zu Rechenschwächen fokussieren zunehmend deren Entwicklungsverlauf. Folglich ist zu erwarten, dass das Phänomen dynamisch dargestellt wird (ähnlich der Unterscheidung von Potenzial und Performanz in Begabungsmodellen). (3) Es gibt ein breites Spektrum angenommener Risikofaktoren für die Entstehung von Rechenschwächen, die beispielsweise ebenso in schulischen Bedingungen oder anderen Determinanten des sozialen Umfeldes wie in Faktoren im Kind selbst liegen können (z.B. Schipper 2005). Insofern sollte das Phänomen komplex abgebildet, d.h. vergleichbar zur Modellierung von Begabungen explizit der Einfluss co-kognitiver intra- und interpersonaler Faktoren einbezogen werden. (4) Aus den genannten Punkten ergibt sich analog zur Diagnostik von Begabungen, dass Modellierungen zu Rechenschwächen eine ganzheitliche (Prozess-) Diagnostik implizieren sollten.

Wie bereits angedeutet gibt es keine einheitliche, allgemein akzeptierte Definition oder Modellierung zu Rechenschwächen (und entsprechend keine einheitliche Terminologie, z.B. Lorenz und Radatz 1993). Mit Schipper (2005) sind die Klassen der „Diskrepanzdefinitionen" und der „phänomenologischen Definitionen" zu unterscheiden. Die erstgenannte Klasse entspricht der psychologisch-medizinischen Sichtweise und beschreibt das Phänomen für eine sehr kleine Gruppe von Kindern, nämlich solche, die aufgrund einer Rechenschwäche psychische Probleme entwickeln. Die damit verbundene Diagnostik basiert in der Regel auf standardisierten Testverfahren (verbleichbar einem IQ-Test), die eine Abweichung nach unten von einer erwarteten Norm anzeigen sollen. Konkrete Erscheinungsformen von Rechenschwächen weisen Diskrepanzdefinitionen meist nicht aus. Diese finden sich idealerweise demgegenüber in phänomenologischen Definitionen, die auf individuelle Förderbedarfe ausgerichtet sind. Insofern sind sie weiter gefasst und eignen sich eher als der Diskrepanzansatz für eine ganzheitliche Betrachtung von Rechenschwächen.

Für die Formulierung einer phänomenologischen Definition stellt sich die Frage nach möglichen konkreten Erscheinungsformen von Rechenschwächen. In der Literatur wird diesbezüglich eine Vielzahl auf der Basis von Erfahrungen und/oder Studien beschrieben. Am häufigsten scheinen dabei genannt zu werden (1) ein einseitig ordinales und mangelndes kardinales Zahlenverständnis, verfestigtes Zählen, (2) Schwierigkeiten beim Teil-Teil-Ganzes-Konzept, (3) ein mangelndes Verständnis des Stellenwertsystems, (4) Schwierigkeiten beim Repräsentationswechsel und (5) ein mangelndes Operationsverständnis, insbesondere bei der Division. Gerade bei jüngeren Kindern scheinen zudem (6) Retardierungen bei Vorläuferfunktionen zum Erwerb des Zahlverständnisses im Sinne Piagets eine Rolle zu spielen.

Vorhandene Modellierungen und Theorieansätze zu Rechenschwächen, die auf den genannten Definitionsklassen aufbauen, lassen sich grob den folgenden Bereichen zuordnen (siehe auch Wehrmann 2011): (1) Neuropsychologische und psychodiagnostische Modellierungen (z.B. Dehaene 1999), (2) kognitionspsychologische (fehleranalytisch- bzw. lernprozess-orientierte) Modellierungen (z.B. Lorenz und Radatz 1993) und (3) entwicklungsorientierte Modellierungen, die die Entstehung von Rechenschwächen als Ergebnis einer Interaktion verschiedener Komponenten zu erklären suchen (z.B. Nolte 2009). Die genannten Bereiche betrachten Rechenschwächen sehr konstruktiv aus unterschiedlichen Sichtweisen. Unter ganzheitlicher Perspektive erscheinen jedoch vor dem Hintergrund der eingangs formulierten Postulate Synthesen und Ergänzungen konstruktiv.

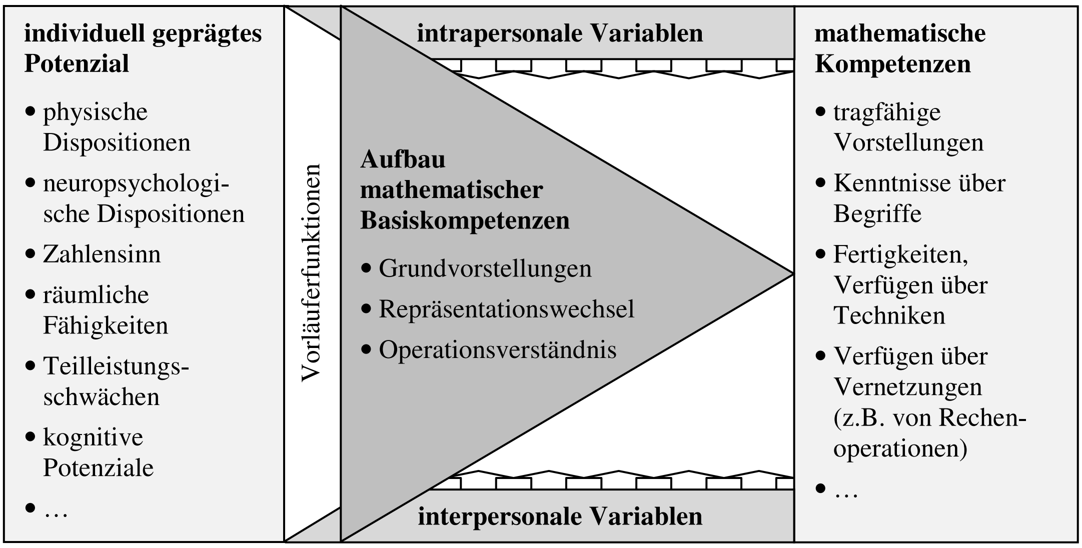


Abb. 1: Konstruktive Modellvorstellung zum Aufbau mathematischer Kompetenzen

4. Versuch eines Brückenschlages

Zur Charakterisierung der angedeuteten ganzheitlichen Sichtweise auf das Phänomen dient der Begriff der „Rechenprobleme". Aus der in den obigen Abschnitten skizzierten Diskussion ergibt sich die folgende phänomenologisch orientierte Definition in Verbindung mit der in Abb. 1 dargestellten Modellvorstellung zum Aufbau mathematischer Kompetenzen, die an aktuelle Modellierungen mathematischer Begabungen angelehnt ist: *„Rechen-*

probleme“ sind längerfristige, beobachtbare und kompensierbare Schwierigkeiten bezogen auf Vorläuferfunktionen für den Erwerb des Zahlverständnisses, Grundvorstellungen (ordinales und kardinales Zahlenverständnis, verfestigtes Zählen; Teil-Teil-Ganzes-Konzept; Verständnis des Stellenwertsystems), Repräsentationswechsel oder das Operationsverständnis (insbesondere bei der Division), die ausgehend von einem individuell geprägten Potenzial unter dem Einfluss inter- und intrapersonaler Variablen entstehen können, so dass sich Komponenten mathematischer Kompetenzen nicht auf einem entwicklungsgemäßen Niveau ausprägen.

5. Schluss

Der skizzierte Versuch, eine Brücke von der Begabungstheorie zur Rechenschwäche zu schlagen, ist als Diskussionsbeitrag zu werten, dessen Tragfähigkeit zu überprüfen ist. Prinzipiell eignet sich das umrissene Verständnis als Grundlage einer ganzheitlichen Prozessdiagnostik, die in der aktuellen Diskussion überwiegend gefordert wird.

Literatur

Bos, W.; Wendt, H.; Köller, O. & Selter, C. (Hrsg., 2012). *TIMSS 2011. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich.* Münster u.a.: Waxmann.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können.* Basel: Birkhäuser.

iPEGE [international Panel of Experts for Gifted Education] (Hrsg., 2009). *Professionelle Begabtenförderung*. Salzburg: özbf.

Fuchs, M. & Käpnick, F. (2009). *Mathe für kleine Asse.* (3. und 4. Schuljahr; Band 2). Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder.* Frankfurt am Main u.a.: Peter Lang.

Lorenz, J. H. (2009). Diagnose und Prävention von Rechenschwäche als Herausforderung im Elementar- und Primarbereich. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 35–45). Münster u.a.: Waxmann.

Lorenz, J. H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht.* Hannover: Schroedel.

Nolte, M. (2009). Rechenschwäche und Fördermöglichkeiten. In: C. Fischer, U. Westphal & C. Fischer-Ontrup (Hrsg.), *Individuelle Förderung: Lernschwierigkeiten als schulische Herausforderung. Lese-Rechtschreibschwierigkeiten. Rechenschwierigkeiten* (S. 80–91). Berlin: Lit.

Schipper, W. (2005). *Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern.* Kiel: SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G4 [http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/sinus-modul4.pdf; 10.02.2014].

Wehrmann, M. (2011). *Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten im Grundlagenbereich Arithmetik* (2. Auflage). Berlin: Köster.

Stephan BERENDONK, Bonn

Brücken zwischen elementaren mathematischen Kontexten

„Polynome verhalten sich wie ganze Zahlen". Diese fantastische Beobachtung schlägt eine Brücke zwischen dem Kontext der Funktionen und dem Kontext der Zahlen, zwischen algebraischer Geometrie und Zahlentheorie.

Der Fund einer solchen Analogie eröffnet neue Möglichkeiten: Begriffe und Argumentationen die zunächst nur aus einem der Kontexte bekannt sind, können möglicherweise bewusst in den anderen Kontext übertragen werden und führen dort zu neuen Resultaten.

Bei der Fortentwicklung der Mathematik spielen solche Brücken zwischen verschiedenen Kontexten eine wesentliche Rolle; eine Tatsache, die sich in der Schulmathematik nicht widerspiegelt. Im folgenden Beitrag werden daher einige elementare und für den Schulunterricht geeignete Beispiele mit „Brückencharakter" vorgestellt und es wird geschaut, inwiefern die jeweilige Brücke für weiteren Erkenntnisgewinn nutzbar gemacht werden kann.

1. Lo Shu

Es folgt zunächst die Beschreibung eines Zwei-Personen-Spiels: Die Zahlen von 1 bis 9 liegen, z.B. gedruckt auf Karten, auf einem Tisch. Abwechselnd nehmen sich die zwei Spieler jeweils eine der Zahlen mit dem Ziel drei Zahlen zu besitzen, deren Summe 15 ist. Der Spieler, der dies zuerst schafft, gewinnt. Sind alle 9 Karten vergeben ohne, dass einer der Spieler ein *Gewinntrio* in seinen Besitz bringen konnte, so endet das Spiel im Unentschieden.

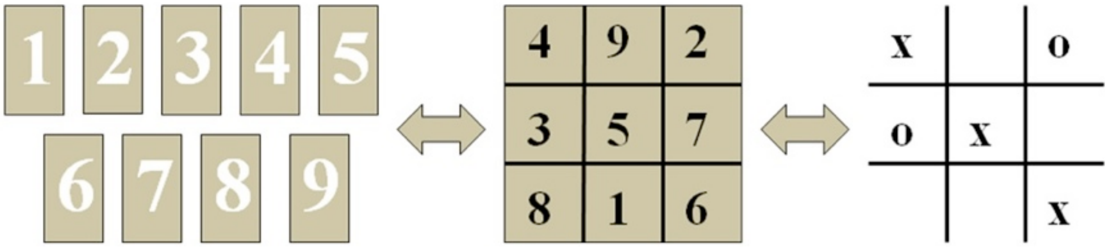
Hat Spieler 1 einen Vorteil? Hat er gar eine Gewinnstrategie? Nein, nach häufigem Spielen bekommt man den Eindruck, dass Spieler 2 stets ein Unentschieden erzwingen kann. Diese Eigenschaft erinnert an das Spiel *Tic Tac Toe*. Schreibt man sich einmal alle Gewinntrios auf, was beim Spielen hilfreich sein kann, so fallen einem noch mehr Ähnlichkeiten auf:

$$1+5+9,\ 1+6+8,\ 2+4+9,\ 2+5+8,\ 2+6+7,\ 3+4+8,\ 3+5+7,\ 4+5+6.$$

Es gibt 8 Gewinntrios bzw. Gewinnpositionen. Bei Tic Tac Toe haben wir die 3 Zeilen, die 3 Spalten und die 2 Diagonalen, also ebenfalls 8 Gewinnpositionen. Die 5 kommt, wie die Mitte bei Tic Tac Toe, als einzige Zahl in 4 Gewinnpositionen vor. Die Zahlen 2, 4, 6 und 8 kommen, wie die Ecken bei Tic Tac Toe, in 3 Gewinnpositionen vor. Schließlich treten die Zahlen 1,3,7 und 9, wie die Mitten der 1. und 3. Zeilen und Spalten bei Tic Tac Toe, nur in 2 Gewinnpositionen auf. Tatsächlich hat das hier vorgestellte

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 165–168). Münster: WTM-Verlag

Spiel nicht nur beträchtliche Gemeinsamkeiten mit Tic Tac Toe, sondern es ist das gleiche Spiel, nur eben in einem arithmetischen Gewand. Das magische Quadrat der Ordnung 3, genannt *Lo Shu*, bildet die Isomorphie zwischen den beiden Inkarnationen des Spiels.



Das Wissen um diese Isomorphie verschafft dem erfahrenen Tic Tac Toe Spieler nun einen Vorteil beim Spielen der arithmetischen Version. Er kann einfach, wie gewohnt, die geometrische Version spielen und mit Hilfe der *magischen* Brücke jeweils schauen welche Zahl zu ziehen ist. Sein ahnungsloser Gegner muss sich dahingegen ganz auf seine arithmetische Weitsicht verlassen.

Eine bessere Sicht auf die gefundene Isomorphie erhalten wir bei dem Versuch die Isomorphie zu erweitern bzw. zu verallgemeinern: Gibt es auch eine arithmetische Version von *Vier-in-einer-Reihe*? Und wie steht es mit Vier-in-einer-Reihe auf einem Torus? Kommt hier vielleicht ein panmagisches Quadrat der Ordnung 4 in Frage? Tic Tac Toe lässt sich auch mit einem 3x3x3 Würfel anstelle eines 3x3 Quadrats spielen. Kann man zu diesem Spiel, etwa mit Hilfe eines magischen Würfels, ein arithmetisches A-nalogon konstruieren?

2. Intransitivität

Wir schreiben die drei Zahlen der ersten Zeile des Lo-Shu-Quadrats jeweils auf zwei einander gegenüber liegende Seitenflächen eines Würfels. Genauso verfahren wir mit der zweiten und dritten Zeile. Wir erhalten so die nachfolgend abgebildeten Würfel:

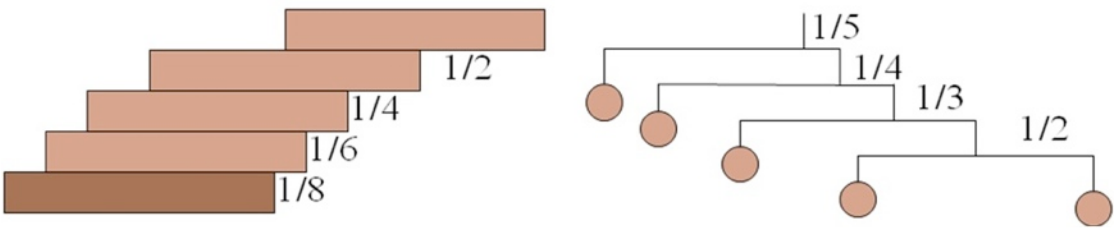
Lässt man die Würfel paarweise gegeneinander antreten, so liegt in 20 von 36 Fällen beim linken Würfel oben eine größere Zahl als beim mittleren Würfel. Der mittlere Würfel gewinnt wiederum in 20 von 36 Fällen gegen den rechten Würfel. Schließlich gewinnt – vielleicht überraschend – auch der rechte Würfel in 20 von 36 Fällen gegen den linken Würfel.

Aufgrund ihrer *symmetrischen Intransitivität* können wir mit den Würfeln das Spiel Stein-Schere-Papier (Schnick-Schnack-Schnuck) spielen: Beide Spieler besitzen alle drei Würfel und wählen daraus gleichzeitig und verdeckt einen Würfel aus. Die ausgewählten Würfel treten dann gegeneinander an. Durch dieses Duell der Würfel erhält das Spiel eine zusätzliche Glücks- bzw. Zufallskomponente. Wir sprechen daher von der *stochastischen* Version des Spiels Stein-Schere-Papier.

Häufig wird das Spiel um einen zusätzlichen Gegenstand, dem Brunnen, oder sogar um zwei zusätzliche Gegenstände, Echse und Spok, erweitert. Haben diese Erweiterungen ebenfalls einen stochastischen Zwilling? Beim Untersuchen dieser Fragen, beim Versuch also die gefundene Brücke auszubauen, trifft man wieder auf neue Fragen: Welche Würfelformen kommen für eine stochastische Version von Stein-Schere-Papier-Echse-Spok in Frage? Ein Ikosaederwürfel? Kann man auch passende Belegungen für den normalen sechsflächigen Würfel finden? Sind die gefundenen Belegungen symmetrisch bezüglich der Gegenstände? Falls nicht, welchen Gegenstand sollte man am Häufigsten spielen? Wie verhält es sich mit diesen Fragen bei 7 Gegenständen?

3. Harmonische Reihe

Wie baut man aus n kongruenten quaderförmigen Klötzchen eine Halbbrücke mit maximalem Überhang? Die linke Zeichnung der nachfolgenden Abbildung zeigt eine Halbbrücke, bei der jedes Klötzchen höchstens zwei andere Klötzchen, ein darunter liegendes und ein darüber liegendes, Klötzchen berührt. Unter solchen Halbbrücken hat diejenige den größten Überhang, bei der der Überhang jeweils des von oben gezählt k-ten Klötzchens gegenüber dem darunter liegenden Klötzchen $1/(2k)$ beträgt – wobei die Länge der Klötzchen 1 ist. Der maximale Überhang korrespondiert somit mit dem n-ten Folgeglied der harmonischen Reihe.



Die einzelnen Überhänge dieser *harmonischen Halbbrücke* lassen sich mit Hilfe des Hebelgesetzes bestimmen. In einem anderen Kontext, dem Bau von Mobiles, spielt das Hebelgesetz eine ähnliche Rolle. Auch dort können wir die Frage nach dem maximalen Überhang stellen: Gegeben seien n gewichtlose Stäbe gleicher Länge, sowie ein (unendlicher) Vorrat von gleich schweren Gewichten. Angenommen die Gewichte können nur an die Enden der Stäbe gehängt werden und zudem nur ein Gewicht pro Ende. Wie baut man aus n Stäben ein möglichst *ausladendes* Mobile, ein Mobile also, dass ein Gewicht besitzt, mit dem es sich in radialer Richtung möglichst weit von der Aufhängung an der Decke entfernen kann? Das gesuchte Mobile scheint einfach die auf den Kopf gestellte harmonische Halbbrücke zu sein. Doch wie tragfähig ist die gefundene Analogie? Lässt man die Bedingung fallen, dass die Klötzchen der Halbbrücke höchstens zwei weitere Klötzchen berühren dürfen, so kann man Halbbrücken mit größeren Überhängen als bei der harmonischen Halbbrücke finden (vgl. [4]). Wie sehen die dazu analogen Mobiles aus? Haben sie auch eine größere *Ausladentheit* als das *harmonische Mobile*?

5. Weitere Beispiele

In [1] wird beschrieben wie der Eulersche Polyedersatz, genauer der von Staudtsche Beweis des Polyedersatzes in drei verschiedenen Kontexten jeweils geleitet durch bestimmte Eigenheiten der jeweiligen Kontexte entdeckt werden kann. Nachdem die gemeinsame Struktur der Kontexte aufgedeckt und dann weiter präzisiert worden ist, wird sie bewusst genutzt um neue Einsichten über die einzelnen Kontexte zu gewinnen.

Die Multiplikation der natürlichen Zahlen lässt sich kontextgebunden zum Einen mit Hilfe einer Balkenwaage, zum Anderen über den Flächeninhalt von Rechtecken *definieren* (vgl. [2], S.59-64 und [3], S. 243-244). Zunächst mag gar nicht klar sein, dass es sich, abstrakt gesehen, um die gleiche Operation handelt. Sobald jedoch strukturelle Ähnlichkeiten (z.B. das Kommutativgesetz) zwischen den beiden Operationen erkannt sind, kann beispielsweise gefragt werden, ob sich diese auch auf analoge Weise nachweisen lassen. Auf welche grundlegenden Kenntnisse (Axiome) über die beiden Kontexte wird bei den Begründungen jeweils zurückgegriffen?

Ein letztes Beispiel folgt als Frage: Was hat eine nach innen öffnende Bustür mit dem Zeichnen einer Ellipse mit Hilfe eines Spirographen zu tun?

Der Leser ist aufgefordert nach weiteren vielleicht noch eindrucksvolleren Beispielen für Brücken zwischen elementaren Kontexten zu suchen.

Literatur

Berendonk, S. (2014): *Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz, Genetisch, explorativ, anschaulich,* Springer Spektrum.

Bruner, J.S. (1974): *Toward a Theory of Instruction*, Belknap Press.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1*, Ernst Klett Verlag.

Paterson, M., Peres, J., Thorup, M., Winkler, P., & Zwick, U. (2009): Maximum Overhang, *American Mathematical Monthly*, 116, 763-787.

Michael BESSER, Lüneburg, Andreas RICHARD, Basel, Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Basel, Dominik LEISS, Lüneburg

Texte lesen und verstehen, Lösungswege diskutieren: Das Schulbuch als zentrales Element mathematischen Kommunizierens?

Sowohl im Europäischen Referenzrahmen für Sprache als auch in den Deutschen und Schweizer Bildungsstandards für das Fach Mathematik werden (schulische) Ziele für einen aktiven Umgang mit (mathematischer) Sprache formuliert. Hierauf aufbauend werden im Rahmen des Forschungsprojekts MUS[1] zwei Mathematikschulbücher auf deren Potential zum Aufbau eines derartigen Umgangs mit (mathematischer) Sprache als Facette mathematischen Kommunizierens untersucht.

1. Aktiver Umgang mit Sprache als Facette mathematischen Kommunizierens

Der Europäische Referenzrahmen für Sprache „desribes in a comprehensive way what language learners have to learn [...] in order to use a language for communication and what knowledge and skills they have to develop as to be able to act effectively“ (COE, 2001, S. 1). Ausgehend von einem stark „action-oriented approach“ werden diese Lernziele – oder besser: Anforderungen an Lernende für eine erfolgreiche Nutzung von Sprache – mit konkretem Bezug auf sowohl mündliche als auch schriftliche sprachliche Aktivitäten alltäglicher Kommunikation diskutiert und dargestellt: Neben (I) Anforderungen auf rein linguistischer Ebene formuliert der Europäische Referenzrahmen für Sprache daher insbesondere (II) Anforderungen an Fähigkeiten der aktiven Nutzung von Sprache in kommunikativen Alltagssituationen. Diese stets adressatenbezogenen Anforderungen werden dabei als (III) kontextabhängige Anforderungen verstanden, die keineswegs losgelöst von der situativen Einbettung kommunikativer Handlungen betrachtet werden können.

Sind die Lernziele bzw. Anforderungen an Lernende für eine erfolgreiche Nutzung von Sprache im Referenzrahmen unabhängig von fachlichen Kontexten formuliert (dies ist gerade als zentrale Idee dieses Referenzrahmens anzusehen), so diskutieren sowohl die Deutschen als auch die Schweizer

[1] *Mathematik und Sprache. Projekt der Fachhochschule Nordwestschweiz (Prof. Dr. Helmut Linneweber-Lammerskitten, Andreas Richard) und der Leuphana Universität Lüneburg (Prof. Dr. Dominik Leiss, Dr. Michael Besser).*

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 169–172). Münster: WTM-Verlag

Bildungsstandards für Mathematik derartige Anforderungen mit konkretem Bezug auf dieses Schulfach (siehe Kultusministerkonferenz, 2003; Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektion, 2011). Dennoch zeigt ein Blick auf die hier formulierten mathematischen Kompetenzerwartungen eine große Nähe zu den im Europäischen Referenzrahmen formulierten Anforderungen an eine aktive Nutzung von Sprache: Das aktive Entnehmen von Informationen in kommunikativen Situationen stellt ebenso wie das Präsentieren, Diskutieren und Begründen mathematischer Sachverhalte eine zentrale Facette des Kommunizierens im Mathematikunterricht dar. Gebunden an eine spezifische Fachsprache wird die Fähigkeit eines derartigen aktiven Umgangs mit Sprache dabei keineswegs allein für rein innermathematische Kommunikation eingefordert. Vielmehr liegt auch den Bildungsstandards Deutschlands und der Schweiz ein kontextabhängiges Verständnis sowohl mündlichen als auch schriftlichen Umgangs mit Sprache zu Grunde.

2. Analyse von Schulbuchaufgaben als entscheidendes Moment zum Verstehen mathematischer Lehr-Lern-Prozesse

„Mathematische Aufgaben sind für das Lernen von Mathematik, für den Unterricht, für die Unterrichtsvorbereitung und für die Evaluation des Wissensstandes der Schüler von zentraler Bedeutung. Aufgaben sind die schulgemäßen Formen für mathematische Probleme ...“ (Bromme, Seeger & Steinbring, 1990, S. 1). Ein derartiges Verständnis von Aufgaben als zentrales Element von Mathematikunterricht findet sich in vielfältigen Diskussionen zu allgemeinen Fragen des Lehrens und Lernens von Mathematik: Als besondere, dem Fach Mathematik inhärente Charakteristik gilt die Arbeit mit Aufgaben als „centrally placed at all levels of mathematics teaching“ (Christiansen & Walther, 1986, S. 244), ein erfolgreicher Aufbau mathematischen Wissens gilt als Resultat „fortgesetzte[r], aktive[r] Auseinandersetzung mit Aufgaben“ (Renkl, 1991, S. 14). Im Einklang hiermit und ausgehend von grundsätzlichen Fragen nach erfolgreichem Lehren und Lernen von Mathematik im Allgemeinen sowie nach Fragen eines gezielten Aufbaus mathematischer Kompetenzen im Speziellen stellt eine Analyse von Mathematikaufgaben bezüglich deren Anforderungen an schulische Lernprozesse ein entscheidendes Moment zum Verstehen mathematischer Lernprozesse dar. Mit Blick auf die Tatsache, dass „Schulbücher [...] zum Großteil aus Aufgaben“ (Krainer, 1991, S. 297) bestehen, ist eine Analyse von Schulbuchaufgaben bzgl. deren Potential zur Unterstützung eins gezielten Aufbaus mathematischer Kompetenzen – und hier nun: mathematischen Kommunizierens – daher als Ausgangspunkt für vertiefende Auseinandersetzungen mit Fragen nach einem erfolgreichen, aktiven Umgang mit Sprache im Fach Mathematik zu verstehen.

3. Das Forschungsprojekt „Mathematik und Sprache"

Das Forschungsprojekt „Mathematik und Sprache" sieht im Aufbau von Fähigkeiten zum aktiven Umgang mit Sprache ein wichtiges Ziel eines modernen (Mathematik-) Unterrichts und in (Schulbuch-) Aufgaben ein wichtiges Mittel für das erfolgreiche Lehren und Lernen von Mathematik. Das Forschungsprojekt untersucht deshalb die im Kontext von Schulbüchern an Schülerinnen und Schüler gestellten Anforderungen an deren aktiven Umgang mit Sprache im Fach Mathematik.

Forschungsfrage: Welche Anforderungen an den aktiven Umgang mit Sprache liegen Aufgaben verschiedener Schulbücher zu Grunde?

Ausgehend von im Europäischen Referenzrahmen für Sprache formulierten Anforderungen und einhergehend mit spezifischen Zielen bzgl. des Aufbaus mathematischer Kommunikationskompetenz sowohl Deutscher als auch Schweizer Bildungsstandards liegt den Analysen der Schulbücher bzw. primär der in Schulbüchern eingesetzten Aufgaben folgendes Kategoriensystem zu Grunde:

I) Anforderungen auf linguistischer Ebene: Welche/ Wie viele mathematischen Fachwörter kommen im Schulbuch vor? Inwieweit bietet das Schulbuch den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, zu vorkommenden mathematischen Fachwörtern eine zugehörige Bedeutung aufzubauen?

II) Anforderungen an sprachliche Aktivitäten: In welchem Umfang müssen Informationen welcher Quelle auf welche Art und Weise entnommen werden? Inwieweit müssen eigene Überlegungen von Schülerinnen und Schülern dargelegt, diskutiert und/ oder begründet werden? Wird eine aktive, schriftliche oder mündliche, adressatenbezogene Präsentation eingefordert bzw. ist diese notwendig?

III) Kontextabhängigkeit der Anforderungen: Welcher Kontext liegt kommunikativen Situationen (von Aufgaben) in Schulbüchern zu Grunde? Inwieweit fokussieren Schulbücher allein auf rein innermathematische Kontexte, inwieweit ist eine sprachliche Auseinandersetzung mit Mathematik in außermathematischen Kontexten notwendig?

4. Erste Ergebnisse, Ausblick und Implikationen

Erste Ergebnisse beispielhafter Analysen zweier Schulbücher, die zu den verbreitetsten Mathematikbüchern in Deutschland bzw. der Schweiz zählen, am Leitfaden des obigen Kategoriensystems zeigen: Anforderungen an einen Umgang mit Fachwörtern sind über Schulbücher hinweg ebenso keineswegs vergleichbar wie Anforderungen an einen aktiven Umgang mit Sprache. Vielmehr scheinen Schulbücher auf bestimmte Arten der Aufbereitung von Quellen zu fokussieren und spezifische Arten der Darlegung mathematischer Überlegungen einzufordern. Anforderungen an einzelne Aspekte eines aktiven Umgangs mit Sprache (etwa: diskutieren, begründen) sind in Schulbüchern teils gar nicht vorhanden. Auch variiert der Umfang nicht rein innermathematischer Kommunikationssituationen zwischen Schulbüchern erheblich.

So vorläufig diese Ergebnisse sein mögen – so deutlich lässt sich aus diesen dennoch bereits ableiten: Wenn Aufgaben das zentrale Element des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht darstellen und wenn Schulbücher – verstanden als Aufgabensammlung – diese Aufgaben für den Unterricht anbieten, dann hängen von der Wahl des Schulbuchs in erheblichem Ausmaß die Anforderungen hier vorkommender Aufgaben an den aktiven Umgang mit Sprache von Schülerinnen und Schülern ab.

Literatur

Bromme, R., Seeger, F. & Steinbring, H. (1990). Aufgaben, Fehler und Aufgabensysteme. In *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (S. 1-30). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Hrsg.), *Perspectives on mathematics education* (S. 243-308). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

COE (Council of Europe) (2001). Common European framework of reference for languages: learning, teaching, assessment (CEFR). Verfügbar unter http://www.coe.int/t/dg4/linguistic/Source/Framework_EN.pdf (20.13.14).

Krainer, K. (1991). Aufgaben als elementare Bausteine didaktischen Denkens und Handelns. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 25. Bundestagung für Didaktik der Mathematik* (S. 297-300). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* München: Luchterhand.

Renkl, A. (1991). *Die Bedeutung der Aufgaben- und Rückmeldungsgestaltung für die Leistungsentwicklung im Fach Mathematik*. München: O. V.

Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektion (Hrsg.). (2011). *Grundkompetenzen für die Mathematik.* Verfügbar unter http://edudoc.ch/record/96784/files (18.03.14).

Michael BESSER, Lüneburg, Dominik LEISS, Lüneburg, Natalie TROPPER, Frankfurt

Wirkung von Lehrerfortbildungen auf Expertise von Lehrkräften: Verschwendete Zeit oder Chance zur Unterrichtsentwicklung?

Im Rahmen des DFG-Forschungsprojekts Co²CA[1] haben 67 Mathematiklehrkräfte an wissenschaftlich begleiteten und evaluierten Lehrerfortbildungen teilgenommen. Aufgeteilt auf zwei Untersuchungsbedingungen wird die Wirkung dieser Fortbildungen auf das Wissen über lernförderliche Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung im kompetenzorientierten Mathematikunterricht als spezifische fachdidaktische Expertisefacette von Lehrkräften untersucht. Hierzu wird auf einen neu entwickelten, fortbildungssensitiven und fachdidaktischen Expertisetest zurückgegriffen.

1. Professionelles Wissen und Können von Lehrkräften als Bedingungsfaktor für erfolgreiches Lehren und Lernen

Im Spannungsfeld einer Auseinandersetzung mit Bedingungsfaktoren für erfolgreiches Lehren und Lernen in der Schule stellen vielfältige Überlegungen zur Bedeutung der Lehrkraft für das Gelingen von Lernprozessen einen zentralen Ausgangspunkt zum Verstehen schulischen Lernens dar. Mal mit Fokus auf Persönlichkeitsmerkmale, mal mit Fokus auf die Lehrkraft als Organisator von Lehr-Lern-Prozessen gilt dabei spätestens seit Beginn des 21. Jahrhunderts eine Auseinandersetzung mit dem professionellen Wissen und Können von Lehrkräften als erfolgversprechender Ansatz zur Beschreibung von Bedingungsfaktoren für erfolgreiches Lehren und Lernen in der Schule (vgl. u. a. Bromme, 1992). Professionelles Wissen und Können als spezifische Expertise von Lehrkräften verstehend und sich an der Taxonomie Shulmans (1986) orientierend wird in vielfältigen Studien die Wirkung des Fachwissens (CK: Content Knowledge), des fachdidaktischen Wissens (PCK: Pedagogical Content Knowledge) sowie des allgemein pädagogischen Wissens (PK: Pedagogical Knowledge) von Lehrkräften auf das Lehren und Lernen untersucht bzw. diskutiert. Mit speziellem Fokus auf das Fach Mathematik zeigen insbesondere die Forschungsprojekte COACTIV (Baumert et al., 2010) und TEDS (Döhrmann, Kaiser & Blömeke, 2012) sowie die Michigan-Forschergruppe (Ball, Hill & Bass, 2005) die zentrale Rolle dieser Facetten professioneller Expertise

[1] *Conditions and Consequences of Classroom Assessment:* Prof. Dr. E. Klieme, Dr. K. Rakoczy, Prof. Dr. W. Blum, Prof. Dr. D. Leiss

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 173–176). Münster: WTM-Verlag

von Lehrkräften für ein Gelingen von Unterricht auf und arbeiten die gesonderte Bedeutung des fachdidaktischen Wissens und Könnens von Lehrkräften heraus: „PCK – the area of knowledge relating specifically to the main activity of teachers, namely, communicating subject matter to students – makes the greatest contribution to explaining student progress“ (Baumert et al., 2010, S. 168). Das Wissen und Können von Lehrkräften über Möglichkeiten lernförderlicher Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung ist dabei als ein spezifisches Moment mathematikdidaktischer Expertise zu verstehen.

2. Lernförderliche Leistungsbewertung und -rückmeldung als zentrales Element eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts

Eine erfolgreiche Diagnose von Schülerleistungen sowie hiermit einhergehend eine lernförderliche Rückmeldung dieser an Schülerinnen und Schüler sind als zentrale Elemente eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts zu verstehen. Insbesondere Klassenarbeiten als spezifische Möglichkeiten des Bewertens und Rückmeldens von Schülerleistungen fassen Ergebnisse eines Lehr-Lern-Prozesses jedoch oftmals allein einmalig am Ende einer Unterrichtseinheit zusammen und bieten Schülerinnen und Schülern lediglich eine Rückmeldung in Form einer Note an (summatives Assessment). Empirische Studien zeigen hingegen die lernförderliche Wirkung von regelmäßigen, den Lernprozess wie selbstverständlich begleitenden und von Noten losgelösten Leistungsbewertungen und -rückmeldungen auf (formatives Assessment) (siehe u. a. Baker, 2007; Black & William, 2009; Hattie, 2008; Shepard, 2000). Vor allem die besondere Rolle von Feedback als entscheidendes Moment formativen Assessments wird dabei deutlich herausgestellt: Feedback, welches Lernende im Anschluss an eine vorausgegangene Leistungsbewertung über den aktuellen Lernstand informiert, welches individuelle Stärken und Schwächen aufzeigt und welches Hilfen für weiteres Lernen anbietet, gilt als den Lernprozess von Schülerinnen und Schülern unterstützende Kernidee formativer Leistungsbeurteilung und Leistungsrückmeldung (Hattie & Timperley, 2007).

3. Das Forschungsprojekt Co²CA: Lehrerfortbildungen zu formativem Assessment im kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Ausgehend von der Idee, dass insbesondere das fachdidaktische Wissen und Können von Lehrkräften entscheidend zum Gelingen von Unterricht beiträgt, und einhergehend mit empirischen Ergebnissen zur lernförderlichen Wirkung formativen Assessments wird im Rahmen des Forschungsprojekts Co²CA innerhalb einer Lehrerfortbildungsstudie den folgenden Fragen nachgegangen:

1) (Inwieweit) Ist es möglich, im Rahmen von Lehrerfortbildungen das fachdidaktische Wissen (PCK) sowie das allgemein pädagogische Wissen (PK) von Lehrkräften zu formativem Assessment im kompetenzorientierten Mathematikunterricht gezielt zu fördern?
2) (Inwieweit) Gelingt es, Testinstrumente zu entwickeln, die PCK und PK der Lehrkräfte zu formativem Assessment am Ende der Fortbildungen reliabel und valide erfassen?
3) (Inwieweit) Wirken sich Lehrerfortbildungen zum formativen Assessment auf den Mathematikunterricht der teilnehmenden Lehrpersonen aus?

Untergliedert in zwei Untersuchungsbedingungen nehmen im Jahr 2013 insgesamt 30 Lehrkräfte an Fortbildungen zu formativem Assessment im kompetenzorientierten Mathematikunterricht (Untersuchungsbedingung A), 37 weitere Lehrkräfte an Fortbildungen zu allgemein-didaktischen Ideen eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts (Untersuchungsbedingung B) teil. Die Fortbildungen erstrecken sich über mehrere Monate und werden wissenschaftlich begleitet bzw. evaluiert: Neu entwickelte, fortbildungssensitive Expertisetests erfassen das fachdidaktische Wissen und Können von Lehrkräften bzgl. zentraler Ideen formativen Assessments im Mathematikunterricht (PCK) sowie deren allgemein pädagogisches Wissen zu formativem Assessment (PK) am Ende der Fortbildungslehrgänge. Das Vorwissen der Lehrkräfte wird unter Rückgriff auf den fachdidaktischen Wissenstest des Forschungsprojekts COACTIV kontrolliert (siehe Krauss et al., 2008). Lehrerfragebögen erheben des Weiteren Überzeugungen der Lehrkräfte zum Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wahrnehmung der Fortbildungen, mehrfach eingesetzte Schülerfragebögen beschreiben die wahrgenommene Unterrichtsqualität in den Mathematikklassen der an den Fortbildungen teilnehmenden Lehrkräfte.

4. Erste Ergebnisse, Ausblick, offene Forschungsfragen

Auswertungen des Expertisetests zum fachdidaktischen Wissen und Können von Lehrkräften bzgl. zentraler Ideen zu formativem Assessment zeigen: Lehrkräfte der Untersuchungsbedingung A unterscheiden sich in ihrem Wissen über formative Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung deutlich von Lehrkräften der Untersuchungsbedingung B. Der hierzu herangezogene Expertisetest zur Beurteilung der Wirkung der Fortbildungen erweist sich dabei als reliables Testinstrument. Eine alleinige Wirkung des allgemein fachdidaktischen Wissens und Könnens auf diese Ergebnisse am Ende der Fortbildungen kann dabei mittels Kontrolle des Vorwissens der Lehrkräfte ausgeschlossen werden. Insgesamt ist die Vermittlung bzw.

der gezielte Aufbau spezifischer, fachdidaktischer Expertise im Kontext durchgeführter Fortbildungen erfolgreich gelungen. Hierzu analoge Analysen zur Wirkung der Fortbildungen auf das allgemein-pädagogische Wissen und Können der Lehrkräfte bzgl. zentraler Ideen formativen Assessments am Ende der Fortbildungen liegen noch nicht vor. Ebenso ist insbesondere mit Blick auf die Wirkung des in den Fortbildungen aufgebauten fachdidaktischen Wissens und Können auf die Qualität von Unterricht noch unklar, inwieweit sich die vermittelte fachdidaktische Expertise der Lehrkräfte auf die Gestaltung von Mathematikunterricht auswirkt. Inwieweit die durchgeführten Lehrerfortbildungen insofern tatsächlich als „Chance für Unterrichtsentwicklung“ verstanden werden können, werden weitere Analysen zur Auswirkung dieser auf die Qualität von Mathematikunterricht zeigen.

Literatur

Baker, E. L. (2007). The end(s) of testing. *Educational Researcher, 36*, 309-317.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29(1)*, 14-17, 20-22, 43-46.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47(1),* 133-180.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21(1)*, 5-31.

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte. Zur Psychologie des professionellen Wissens.* Bern/Göttingen/Toronto: Huber.

Döhrmann, M., Kaiser, G., & Blömeke, S. (2012). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM), 44*, 325-340.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77(1)*, 81-112.

Hattie, J. (2008). *Visible Learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* London: Routledge.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. & Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100(3),* 716-725.

Shepard, L. A. (2000). The Role of Assessment in a Learning Culture. *Educational Researcher, 29*, 4-14.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 4-14.

Sarah BEUMANN, Wuppertal

Mathematik mal anders - Einblicke in den Experimentierkurs MATHematische EXperimente

Innerhalb dieses Beitrags gibt es einen Einblick in den Kurs „mathEX “ an der Junior Uni Wuppertal. An diesem außerschulischen Lernort werden innerhalb des Kurses mathematische Themen von 11- bis 14-jährigen Schülerinnen und Schülern experimentell erforscht. Es wird zunächst vorgestellt, was unter Experimenten zu verstehen ist. Anschließend wird erläutert, wie die Arbeit der Lernenden wissenschaftlich begleitet wird. Ziel dieser Forschung ist es, herauszufinden, ob Experimente dazu beitragen können, beispielsweise die Motivation dieser Schülerinnen und Schüler positiv zu beeinflussen.

1. Experimente im mathematischen Lernprozess

Schon der chinesischen Philosoph Konfuzius (ca. 551 - 479 v. Chr.) sagte:

> „Was du mir sagst, das vergesse ich. Was du mir zeigst, daran erinnere ich mich. Was du mich tun lässt, das verstehe ich.“.

In diesem Zitat wird betont, dass Lernende während ihres Lernprozesses selbstständig aktiv werden sollen. Dies wird auch von empirischen Befunden aus der Lernpsychologie untermauert. In dieser Studie wird gezeigt, dass ein Mensch 20% der Informationen behält, die er hört. Er behält 30% der Informationen, die er sieht und 50% der Informationen, von denen er hört und sieht. Wobei ein Mensch 70% der Informationen behält, wenn er selbst darüber spricht und 90% der Informationen, wenn er selbstständig aktiv wird (Decker, 1985).

Diese Forderung gilt auch für den mathematischen Lernprozess. Freudenthals (1973) betonte, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik im Entstehen erleben sollen. Diese Forderung lässt sich umsetzen, indem man Platz für entdeckendes Lernen schafft, d.h. den Prozessen des Probierens und Experimentierens Raum gibt. Auch wenn Mathematik nicht zu den empirischen Wissenschaften zählt und mathematische Sätze nicht durch eine erfolgreiche Bestätigung in einem Experiment bewiesen werden, sollte dennoch die Bedeutung von Experimenten für die Mathematik nicht unterschätzt werden (Oldenburg, 2006).

> „Ein Experiment ist ein durch Hypothesen geleitetes planvolles und kontrolliertes Handeln mit Objekten zum Zweck der Erkenntnisgewinnung durch Beobachtung.“ (Ludwig & Oldenburg, 2007)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 177–180). Münster: WTM-Verlag

Unterschieden wird dabei zwischen inner- und außermathematischen Experimenten. Bei innermathematischen Experimenten werden mathematische Zusammenhänge erkundet (Barzel, Büchter & Leuders, 2007; Philipp, 2012), wie z.B. Besonderheiten von ANNA- oder IRI-Zahlen. Beispiele für außermathematische Experimente können sein:

- Geometrische Experimente: π messen, Volumenformel von Kegel und Zylinder durch Umschüttvorgänge
- Algebraische Experimente: Abkühlung einer Tasse Tee oder Kaffee
- Stochastische Experimente: Geschmackstests, Würfelexperimente mit verschiedenen Würfeln.

Während eines Experimentiervorganges werden die Schülerinnen und Schüler selbstständig aktiv, was die Behaltensquote deutlich verbessern sollte (Decker, 1985). Darüber hinaus lassen sich Merkmalen eines guten Unterrichts von Meyer (2004) mit Hilfe von Experimentalsituationen umsetzen. Experimente bieten Raum für entdeckendes Lernen, sie sind anschaulich und durch die Versuchsanordnung immer klar strukturiert. Sie bieten die Möglichkeit der Differenzierung und schaffen ein lernförderliches Klima.

2. Experimentierkreislauf

Während eines Experimentiervorganges werden verschiedene Vorgänge durchlaufen: Eine Frage stellen → eine Hypothese bilden → eine Durchführung planen → Experiment durchführen, beobachten und dokumentieren → Ergebnisse auswerten (Ludwig & Oldenburg, 2007; Mikelskis-Seifert & Wiebel, 2011).

In Anlehnung an die zuvor beschriebenen Vorgänge, wie sie auch in den Naturwissenschaften zu finden sind, und einem Experimentalkreisel zum Experimentieren in der Geometrie (Leuders, Ludwig & Oldenburg, 2006) ist der folgende Experimentierkreislauf entstanden:

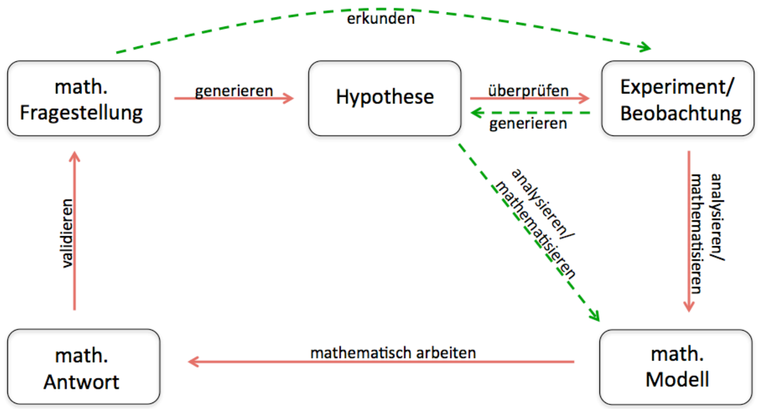


Abb. Experimentierkreislauf

In einer Experimentalsituation ist eine mathematische Fragestellung gegeben, die es zu ergründen gilt. Aus dieser weit gefassten Fragestellung wird eine Hypothese generiert, die in einem Experiment überprüft wird. Die Beobachtungen werden festgehalten, analysiert und mathematisiert. Der Lernende gelangt zu einer mathematischen Antwort, indem er sich ein gewähltes mathematisches Modell zu Nutze macht und Mathematik betreibt. Diese Antwort kann dann im Hinblick auf die zuvor gestellte mathematische Frage validiert werden.

Des Weiteren sind gestrichelte Pfeile im Modell zu erkennen. Zu Beobachten, innerhalb der von mir gestellten Experimentalsituationen war, dass Schülerinnen und Schüler nicht immer eine Hypothese aus einer Fragestellung generieren, sondern einfach in den Experimentiervorgang starten. Durch die gefundenen Beobachtungen wird dann eine Hypothese generiert. Durch anschließendes Analysieren und Mathematisieren gelangen die Lernenden nun zum mathematischen Modell und wiederum zur mathematischen Antwort.

2. Der Kurs „mathEx“ an der Junior Uni Wuppertal

Bisher wurden drei Experimentierkurse an der Junior Uni Wuppertal von mir begleitet, jeweils 6- bzw. 10-stündig über mehrere Tage bzw. Wochen. Meine Kurse richten sich an 11- bis 14-Jährige Schülerinnen und Schüler, die auf freiwilliger Basis teilnehmen. Die Gruppengröße wurde von mir auf 12 Schülerinnen und Schüler begrenzt. Zu den Kursthemen zählten Experimente in der Stochastik und Experiment zu funktionalen Zusammenhängen.

Dabei wurde jeweils während einer Sitzung, die zwischen 1,5 und 2 Std. dauerte, von den Schülerinnen und Schülern eine mathematische Fragestellung in Kleingruppen erörtert. Die Generierung einer Hypothese erfolgte im Plenum um sicher zu stellen, dass die Schülerinnen und Schüler nicht direkt mit dem Experimentiervorgang beginnen (s. gestrichelte Pfeile im Modell).

3. Zusammenfassung und Ausblick

Aus meinen bisherigen Beobachtungen und den theoretischen Überlegungen ergibt sich für mich folgende Forschungsfrage: Inwiefern beschreibt der Experimentierkreislauf den realen Experimentiervorgang der Schülerinnen und Schüler?

Alle bisher durchgeführten Experimentierkurse fanden an einem außerschulischen Lernort statt, der losgelöst vom Curriculum war. Ich als Lehrperson bin weder an Klassenarbeiten noch an Zeitpläne gebunden. Innerhalb der Kurse stand ein großes Budget und eine große Lehrmittelauswahl zur Verfügung, so dass sich die Frage stellt, inwiefern Experimente auch in den Mathematikunterricht integriert werden können.

Experimente ermöglichen einen handlungsorientierten Unterricht, in dem die Schülerinnen und Schüler selbstständig aktiv werden. Die folgenden Zitate geben einen Eindruck, wie die Schülerinnen und Schüler mathematische Experimentalsituationen empfunden haben.

> „Endlich mal etwas probieren und nicht immer nur doof rumrechnen. So habe ich viel mehr verstanden." (Schülerin, 12 Jahre)
>
> „Experimentieren und Mathematik? Das passte für mich gar nicht zusammen. Aber so kann Mathe echt Spaß machen!" (Schüler, 13 Jahre)

Aus dieser zweiten Äußerung ergibt sich meine letzte Forschungsfrage: Welche Auswirkungen hinsichtlich der Motivation haben Experimente?

Literatur

Barzel, B., Büchter, A., Leuders, T. (2007). *Mathematik Methodik*. Berlin: Cornelsen.

Decker, F. (1985). *Motivierende Bildungsarbeit mit Lernschwachen und Ungelernten. Neue Ansätze und Einsichten für die Aus- und Weiterbildung.* Sindelfingen: Expert-Verlag.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Stuttgart: Klett.

Leuders, T., Ludwig, M., Oldenburg, R. (2006). Experimentieren im Geometrieunterricht. In Leuders, T., Ludwig, M., Oldenburg, R. (Hrsg.). *Experimentieren im Geometrieunterricht* (S. 1-10) Hildesheim: Franzbecker.

Ludwig, M., Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren. Mathematik lehren 141, 4-11.

Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Berlin: Cornelsen.

Mikelskis-Seifert, S., Wiebel, K. (2011). *Anschlussfähige naturwissenschaftliche Kompetenzen erwerben durch Experimentieren.* Publikation des Programms SINUS an Grundschulen.

Philipp, K. (201). *Experimentelles Denken*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rolf BIEHLER, Ana KUZLE, Wilfried DUTKOWSKI, Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Gaby HEINTZ

GeKoDyn: Eine Fortbildungsreihe zur dynamischen und kompetenzorientierten Sicht auf die euklidische Geometrie

Die Fortbildungsreihe „Dynamische und kompetenzorientierte Sicht auf die euklidische Geometrie“ (GeKoDyn) wurde im Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) entwickelt und wird ab März 2014 für insgesamt fast 100 angemeldete Lehrkräfte durchgeführt.

1. Konzept der Fortbildungsreihe „GeKoDyn“

Die Fortbildungsreihe orientiert sich an den Inhalten der Nordrhein-westfälischen Kernlehrpläne für Haupt-, Real-, Gesamtschule und Gymnasium zu den folgenden Themen: (1) Geometrie: ebene und räumliche Strukturen nach Maß und Form erfassen, (2) Werkzeuge: Medien und Werkzeuge verwenden, (3) Problemlösen: Probleme erfassen, erkunden und lösen und (4) Argumentieren/ Kommunizieren: kommunizieren, präsentieren und argumentieren. Unser Ziel ist Vielfalt von angestrebten Dimensionen des Professionswissens zu erzeugen und zu vertiefen: fachliches Wissen und Kompetenz, fachdidaktisches Wissen, DGS-Werkzeugkompetenz und fachdidaktisches Wissen zum DGS-Einsatz (Koehler & Mishra, 2005).

Die erste Fortbildungsreihe startet exemplarisch an 3 Standorten in NRW und soll anschließend verbreitert werden. Sie basiert auf vier Modulen basiert, die bereits in verschiedenen Schulen der Sekundarstufe I erprobt worden sind. Darin werden die Lehrkräfte schrittweise in fachinhaltlichem und fachdidaktischem Geometrie-Wissen fortgebildet. Distanzphasen zwischen den Fortbildungsterminen schaffen gezielte Möglichkeiten zur Erprobung im eigenen Geometrieunterricht. Mit anderen Worten: die Veranstaltungen verbinden mehrere theorie- und praxisbezogene Arbeitseinheiten und orientieren sich dabei inhaltlich und methodisch an Gestaltungsprinzipien prozessorientierter Lernarrangements und wie diese im Geometrieunterricht praktisch umgesetzt werden können. Mit Blick auf die gewünschte Nachhaltigkeit der Fortbildung bieten wir den Lehrkräften weitere Unterstützung, additive und vertiefende Module an, z. B. ein Modul zur vertieften Handhabung von GeoGebra.

Hinsichtlich einer zusätzlichen Qualifikation als Moderatorinnen und Moderatoren bieten wir ein weiteres Modul M: „Geometrie in der Sekundarstufe I - Fortbildungen gestalten und durchführen“ an.

Die vier Hauptbestandteile der Qualifizierung werden nun vorgestellt.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 181–184). Münster: WTM-Verlag

2. Inhaltliches Konzept der Fortbildungsreihe „GeKoDyn"

Modul A: Geometrie dynamisch lehren und lernen

Zunächst erhalten die Teilnehmer einen Überblick und einen didaktischen Rahmen zu digitalen Werkzeugen sowie zu inhaltlichen und prozessorientierten Kompetenzen des Geometrieunterrichts. Das Modul bietet einen möglichst niederschwelligen Einstieg in die Nutzung von GeoGebra in Form dynamischer Arbeitsblätter. Dabei steht eine dynamische Visualisierung durch Zugmodus und Spur/ Ortslinie im Vordergrund (Elschenbroich 2001; Elschenbroich & Seebach, 2012-2014) und typische Sätze der Geometrie (Satz des Thales, Innenwinkelsumme) werden als Invarianzen entdeckt. Die Arbeitsblätter sollen den Lehrkräften Gelegenheit geben, die Arbeit mit dynamischer Geometrie-Software zunächst aus der Schülerperspektive zu erleben. Wir verwenden Beispiele mit Themen aus dem Pflichtbereich, die wir durch Exkurse vertiefen. Insgesamt lernen die Teilnehmer über 30 dynamische Aufgabenblätter zu den Themen: (1) Winkel am Dreieck, (2) besondere Punkte und Linien im Dreieck, (3) Flächeninhalte von Dreiecken und Vierecken und (4) Ähnlichkeit/ Zentrische Streckung/ Strahlensätze, kennen und sie erhalten Gelegenheit, sich über ihre Erfahrungen bei der Bearbeitung auszutauschen.

Modul B: Handlungsorientierter Geometrieunterricht – mit und ohne digitale Werkzeuge

Das zweite Modul baut inhaltlich auf dem Modul A auf und vertieft das fachdidaktische Wissen zu GeoGebra unter der Perspektive der Handlungsorientierung und des kooperativen Lernens. Zur Aktivierung und Sicherung von Basiswissen werden Warm-Ups auf dem Schulhof erprobt. So können beispielsweise Winkelmaße gestellt, Mittelsenkrechte und Umkreis mit Kreide und Schnur konstruiert und Eigenschaften von Parabeln im eigenen Tun selbst erfahren werden. Puzzle-Beweise, z.B. das Addieren von gleich großen Quadraten mit dem Ziel ein anderes größeres Quadrat zu erhalten, ermöglichen einen handlungsorientierten und haptischen Zugang im Unterricht zum Satz des Pythagoras. Variiert man die Ausgangsbedingungen der Aufgabenstellung so, dass man nicht gleich große Quadrate addieren möchte, gibt eine DGS durch die gezielte Nutzung von Zugmodus und Messwerkzeuge den Lernenden Lösungsideen auf. Der Mehrwert des digitalen Werkzeuges wird an dieser Stelle offensichtlich. Fachdidaktisch stehen im Modul B die Phasen des Lernens und Lehrens im Fokus: Erkunden und Beweisen, Kooperieren (Heintz, 2011), Üben und Vertiefen (Heintz, 2013), Leistung überprüfen und bewerten auch beim Einsatz von digitalen Werkzeugen. Die Unterrichtsbeispiele aus Modul A zum Einsatz von DGS werden nun mit händischen und handlungsorientierten Zugängen verbunden und für die Teilnehmer dadurch realisiert, dass sie während der Fortbildung im ersten Schritt aus Schülerperspektive kooperative Unterrichtsmethoden und Verfahren erproben, um sie dann im zweiten Schritt aus Lehrersicht reflektieren und für ihre Unterrichtspraxis adaptieren zu können.

Modul C: Ich hab's: Geometrie prozessorientiert unterrichten

Im dritten Modul werden die Themen aus dem ersten zwei Modulen weiterentwickelt und vertieft: das Wissen zum Problemlösen und Entdecken, Argumentieren und Beweisen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I (Kuzle, 2011). Ziel ist, deutlich zu machen, wie diese Kompetenzen langfristig in einen innovativen Geometrieunterricht unterstützt und ausgebildet werden können. In dem ersten Teil werden insbesondere Bedeutung und Ziele des Problemlösens im Geometrieunterricht thematisiert und wie die Problemlösefähigkeiten anhand schulformangemessener Beispiele (z.B. Satz von Varignon, Gamows versteckter Schatz), die mit und ohne digitale Werkzeuge lösbar sind, insbesondere auch für die nicht-gymnasialen Schulformen erworben werden können. Ziel des Moduls ist es, bei den Teilnehmern das konzeptionelle Verständnis zu vertiefen und eine kontinuierliche Weiterentwicklung des eigenen Geometrieunterrichts hin zu einem stärkeren prozessorientierten Unterricht zu initiieren, zu fördern und zu unterstützen.

In zweiten Teil wird das Thema „Entdecken, Argumentieren und Beweisen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I" thematisiert. Einerseits ist das Beweisen eine typische mathematische Tätigkeit, die insbesondere im Geometrieunterricht eine wichtige Rolle spielen sollte. Jedoch können die in der Fachwissenschaft praktizierten Vorgehensweisen nicht direkt auf den Unterricht übertragen werden. Vielmehr kann das Beweisen als Element in einen explorativen und entdeckenden Unterricht mit vielen Aktivitäten eingebettet werden. Die Lehrkräfte lernen, wie sie eine Beweiskultur durch die Reihenfolge „Handeln-Beschreiben-Vermuten-Beweisen" in deren GU anhand von angemessenen Beispielen mit Hilfe von digitalen Werkzeugen ausbilden können. Anschließend werden wir gemeinsam Chancen und Grenzen den digitalen Werkzeugen als Problemlöse-Werkzeuge hinsichtlich des Beweisens im Geometrieunterricht reflektieren und diskutieren.

Modul D: Brücken bauen - Algebra, Geometrie und Funktionen

Geometrische Problemstellungen verfügen über einen hohen Beziehungsreichtum, insbesondere zu Algebra, Arithmetik und zu Funktionen. Oft bleiben diese Gebiete aber inselhaft und es kommt nicht zum Brückenschlag. Dabei kann man sowohl das Distributivgesetz als auch die Binomischen Formeln geometrisch interpretieren und visualisieren, den Satz des

Pythagoras geometrisch und algebraisch verstehen, geometrisch Wurzeln konstruieren und vieles mehr. Aus konstruierten Objekten können gemessene Werte in Punkte **P**(x;y) übertragen werden. Deren Variation ermöglicht es dann, Ortslinien zu erzeugen und somit als Funktionsgraphen zu interpretieren (Elschenbroich, 2011). Auf diese Weise können Schüler durch dynamische Visualisierungen in geeigneten Lernumgebungen ein dynamisches Verständnis von funktionalen Zusammenhängen aufbauen: von linearen Gleichungen/Gleichungssystemen, von quadratischen und kubischen Gleichungen und Funktionen. Weiter erhalten sie einen elementaren Zugang zu Optimierungsproblemen, die auf quadratischen Zusammenhängen basieren. Als besondere didaktische und methodische Ergänzungen können mittels Schiebereglern ganzrationale Funktionen vom Grad 3, 4, 5 auf ihre Symmetrieeigenschaften untersucht werden, bzw. ganz elementar den Einfluss der Parameter in diesen Funktionen visualisiert werden.

Transfer in die Unterrichtspraxis

Insbesondere ist angestrebt, die GeKoDyn-Fortbildungsmaterialien mit Lehrkräften zu erproben. Schließlich gewinnt der Unterricht dann an Qualität, wenn die erlernten Wissenselemente von den Lehrkräften genutzt werden, um die Schüler angemessen zu fordern und zu fördern. In einer Teilevaluation soll speziell das „Problemlösen“ und „Problemlösen mit Medien“ in den Fokus genommen werden. Geplant ist eine Befragung aller Teilnehmenden und ihrer Lernenden zur Geometrieunterrichtspraxis vor und nach der Fortbildung sowie eine Beobachtung des Unterrichts.

Literatur

Elschenbroich, H.-J., & Seebach, G. (2012-2014). *Geometrie entdecken! Mit GeoGebra. Teil 1 – 3* [CD-ROM]. Rosenheim: co.Tec Verlag.

Elschenbroich, H.-J. (2001). Visuelles Lehren und Lernen. In G. Kaiser (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2001* (S. 169–172). Hildesheim: Franzbecker.

Elschenbroich, H.-J. (2011). Geometrie, Funktionen und dynamische Visualisierung. In T. Krohn et al. (Hrsg.), *Mathematik für alle, Wege zum Öffnen von Mathematik. Festschrift für Wilfried Herget* (S. 69–84). Hildesheim: Franzbecker.

Heintz, G. (2011). Fördern mit Methode(n). *SEMINAR, 4* (2011), 48–56.

Heintz, G. (2013). Dreiecke kooperativ erschließen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 55* (49), 27–31.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2005). What happens when teachers design educational technology? The development of technological pedagogical content knowledge. *Journal of Educational Computing Research, 32*(2), 131–152.

Kuzle, A. (2011). *Preservice teachers' patterns of metacognitive behavior during mathematics problem solving in a dynamic geometry environment.* Doctoral Dissertation. University of Georgia–Athens, GA.

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen, Cristina SABENA, Turin, Ferdinando ARZARELLO, Turin

„Lost in translation“ - Semiotisch-theoretische Kontrolle beim argumentativen Problemlösen

Der zielgerichtete Umgang mit semiotischen Systemen ist schwer, nicht nur in der elementaren Algebra, sondern vor allem in Gebieten der Sekundarstufe II. Mit dem Konzept semiotisch-theoretischer Kontrolle in epistemischen Prozessen sollen diese Probleme untersucht und geklärt werden.

Kontrolle üben Lernende aus, wenn sie angemessene Entscheidungen in Problemlöseprozessen treffen können, d.h. “global decisions regarding the selection and implementation of resources and strategies” (Schoenfeld 1985, p. 15). Diese Entscheidungen betreffen semiotische Mittel, “when the decisions concern mainly the selection and implementation of semiotic resources”. Sie sind theoretischer Natur “when the decisions concern mainly the selection and implementation of a more or less explicit theory or parts of it […]. For example, a semiotic control is necessary to choose a suitable semiotic representation for solving a task (e.g. an algebraic formula vs. a Cartesian graph), while a theoretic control intervenes when a subject decides to use a theorem of Calculus or of Euclidean Geometry for supporting an argument” (Arzarello und Sabena 2011, S. 191). Inhaltlich beziehen sich diese Entscheidungen auf “conceptual frames”, das sind “organized set[s] of notions (i.e. mathematical objects, their properties, typical algorithms to use with them, usual arguing strategies in such a field of knowledge, etc.), which suggest(s) them [the students] how to reason, manipulate formulas, anticipate results” (Arzarello, Bazzini, and Chiappini 1995, p. 122). Diese “frames” werden mit semiotischen Mitteln dargestellt und erschließen sich Lernenden durch Interpretationen im epistemischen Handeln. Dabei fassen wir Erkenntnisprozesse als soziale Prozesse gemeinsamen Problemlösens auf und modellieren sie mit einem epistemischen Handlungsmodell, das die kollektiven epistemischen Handlungen Sammeln und Verknüpfen mathematischer Bedeutungen als Basis für das Erfassen mathematischer Strukturen (Struktursehen) unterscheidet (Bikner-Ahsbahs 2005, S. 207 ff.).

Methodologie

In einer Interview-Fallstudie weisen zwei besonders leistungsstarke Schülerinnen (R und L) der Klasse 10 nach, dass der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt, dem Brennpunkt B, und einer Leitgeraden g gleich weit entfernt sind, eine Parabel bildet. Dieses Interview wurde videographiert, transkribiert und anschließend gemäß der Frage analysiert,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 185–188). Münster: WTM-Verlag

warum semiotisch-theoretische Kontrolle in diesem Fall z.T. nur mit massiver Unterstützung des Interviewers ausgeübt werden kann. In diesem Interview bearbeiten die beiden Mädchen folgende Aufgabenstellung.

Aufgabenstellung (verkürzt):

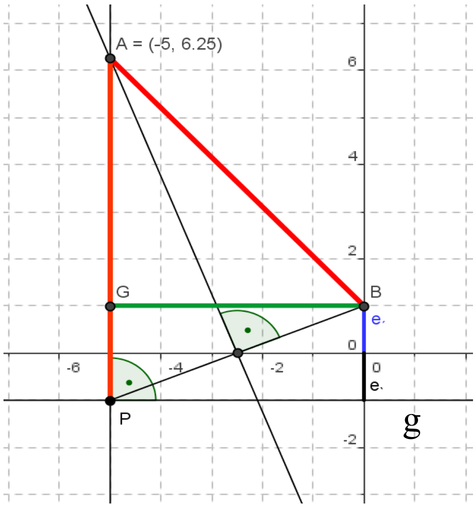


Abb. 1: Geogebra Arbeitsblatt

Der Punkt B und die Gerade g sind fest. P bewegt sich auf g. A ist Schnittpunkt zwischen der Mittelsenkrechten von PB und der Senkrechten auf g durch P. A ist Spurpunkt einer Kurve [der Parabel].

a. Markiere den Abstand zwischen A und B sowie den Abstand zwischen A und der Geraden g.
b. Stelle eine Vermutung auf.
c. Begründe deine Vermutung.
d. Welche Kurve hast du in der obigen Aufgabe erkannt?
e. Wie würdest du jemand anderen von deiner Vermutung mit dem, was du bisher herausgefunden hast, überzeugen?

Ergebnisse

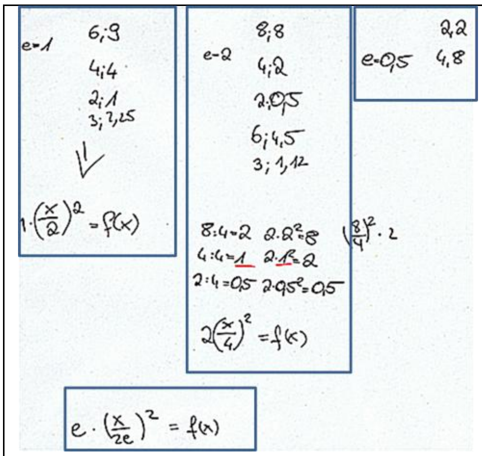


Abb. 2: Conceptual frame 1

Die Lernenden vermuten, dass hier eine Parabel vorliegt. Sie variieren A auf dem Geogebra-Arbeitsblatt und entnehmen ihm Koordinaten für verschiedene Werte von e. In Abb. 2 erkennt man, dass sie e gezielt verändern, die Koordinaten gezielt auswählen und für e=1 und e=2 Funktionsgleichungen aufstellen. Mittels verschiedener Koordinaten für e=0,5 und der beiden Gleichungen wird abschließend eine Gleichung des Funktionsgraphen in Abhängigkeit von e aufgestellt.

Die Lernenden konstituieren den „conceptual frame 1“ des *Parabelterms als verallgemeinerte arithmetische Beziehung von Zahlenpaaren*. Damit haben sie jedoch die Frage e. (Abb. 1) nicht beantwortet. Erst wiederholte Hinweise des Interviewers I (Verschriftlichung des phonetischen Ausdrucks s.u.) machen es den Lernenden möglich, die geometrische Konstruktion zu nutzen, um den algebraischen Term daraus zu gewinnen:

754 I: Okay. (*R schaut I an, lächelt*) (..) ‚ist das jetz allgemeingültich

766 I: Mein Vorschlag wär jetz dass ihr euch jetz nochmal ,eine von diesn Zeichnung ankuckt, …. (..) ,und jetz (*zeigt auf A, wackelt dabei leicht mit dem Finger*) hier allgemein- ,annehmt. ,dass dieser- (.) Punkt. A' die Koordinaten x y hat. ….

834 I: Das mach ich dann mal i-n- (.) rot' … ,das is da noch nich so viel drin' (4sec) also ich zeichne jetzt (*zeichnet eine Verbindungslinie zwischen A und dem mit "G" beschrifteten Punkt auf der y-Achse, siehe Abb. 3*) ,hier noch eine- Linie. (..) … ,und jetzt- (*setzt Kappe auf Stift*) (.) könnt ihr euch mal- (*kreist mit dem Stift um das neu entstandene Dreieck*) dieses Dreieck hier ankuckn. … (.) ,und kuckn was davon … (.) euch bekannt is. …. (6sec) (*L greift nach dem Stift, gleichzeitig zeigt R auf den rechten Winkel*)

837 Rosa: Kann man da jetz … irgenwas mitm Pythagoras anfang, …. ,da ham wir jetz ja zumindest (*schaut kurz zu I*) schonma n Quadrat drin und (*zeigt auf die mit "y-e" beschriftete Strecke*) weil das die Hypotenuse (*zeigt auf die mit "y" beschriftete Strecke*) is' (*Lisa markiert den rechten Winkel im Dreieck*) (..)

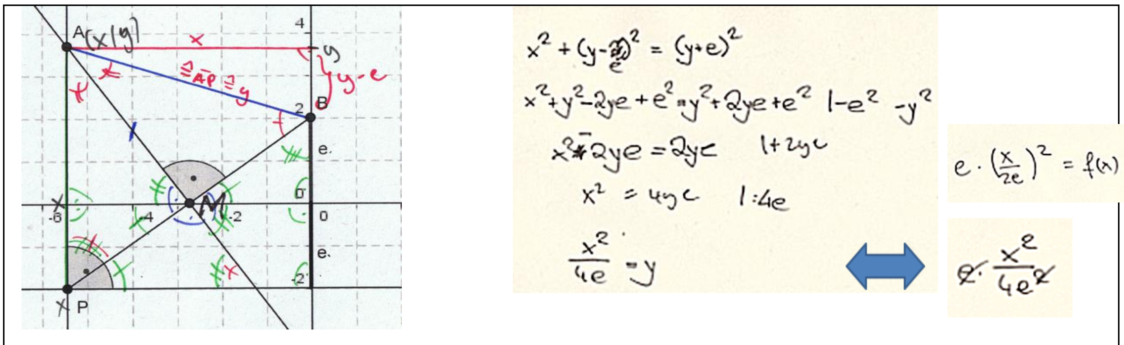


Abb. 3: Conceptual frame 2 und globale semiotisch-theoretische Kontrolle

Der Interviewer weist darauf hin, dass noch etwas zu beweisen ist (754, 766) und stellt so die Verbindung zur geometrischen Konstruktion her (834). Zuvor zeigen Rosa und Lisa, dass sie lokal, das heißt innerhalb des „conceptual frame“ 2 (*geometrische Beziehungen zur Parabelkonstruktion* (Kurve)) gezielt geometrische Beziehungen finden können. Aber erst in Zeile 837 aktiviert Rosa eine semiotisch-theoretische Kontrolle, die beide Frames miteinander verbindet und den Nachweis erbringt, dass durch diese Konstruktion in der Tat eine Parabel vorliegt.

Wir können hier zwei Arten semiotisch-theoretischer Kontrolle beobachten: lokal innerhalb der beiden „conceptual frames“ und eine globale Kontrolle, die beide Rahmen miteinander verbindet. Diese globale semiotisch-theoretische Kontrolle ist offenbar schwer zu erringen, denn es ist der Interviewer, der wiederholt initiativ wird. Warum ist dies so schwer? Um das zu klären, wird auf die Theorie des „conceptual blending“ (Fauconnier & Turner, 2003) zurückgegriffen und diese semiotisch und nicht wie üblich kognitiv gedeutet. Damit kann der hier vorliegende kreative Akt charakterisiert und die spezifische Schwierigkeit identifiziert werden.

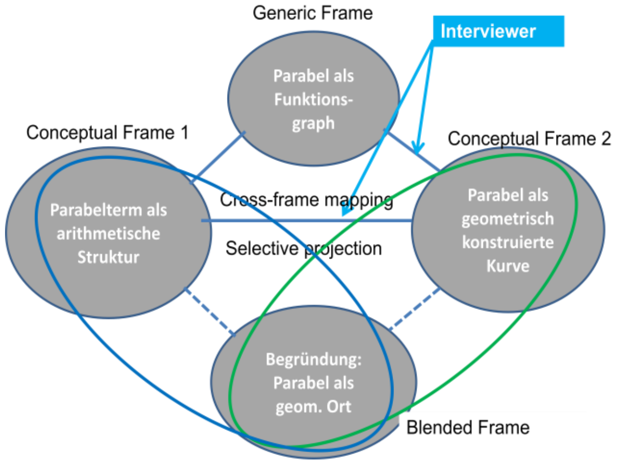


Abb. 4: Four-frame-model (in Anlehnung an Fauconnier und Turner (2003, S. 102)

Innerhalb der „conceptual frames“ ist semiotisch-theoretische Kontrolle (lokal) aktivierbar, aber nicht global zwischen den Bereichen. Eine Verbindung wird nur in eine Richtung durch die Auswahl der Koordinaten der Punkte der Kurve, die in „frame“ 1 genutzt werden, aktiviert. Die andere Richtung (die Gleichungen in frame 1 auch aus der geometrischen Konstruktion zu gewinnen) legt der Interviewer nahe. Erst dann sind die Lernenden in der Lage Inhalte aus beiden „frames“ zu überlagern und einen „blended frame“ als Begründungsrahmen zu bilden.

Nach Fauconnier & Turner (2003, S. 102) ist die Bildung eines „blended frame“ durch selektive Projektionen dann möglich, wenn es einen generischen „frame“ gibt, d.h. eine Idee, die zu beiden Bereichen gehört, und genügend Beziehungen zwischen frame 1 und 2 erzeugt werden. Die Parabel als Funktionsgraph ist eine solche generische Idee, die in der Aufgabe angelegt ist. In „frame“ 2 ist sie hypothetisch als Kurve realisiert. In „frame“ 1 wird sie durch die Koordinaten der Punkte auf dieser Kurve erzeugt. Globale semiotisch-theoretische Kontrolle scheint hier deshalb schwer zu sein, weil diese erst in wechselseitiger Abhängigkeit zusammen mit dem „conceptual blending“ aufgebaut werden muss.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Interesse zwischen Subjekt und Situation. Empirisch begründete Entwicklung einer Theorie interessendichter Situationen*. Verlag Franzbecker.

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics* 77,189–206.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1995). The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proc. 19th PME Conference*, (vol. 1, pp. 119-134). Recife, Brazil: PME.

Fouconnier, G. & Turner, M. (2003). Conceptual blening. Recherches en communicatio 19, 57-86.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic.

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

Theorie und Praxis interessendichter Situationen

Lernen mit Interesse ist nachhaltig, von hoher Qualität und persönlichkeitsbildend. Insbesondere wirkt es mangelnder Motivation entgegen. Wie aber kann Lernen mit Interesse im Mathematikunterricht gestaltet werden?

Hidi und Renninger (2006) haben empirisch basiert ein Interessenentwicklungsmodell vorgelegt. Danach beginnt Interessenentwicklung mit situationalem Interesse, das ist Interesse, das durch situationale Bedingungen gebildet wird. Geweckte situationales Interesse muss aber nicht anhalten. Es hält an, wenn die Lernenden sich involviert in die Aktivität erleben und diese als sinnvoll erfahren (Mitchell 1993). Wiederholtes situationales Interesse kann unabhängig von der Situation fortdauern, eine Entwicklung zu dispositionalem persönlichem Interesse beginnt. Fortwährende Interessenerfahrungen mit dem Gegenstand des Interesses stabilisieren das Interesse und integrieren es zunehmend in das eigene Selbst, bis es zu einem stabilen Persönlichkeitsmerkmal wird. Persönliches Interesse an Mathematik kann zwar im Mathematikunterricht aufgegriffen, aber kaum merklich beeinflusst werden. Im Mathematikunterricht relevant ist situationales Interesse, das etwa durch eine kognitiv anregende Unterrichtsgestaltung direkt gefördert werden kann (Willems 2011, S. 292f., 302-306). Im vorliegenden Beitrag wird berichtet, wie das SINUS-Set NRW Lernen mit Interesse durch die Implementation interessendichter Situationen realisiert (Hoffert 2013).

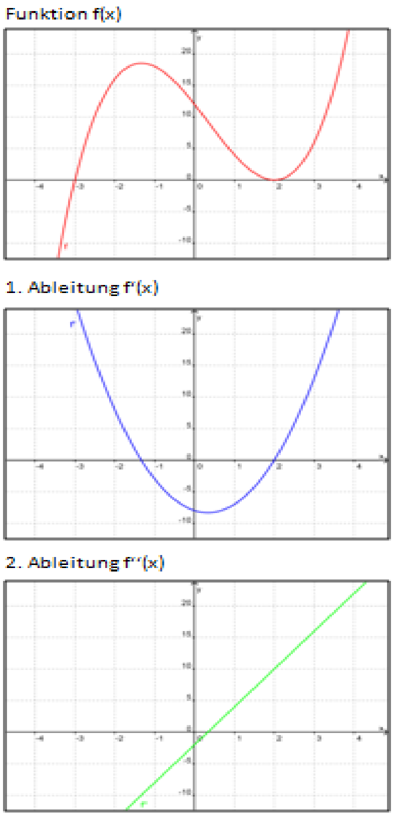
Theorie interessendichter Situationen (Bikner-Ahsbahs, 2005): Interessendichte Situationen im Mathematikunterricht liegen vor, wenn sich die Lernenden in ein mathematisches Problem involvieren (Involviertheit), sie zunehmend tiefergehende mathematische Bedeutungen konstruieren (positive Erkenntnisdynamik) und wenn sie den mathematisches Gegenstand und die Aktivität damit implizit oder explizit wertschätzen (mathematische Wertigkeit). Die Theorie interessendichter Situationen (IDS) beschreibt, welchen Mechanismen die sozialen Interkationen, die Erkenntnisprozesse und die Produktion mathematisch gehaltvoller Ideen in diesen Situationen folgen. Zum Beispiel richten sich Lehrkraft und Lernende nicht an den Antworterwartungen der Lehrkraft aus, sondern orientieren sich an der fachlichen Situation. Die epistemischen Prozesse werden unter anderem durch die epistemischen Handlungen des Sammelns, Verknüpfens und Struktursehens bestimmt, wobei (theoretisch) alle interessendichten Situationen in Struktursehen hineinführen.

Design der Implementationsstudie: Die Sinusgruppe NRW wollte das Motivationsproblem im Mathematikunterricht zu Beginn der Oberstufe lösen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 189–192). Münster: WTM-Verlag

Zu diesem Zweck wurde eine Fortbildung zur Theorie interessendichter Situationen durchgeführt, die zusammen mit psychologischer Beratung als Initiierung für die Planung interessendichter Unterrichtsstunden zur Einführung des Integrals und zur Kennzeichnung von Extrem- und Wendepunkten diente. Diese Planung wurde wissenschaftlich begleitet. Die Umsetzung der Planung wurde videographiert und anschließend in Hinblick auf folgende Fragen analysiert: Liegen interessendichte Situation vor? Welche Gestaltungselemente im Mathematikunterricht werden eingesetzt? Wurde das Motivationsproblem gelöst?

Aufgabenstellung zu den besonderen Punkten (verkürzt)



1. Übertragen Sie die Graphen auf ein Poster, zeichnen Sie Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte möglichst genau ein.
2. Suchen Sie Zusammenhänge zwischen den Graphen und den besonderen Punkten. Formulieren Sie Hypothesen in kurzen Sätzen. Begründen Sie diese.
3. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse an den Postern der anderen Gruppen. Verändern und präzisieren Sie Ihre Sätze.
4. *Überarbeitung der Hypothesen:* Schreiben Sie die Sätze, die Ihnen nach der Überprüfung immer noch richtig und wichtig erscheinen, jeweils gut lesbar auf ein DIN A4 Blatt und befestigen Sie diese an der Tafel

Abb. 1: Aufgabenstellung zu Extrem- und Wendepunkten

Ergebnisse

Die Analyse der Stunden ergab, dass alle drei Unterrichtsstunden interessendicht verliefen. Stellvertretend für alle Stunden soll das Phasendiagramm von einer dieser Stunden vorgestellt werden (Abb. 2).

Zu Beginn dieser Stunde bereitet die Lehrkraft die Lernenden auf einen etwas anderen Ablauf vor und signalisiert mit der Bemerkung „Ich bin gespannt“ Vertrauen in die Leistungsfähigkeit der Lernenden. Phase 1 beginnt mit dem Sammeln und Verknüpfen der Zusammenhänge zwischen f, f‘ und f‘‘ gemäß der vorliegenden Graphen und besonderen Punkte. Es werden Hypothesen erstellt. In Phase 2 hängen alle Plakate mit den eingezeichneten Punkten an der Wand (vgl. Abb. 3a). Die Gruppen vergleichen diese und ihre Hypothesen und überarbeiten ihre Formulierungen. In Phase 3 hängen sie die fertigen Hypothesen an die Tafel und untersuchen diese gemäß der Kriterien „allgemeingültig“, „manchmal gültig“, „in einem Fall gültig“, „nicht gültig“ (vgl. Abb. 3b-d). Der Argumentationsprozess in Phase 3 führt zu Struktursehen, indem hinreichende und notwendige Bedingungen für Extrem- und Wendepunkt gewonnen werden, auch wenn die Formulierungen der Lernenden noch brüchig erscheinen.

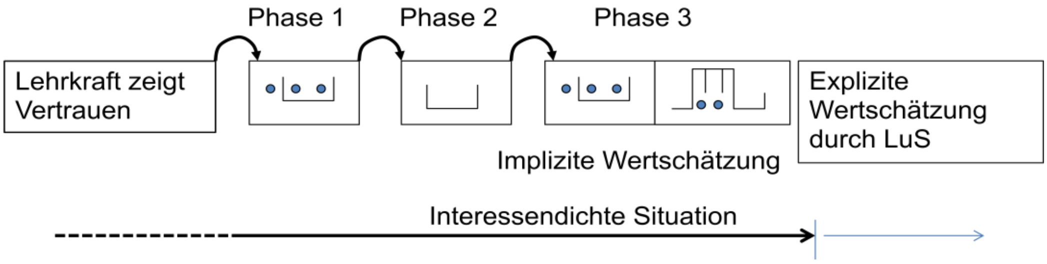


Abb. 2: Phasendiagramm der Mathematikstunde (vgl. Piktogramme 2005, S. 202 ff.)

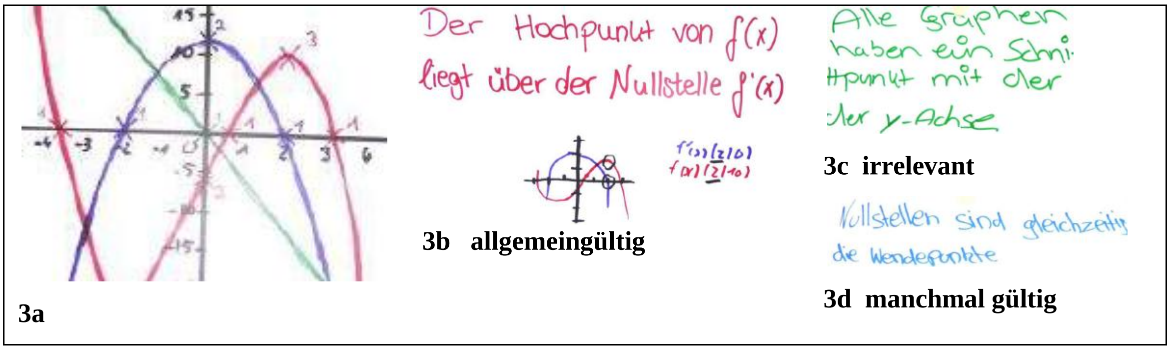


Abb. 3: Ein Posterausschnitt (3a) (3b-d) Hypothesenformulierungen

Wie wurden die Merkmale interessendichter Situationen realisiert? In den Gruppen befassen sich die Lernenden mit ihrer speziellen Aufgabe und sammeln und verknüpfen mathematische Bedeutungen. Dies geschieht unabhängig von den Antworterwartungen der Lehrkaft. Ähnlich verlaufen die Überarbeitungen der Hypothesen. Interessant ist vor allem Phase 3. Durch die Einordnung in unterschiedliche Grade der Generalisierbarkeit der Hypothesen erhalten alle Hypothesen einen Platz an der Tafel und erfahren zunächst einmal Wertschätzung. Im Laufe der Zeit werden die Hypothesen zunehmend klarer und präziser. Am Ende liegt eine Gruppe von Hypothesen an der Tafel vor, deren Geltung begründet worden ist. Interessant ist der Schluss einer Stunde: Es ist Nachmittag, ca. 16:00Uhr. Die Lehrkraft hat die Zeit überzogen, entschuldigt sich, bedankt sich aber auch für die Mitarbeit. Die Lernenden ihrerseits beklopfen die Stunde und wertschätzen damit explizit nicht nur diese Art des Unterrichts, sondern auch die Beiträge ihrer Mitschüler_innen.

Fazit

Die Interventionen der Lehrkräfte waren in allen Punkten erfolgreich. Sie haben die Theorie interessendichter Situation nicht nur theoretisch, sondern praktisch tief durchdrungen und zwei heuristische Lehrprinzipien entwickelt: Wertschätzung und Einrordnung von Hypothesen (für das Erarbeiten von Sätzen) und Erschließen derselben Kernidee durch unterschiedliche Anwendungssituationen (für das Erarbeiten von Begriffen).

Die beiden Unterrichtsszenarien werden zu einem fester Bestandteil des MU der beteiligen Schulen und werden auch in Fortbildungen weiter vermittelt. Zum Motivationsproblem in den Klassen schreibt U. Hoffert (email, 2013):

„Dies hatten wir so nicht erwartet. Für einige Schüler (vor allen Dingen auch für schwächere Schülerinnen und Schüler) war das Erleben von selber „Mathematik entdecken" in einer angstfreien Lernatmosphäre eine Initialzündung gewesen. Sie haben diese positive Erfahrung als Motivation mit in die darauffolgenden Stunden und Unterrichtsreihen genommen." (….) „In bereits durchgeführten Fortbildungsworkshops sind die Ergebnisse (auch in dieser [IDS + psychologische Aspekte] Kombination) als ausgesprochen hilfreich eingeschätzt worden." (….) „Dass auf der Grundlage des Konzeptes der interessendichten Situationen sich Unterrichtsszenarien entwickeln lassen, die zu einem ausgesprochen aktiven und für die Schülerinnen und Schüler motivierenden Unterricht führen können, und das unabhängig vom mathematischen Gegenstand oder Anwendungsbezug."

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Interesse zwischen Subjekt und Situation. Empirisch begründete Entwicklung einer Theorie interessendichter Situationen*. Verlag Franzbecker.

Hidi, S., & Renninger, K. (2006). The four-phase model of interest development. *Educational Psychologist,* Vol. 42 (2), 111-127.

Hoffert, U. (213) Ansätze und Materilien zur Steigerung der Motivation zu Beginn der Oberstufe. In Ministerium für Schule und Weiterbildung. *Sinus. NRW – Impulse für einen Kompetenzorientierten MU. Handreichungen, Schule in NRW Nr. 9050/1*. Düsseldorf (S. 7-30). DVD und Heft.

Mitchell, M. (1993). Situational interest. Its multifacet structure in the secondary school mathematics classroom. *Journal of Educational Psychology,* 85 (3), 424-436.

Willems, A. (2011). *Bedingungen des situationalen Interesses im Mathematikunterricht. Eine mehrebenenanalytische Perspektive.* Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Karin BINDER, Regensburg

Bayesianische Inferenz – Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Interventionen

In diesem Beitrag werden Forschungsideen vorgestellt, die im Rahmen meines Promotionsvorhabens näher untersucht werden sollen. Die geplante Dissertation ist empirisch zweigeteilt und wird auch kognitionspsychologische Grundlagenforschung beinhalten, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird.

Ziel der vorgestellten Untersuchung ist es den Nutzen zusätzlicher grafischer Darbietungen bei Bayesianischen Aufgabenstellungen zu überprüfen, um falschen Antworten entgegenzuwirken.

Relevanz der Formel von Bayes

Die Formel von Bayes hat eine Vielzahl von Anwendungen in den verschiedensten Professionen, wie in der Medizin (z. B. Garcia-Retamero & Hoffrage, 2013) oder im gerichtlichen Kontext (z. B. Krauss & Bruckmaier, 2014). Auch Bayessche Netze, die ihrerseits wiederum breite Anwendungen finden (z. B. in den Ingenieurswissenschaften) und die Bayessche Statistik (als eigener Zweig innerhalb der Statistik) beruhen auf der Formel von Bayes, weshalb dieser Formel eine hohe mathematische Relevanz zuzuschreiben ist.

Im schulischen Stochastikunterricht spielen Bayesianische Aufgaben ebenfalls eine Rolle. Selbst lange bevor das Konzept von bedingten Wahrscheinlichkeiten unterrichtet wird, ermitteln Schüler bereits Anteilswerte mittels Vierfeldertafeln oder Baumdiagrammen mit relativen Häufigkeiten. Folgende Bayesianische Aufgabe aus dem gymnasialen Schulbuch „Lambacher Schweizer 11“ illustriert eine solche typische Aufgabenstellung:

Version 1: Text mit Wahrscheinlichkeiten, keine Visualisierung

„Eine Produktion elektronischer Bauteile hat einen Ausschuss von 15 %. In der Endkontrolle wird ein nicht voll funktionsfähiges Bauteil mit 90 % Wahrscheinlichkeit erkannt. Ein einwandfreies Bauteil wird in der Endkontrolle mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % versehentlich reklamiert.“

Anschließend wird in diesem Schulbuch unter anderem nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit der ein Bauteil nicht voll funktionsfähig ist, wenn es in der Endkontrolle reklamiert wurde. Es ist also eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, die mithilfe der Formel von Bayes errechnet werden kann.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 193–196). Münster: WTM-Verlag

Theoretischer Hintergrund

Kahneman und Tversky (1972) zeigten in ihrem Forschungsprogramm „Heuristics and Biases“, dass die menschliche Urteilsbildung oftmals Verzerrungen unterliegt. Gigerenzer und Hoffrage (1995) nahmen an, dass die menschliche Inferenz bei Bayesianischen Aufgabenstellungen jedoch auch von der Repräsentation der gegebenen Informationen abhängt. Hierzu legten Sie Versuchspersonen Bayesianische Aufgaben vor. Manche Probanden erhielten die numerischen Informationen als prozentuale Angaben wie in obigem Schulbuchbeispiel. Bei anderen Versuchspersonen waren die Informationen hingegen in natürlichen Häufigkeiten gegeben.

Das vorherige Aufgabenbeispiel aus dem Schulbuch könnte in natürlichen Häufigkeiten folgendermaßen aussehen:

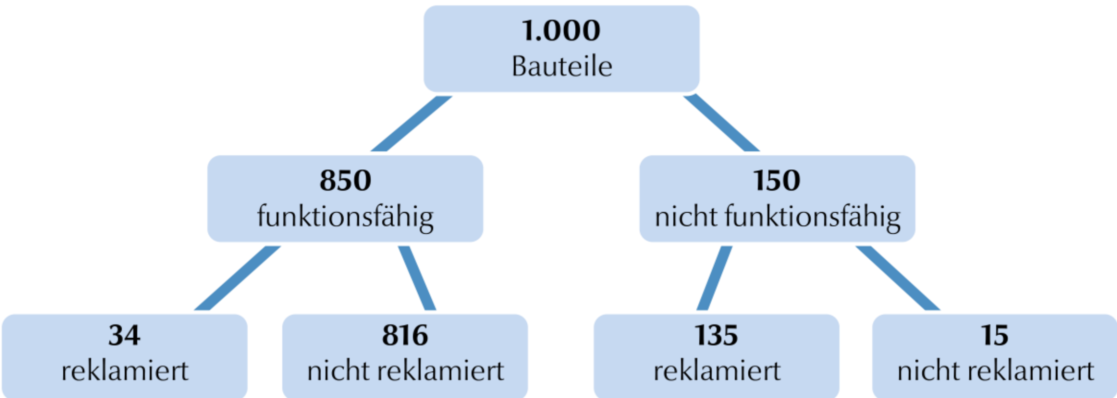
Version 2 a: Text mit natürlichen Häufigkeiten, keine Visualisierung

Bei einer Produktion elektronischer Bauteile sind 150 von 1.000 Bauteilen defekt. In der Endkontrolle werden 135 der 150 nicht voll funktionsfähigen Bauteile als defekt erkannt. 34 der 850 einwandfreien Bauteile werden in der Endkontrolle versehentlich reklamiert.

Gigerenzer und Hoffrage (1995) konnten zeigen, dass einfaches Ersetzen der Wahrscheinlichkeiten durch natürliche Häufigkeiten helfen kann, den Anteil falscher Antworten zu reduzieren. Deutlich mehr Versuchspersonen konnten in ihrer Studie bei Version 2 a die korrekte Lösung angeben.

Forscher verwenden in wissenschaftlichen Artikeln zu Bayesianischer Inferenz oftmals zusätzlich Häufigkeitsbäume, um das Zustandekommen der korrekten Lösung zu verdeutlichen. Jedoch wurde nicht untersucht inwiefern diese Darstellung tatsächlich hilft, falschen Antworten entgegenzuwirken. Nachfolgender Häufigkeitsbaum visualisiert die Aufgabenstellung in der Version mit natürlichen Häufigkeiten.

Version 2 b: Text mit natürlichen Häufigkeiten und Häufigkeitsbaum



Nun ist leichter zu sehen, dass (34 + 135) = 169 Bauteile reklamiert werden, von denen 135 tatsächlich nicht voll funktionsfähig sind. Daher stellt sich die Frage, inwiefern die zusätzliche Präsentation grafischer Darstellungen bei Bayesianischen Aufgaben im Format mit natürlichen Häufigkeiten helfen kann, um zu einer korrekten Inferenz zu finden.

Wassner (2007) untersuchte den Nutzen bestimmter grafischer Visualisierungen und konnte zeigen, dass diese im Vergleich zu reinen Textvarianten mit natürlichen Häufigkeiten noch eine weitere Verbesserung bewirken.

Brase (2008) untersuchte die Wirksamkeit ikonischer Darstellungen und Eulerdiagrammen, um kognitiven Verzerrungen bei Bayesianischen Aufgaben entgegenzuwirken. Auch Micallef et al. (2012) legten Versuchsteilnehmern eine Reihe von ikonischen Darstellungen und Eulerdiagrammen vor, konnten allerdings im Gegensatz zu Brase keine signifikante Verbesserung im Antwortverhalten feststellen. Garcia-Retamero und Hoffrage (2013) verwendeten hingegen Rasterdiagramme als zusätzliche Visualisierung und erzielten in ihrer Stichprobe wiederum weniger verzerrte Lösungen im Vergleich zur reinen Textvariante ohne Visualisierung.

Version 2 c: Text mit natürlichen Häufigkeiten und Vierfeldertafel

	reklamiert	**nicht reklamiert**	**1.000 Bauteile**
funktionsfähig	34	816	850
nicht funktionsfähig	135	15	150

Fragestellung

In der Dissertation soll ebenfalls die Wirksamkeit grafischer Darstellungen bei Bayesianischen Aufgaben untersucht werden, wobei ich mich auf Häufigkeitsbäume und Vierfeldertafeln konzentriere, die identische Informationen präsentieren. Es ergeben sich die folgenden Fragestellungen:

- Führt eine zusätzliche Präsentation der grafischen Darstellungen zu einem höheren Anteil korrekter Antworten im Vergleich zur reinen Textvariante mit natürlichen Häufigkeiten?
- Welche der Darstellungen eignet sich besonders gut, um kognitiven Verzerrungen entgegenzuwirken?

Methode

Als Versuchspersonen dienen Schüler aus Gymnasien in Bayern, die die 11. Jahrgangsstufe besuchen. Zu diesem Zeitpunkt sind die Schüler sowohl mit dem Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit vertraut als auch mit Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen mit relativen Häufigkeiten.

Es gibt vier verschiedene Aufgabentypen, gemäß nachfolgender Tabelle. Jeder der Schüler erhält zwei Aufgaben unterschiedlichen Typs zu zwei verschiedenen Kontexten, wobei eine der beiden Aufgaben eine zusätzliche Visualisierung enthält.

Version	Aufgabentext	Visualisierung
1	Wahrscheinlichkeitsversion	keine
2 a	Häufigkeitsversion	keine
2 b	Häufigkeitsversion	Häufigkeitsbaum
2 c	Häufigkeitsversion	Vierfeldertafel

Ausblick

In Kürze erfolgen die endgültige Ausarbeitung der Testbögen und eine Pilotierung der Untersuchung. Nach der Datenerhebung ist eine Erweiterung der Studie auf komplexe Bayesianische Aufgaben geplant. Es handelt sich hierbei um Aufgabenstellungen, in denen noch ein weiterer Hinweisreiz gegeben ist. Der Häufigkeitsbaum enthält dann also eine weitere Ebene und die Aufgabenstellung wird komplexer. Auch hierbei soll wieder die Fragestellung überprüft werden, ob die zusätzliche Präsentation einer grafischen Darstellung die Findung der korrekten Lösung unterstützen kann.

Literatur

Brase, G. L. (2008). Pictorial representations in statistical reasoning. *Applied cognitive psychology, 23*(3), 369–381.

Garcia-Retamero, R. & Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patients. *Social Science & Medicine, 83*, 27–33.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102*(4), 684–704.

Götz, H. et al. (2009). *Lambacher Schweizer 11 – Mathematik für Gymnasien: Bayern, 1. Auflage* (S. 193). Stuttgart: Klett.

Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2014). Eignet sich die Formel von Bayes für Gerichtsverfahren? In U. Sproesser, S. Wessolowski & C. Wörn (Hrsg.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt* (S. 123–132). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Micallef, L., Dragicevic, P. & Fekete, J. (2012). Assessing the effect of visualizations on bayesian reasoning through crowdsourcing. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on, 18*(12), 2536–2545.

Wassner, C. (2007). Förderung Bayesianischen Denkens – Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. *KaDiSto Band 4*, Kassel.

Jan BLOCK, Braunschweig

Eine didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen als Konzeptualisierung für flexibles algebraisches Handeln

Flexibles algebraisches Handeln beim Lösen quadratischer Gleichungen ist gekennzeichnet durch die Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens, das in Abhängigkeit von den spezifischen Merkmalen der Gleichung ausgewählt wird (Block 2012, 2013). Bei quadratischen Gleichungen sind die Strukturen der Gleichung und der Terme sowie die auftretenden Zahlen relevant (Abb. 1).

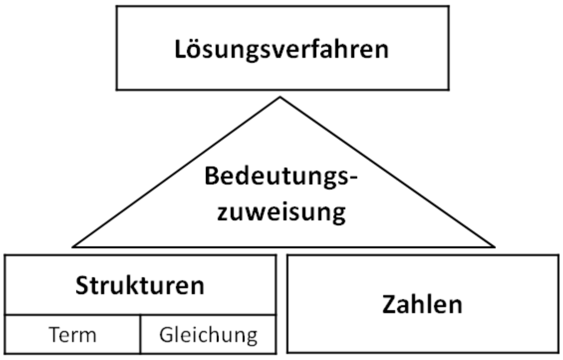


Abb. 1: Einflussfaktoren beim Lösen quadratischer Gleichungen

In einer explorativen Studie mit 57 Schülerinnen und Schülern (Jahrgang 9 und 10, Gymnasium) wird den Fragen nachgegangen, welche Merkmale quadratischer Gleichungen Schüler wahrnehmen und welche Bedeutungen sie diesen zuweisen. Als Bezugsrahmen für die Analyse und Interpretation der Befunde dient eine *didaktische Landkarte*: eine (grafische dargestellte) Beschreibung eines Sachverhalts, die die für eine didaktische Betrachtung unter bestimmten Fragestellungen wesentlichen Informationen enthält.

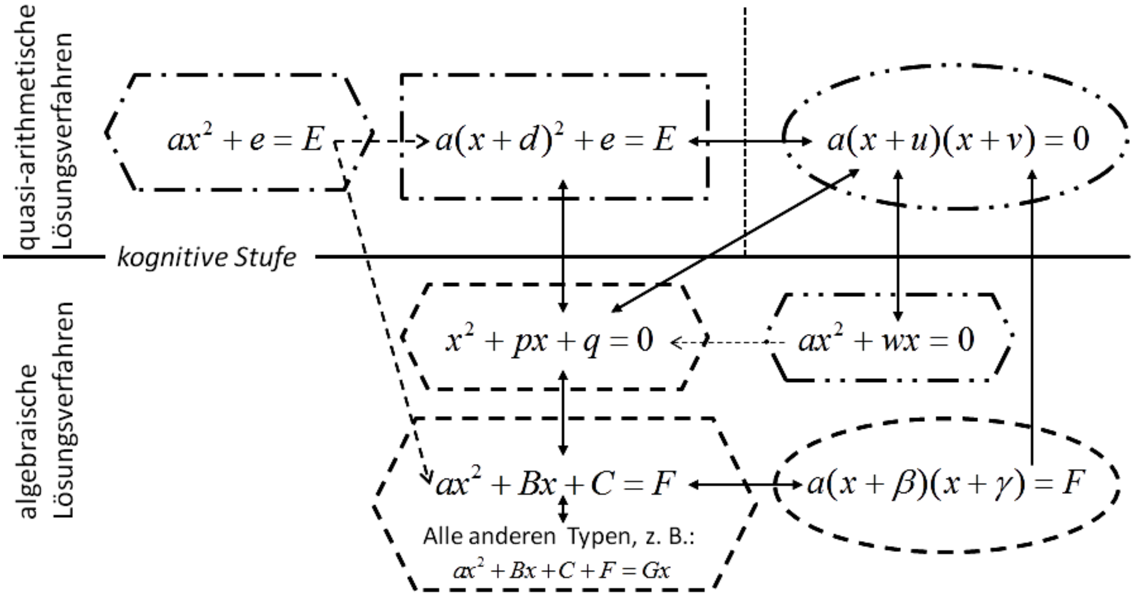


Abb. 2: Didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen

Die Typen quadratischer Gleichungen lassen sich auf der didaktischen Landkarte (Abb. 2) zunächst in zwei Klassen einteilen, die sich dadurch

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 197–200). Münster: WTM-Verlag

unterscheiden, dass sie mit quasi-arithmetischen oder algebraischen Verfahren lösbar sind. Bereits Studien von Filloy & Rojano (1984) differenzieren zwischen Klassen linearer Gleichungen in dieser Art und konstatieren einen „didactical cut“ zwischen diesen Klassen, der u. a. von Herscovics & Linchevski (1994) kritisch diskutiert wurde. Zur Beschreibung des qualitativen Unterschieds dieser beiden Klassen eignet sich der Begriff „kognitive Stufe“, da die unterschiedlichen Typen quadratischer Gleichungen verschiedene Anforderungen hinsichtlich algebraischer bzw. arithmetischer Fähigkeiten beim Lösen stellen. Die quasi-algebraisch lösbaren Typen können, ähnlich wie entsprechende lineare Gleichungen, ohne ein Operieren mit der Variablen gelöst werden, indem geeignete Umkehroperationen angewandt werden. Bei den algebraisch lösbaren Typen ist es nicht möglich, die auftretenden Terme in einem Operatordiagramm darzustellen. Diese Gleichungen sind nicht durch Umkehroperationen lösbar, sondern es ist ein Operieren mit der Variablen nötig. Der faktorisierte Term der Gleichung $a(x+u)(x+v)=0$ ist zwar nicht als Operatordiagramm darstellbar, dennoch können die Lösungen ohne algebraische Operationen durch Berücksichtigung der Nullteilerfreiheit des Köpers der reellen Zahlen bestimmt werden. Dieser Sonderfall wird durch die senkrechte, gestrichelte Trennlinie angezeigt. Die Pfeile weisen auf Transformationsmöglichkeiten der verschiedenen Gleichungstypen hin und die gestrichelten Pfeile zeigen an, dass es sich um Spezialfälle handelt. So ist z. B. zu erkennen, dass der Gleichungstyp $ax^2+e=E$ sowohl als Spezialfall einer Gleichung in der sogenannten Scheitelpunktform als auch einer Gleichung in allgemeiner Form interpretiert werden kann.

Die in den Gleichungen auftretenden Terme unterscheiden sich hinsichtlich ihres Typs im Erscheinungsbild, nach Dreyfus & Hoch (2004) also hinsichtlich ihrer „actual structures“. In der Landkarte zeigen die Formen der Umrandungen den Typ des Terms an. Hier ist zu unterscheiden in Produkt (Ellipse), Summe (Sechseck) und den Spezialfall Scheitelpunktform (Rechteck), bei der die Variable linear in einem Produkt auftritt, der Term aber eine Summe ist. Die Linienart der Umrandungen differenziert die Typen von Gleichungen weiter nach adäquaten Lösungsverfahren. Hier kann unterschieden werden zwischen p-q-Formel (gestrichelt), Radizieren (Punkt-Strich) und Faktorisieren/Nullteilerfreiheit (Punkt-Punkt-Strich).

Es ist erkennbar, dass die Klassifizierungen nach Typen der Terme, quasi-arithmetisch bzw. algebraisch lösbaren Gleichungen und adäquaten Lösungsverfahren in komplexer Weise miteinander korrespondieren. Zur Auswahl eines adäquaten Lösungsverfahrens müssen also neben dem auftretenden Term weitere Merkmale betrachtet werden, wie z. B. die auftretenden Zahlen und der Aufbau der Gleichung.

Die Fragestellungen der Studie werden u. a. anhand einer Sortieraufgabe untersucht, bei der die Schüler 20 quadratische Gleichungen nach selbst zu formulierenden Kriterien sortieren müssen (Block 2012). Dabei lassen sich sechs zentrale Kategorien von Sortierkriterien beobachten, die in Abb. 3 unter Nennung ausgewählter Beispiele von Sortierkriterien dargestellt sind.

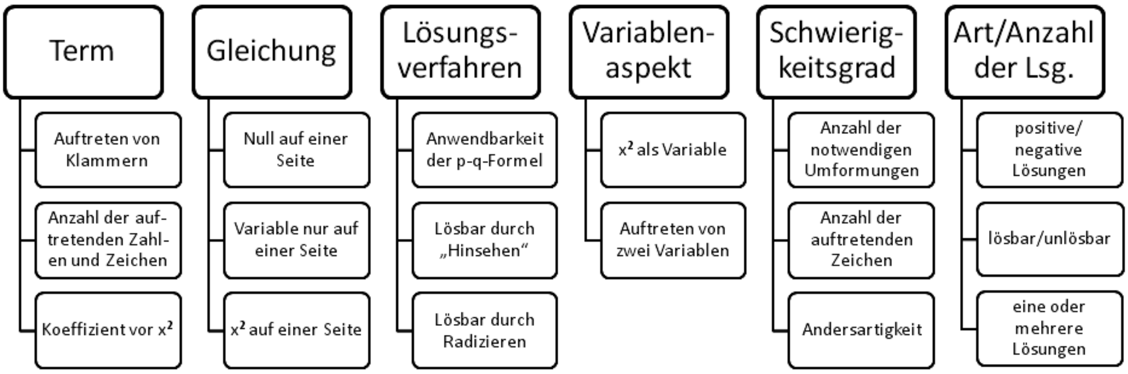


Abb. 3: Sortierkategorien mit ausgewählten Beispielen für Sortierkriterien der Schüler

Die Kategorien Term, Gleichung und Lösungsverfahren sind unmittelbar relevant für flexibles algebraisches Handeln mit quadratischen Gleichungen. Für alle Kategorien wird in einer Analyse der Sortierungen und Begründungen untersucht, inwieweit förderliche Faktoren für flexibles algebraisches Handeln oder Hürden bzw. Hindernisse zu erkennen sind.

Exemplarisch werden im Folgenden Untersuchungsergebnisse bezüglich des Sortierkriteriums „Null auf einer Seite der Gleichung" dargestellt. Ein Schülerpaar formuliert, dass dieses Kriterium eine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der p-q-Formel oder die Bestimmung der Lösung mithilfe der Nullteilerfreiheit darstellt. Damit werden die relevanten Merkmale der Gleichung richtig in Beziehung zueinander gesetzt. Zahlreiche Probanden formulieren, dass es sich um die notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der p-q-Formel handelt. Diese Begründung erscheint in dieser Form korrekt. Betrachtet man aber die zugehörigen Sortierungen, so ist zu erkennen, dass diese Begründung bei vielen Schülern nicht nur auf quadratische Gleichungen bezogen wird, die in Normalform oder allgemeiner Form vorliegen, für die also die Anwendung der p-q-Formel ein adäquates Lösungsverfahren darstellt, sondern auch für Gleichungen, deren Terme Produkte sind (Bsp. $(x-3)(x+5)=0$), deren Terme in einfacher Weise faktorisiert werden können (Bsp. $x^2+2x=0$) oder die durch Radizieren lösbar sind (Bsp. $4x^2-10=0$). Diese Schüler fokussieren in ihrer Wahrnehmung nur auf die an einer bestimmten Stelle der Gleichung auftretende Zahl Null, evtl. wahrgenommene Strukturen der Terme werden nicht weiter berücksichtigt. Eine solche isolierte Merkmalsbetrachtung steht einem flexiblen algebraischen Handeln als Hindernis im Wege.

Wahrnehmungen, denen Bedeutungen zugeschrieben werden, die in keinem Zusammenhang zum Lösen der Gleichung stehen, überdecken möglicherweise relevante Bedeutungen und wirken so als Hürden für die Flexibilität beim Lösen von Gleichungen. Eine solche Begründung ist z. B. das „Beachten besonderer Rechenregeln mit der Null“. Die auch beim Lösen von Gleichungen zu beachtenden Besonderheiten beim Umgang mit der Zahl Null sind unabhängig vom wahrgenommenen Merkmal „Null auf einer Seite der Gleichung“. Offensichtlich wird aber durch das Auftreten der Null an exponierter Stelle der Gleichung vorhandenes Wissen zu dieser Zahl aktiviert. Eine andere Begründung des Merkmals „Null auf einer Seite der Gleichung“ bezieht sich auf die Einschätzung des Schwierigkeitsgrads, wenn formuliert wird, dass eine „Vereinfachung von Rechenvorgängen“ durch diese Gestalt bedingt ist. Im Kontext flexiblen algebraischen Handelns ist diese Einschätzung jedoch nicht relevant.

Die bisherigen Auswertungen der Studie zeigen sehr wenig positive Befunde bezüglich der zu erwartenden Kompetenzen im flexiblen Umgang mit quadratischen Gleichungen. Dieses Ergebnis deckt sich tendenziell mit Befunden von Nogueira de Lima & Tall (2006) in einer Studie zum Verständnis von Gleichungen. Die qualitativen Analysen ermöglichen aber das Erkennen der Zusammenhänge für Hindernisse und Hürden für flexibles algebraisches Handeln und bieten somit die Möglichkeit zur Entwicklung von Hinweisen für die Gestaltung von Lernprozessen, die ein flexibles algebraisches Handeln fördern können.

Literatur

Block, J. (2012): „Aber das rechnet man doch mit der p-q-Formel!“ – Wie erfassen Schülerinnen und Schüler Merkmale quadratischer Gleichungen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM. 137-140.

Block, J. (2013): Quadratische Gleichungen - Erkennen und verstehen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Münster: WTM. 156-159.

Dreyfus, T., Hoch, M. (2004): Equations - A structural approach. In: PME 28, Vol. I. 152-155.

Filloy, E., Rojano, T. (1984): From an arithmetical to an algebraic thought. A clinical study with 12-13 year olds. In: PME-NA. 51-56.

Herscovics, N., Linchevski, L. (1994). A gognitive gap between arithmetic and algebra. In: *Educational Studies in Mathematics* 27 (1), 59–78.

Nogueira de Lima, R., Tall, D. (2006): The Concept of Equations: What have Students met before? In: PME 30, Vol. 4. 233-240.

Katrin BOCHNIK, Stefan UFER, München

Konzeptuelles Verständnis und schematisierbare Fertigkeiten von Drittklässlern mit (nicht-)deutscher Familiensprache

Nationale und internationale Studien zeigten wiederholt, dass Kinder mit Migrationshintergrund im Vergleich zu Lernenden ohne Migrationshintergrund geringere Leistungen in Mathematik erreichen (z.B. Niklas, Segerer, Schmiedeler & Schneider, 2012; Tarelli, Schwippert & Stubbe, 2012). Migrationsbedingte Leistungsunterschiede werden einerseits durch Unterschiede im sozioökonomischen Status erklärt, andererseits geht Migration häufig mit einer vom Deutschen abweichenden Familiensprache einher.

Sprachbezogene Erklärungsansätze

Die bedeutende Rolle der Familiensprache zeigt sich beispielsweise in den Ergebnissen von TIMSS 2011: Kinder, die zu Hause nie deutsch sprechen, weisen eine signifikant niedrigere mathematische Kompetenz auf als diejenigen, die zu Hause immer deutsch sprechen (Tarelli, Schwippert & Stubbe, 2012). Ferner stellen Sprachkenntnisse in der Unterrichtssprache Deutsch ein relevantes Medium für Bedeutungskonstruktionen im Mathematikunterricht dar (Schütte, 2009) und auch in quantitativ ausgerichteten Studien zeigte sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Mathematikleistung und Kenntnissen in der Unterrichtssprache (IGLU; z.B. Bos et al., 2007). Diese haben sich außerdem als entscheidender für den Schulerfolg erwiesen als Sprachkenntnisse in der Familiensprache (z.B. Dollmann & Kristen, 2010). Basierend auf diesen Erkenntnissen liegt der Fokus des vorliegenden Projekts auf dem Vergleich von Lernenden mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache.

Sprachliche Einflüsse in der Testsituation

Die Erhebung der mathematischen Kompetenz mittels Leistungstests setzt für einen reliablen Gruppenvergleich die Test-Fairness voraus. Der Test sollte demnach bei allen Kindern dasselbe messen, unabhängig von ihren Sprachkenntnissen. Haag und Kollegen (2013) konnten in diesem Zusammenhang einen signifikanten Einfluss der sprachlichen Komplexität von Aufgaben nachweisen. Eine detaillierte Analyse ergab, dass beispielsweise die Textlänge eines Items die Test-Fairness beschränkt, während der mathematische Fachwortschatz diese nicht beeinflusst. Andererseits zeigte sich in US-amerikanischen Studien kein signifikant positiver Effekt der sprachlich vereinfachenden Testanpassungen auf die Mathematikleistung von Lernenden mit nicht-englischer Familiensprache (Abedi, Courtney,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 201–204). Münster: WTM-Verlag

Leon, Kao & Azzam, 2006). Diese Erkenntnisse verdeutlichen damit auch die Relevanz des Unterrichts: vorangegangene Lerngelegenheiten scheinen von Kindern mit einer anderen Familiensprache nicht in gleicher Weise genutzt werden zu können. Ziel des vorliegenden Projekts ist es demnach, die mathematische Kompetenz „sprachfair“, in einer sprachlich möglichst einfachen Struktur, zu erheben sowie Indikatoren für die Nutzung sprachbasierter Lerngelegenheiten als weitere Erklärungsvariable einzubeziehen.

Facetten mathematischer Kompetenz

Die Längsschnittstudie SOKKE zeigte Unterschiede zwischen monolingualen, dominant bilingualen und schwach bilingualen Lernenden für konzeptuell-inhaltliche, jedoch nicht für schematisierbare Anforderungen am Ende der Jahrgangsstufe 1 sowie für den Lernzuwachs in Jahrgangsstufe 2 (Ufer, Reiss & Mehringer, 2013). Die Unterschiede im Bereich des konzeptuellen Verständnisses verschwanden erst unter Kontrolle der Sprachkenntnisse im Deutschen fast vollständig. Es scheinen demnach nicht alle Bereiche der mathematischen Kompetenz in gleichem Maße von sprachlichen Einflüssen betroffen zu sein. Problematisch ist jedoch, dass die mathematische Kompetenz mit einem standardisierten Verfahren erhoben wurde, welches die vorgenommene nachträgliche Aufteilung der Items nicht vorsieht. Dennoch liegt die Vermutung nahe, dass Lösungsschemata zu Routineaufgaben weniger abhängig von Sprachkompetenzen sind, während mathematische Konzepte im Unterricht verstärkt sprachlich kommuniziert und elaboriert werden. Im Rahmen des vorliegenden Projekts wurden gezielt Items zu verschiedenen Facetten der mathematischen Kompetenz entwickelt.

Fragestellungen

Ziel des Projekts ist es, in einer Längsschnittstudie sprachliche Einflüsse auf verschiedene Bereiche der Mathematikleistung von Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache zu analysieren, um Schwerpunktsetzungen für einen sprachsensiblen Fachunterricht aufzuzeigen. Für den vorliegenden Beitrag werden die folgenden zwei Fragstellungen des Projekts herausgegriffen:

- Finden sich sowohl für schematisierbare Fertigkeiten als auch für das konzeptuelle Verständnis signifikante Leistungsunterschiede zwischen Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache?
- Verschwinden die Leistungsunterschiede unter Kontrolle der kognitiven Grundfähigkeiten sowie der unterrichtssprachlichen Kenntnisse?

Studiendesign

Um Informationen zu sprachlichen Einflüssen auf verschiedene Bereiche der Mathematischen Kompetenz zu gewinnen, werden vier ausgewählte Facetten mathematischer Kompetenz in jeweils einer Subskala erhoben: *Arithmetische Basisfertigkeiten*, *Konzeptuelles Verständnis*, *Textaufgaben* und *Nutzung mathematischer Arbeitsmittel*. Während Items zu arithmetischen Basisfertigkeiten schematisierbaren Fertigkeiten zuzuordnen sind, steht für alle drei weiteren Subskalen das konzeptuelle Verständnis der Lernenden im Vordergrund. Unterrichtssprachliche Kenntnisse werden mit dem SFD 3-4 (Hobusch, Lutz & Wiest, 2002), kognitive Grundfähigkeiten mit dem CFT 1 (Cattell, Weiß & Osterland, 1997) kontrolliert. Im Folgenden werden erste Ergebnisse des ersten Messzeitpunkts der Längsschnittstudie mit N = 412 Drittklässlern aus zehn Münchner Schulen berichtet.

Ergebnisse des ersten Messzeitpunkts

Zur Analyse der Unterschiede zwischen Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache bezüglich der vier Facetten mathematischer Kompetenz wurden einfaktorielle, univariate Varianzanalysen mit dem Faktor *Familiensprache* (deutsch, nicht-deutsch) durchgeführt. Der Faktor *Familiensprache* ergibt bei allen vier Facetten mathematischer Kompetenz signifikante, vergleichbar starke Effekte in Richtung eines Vorteils von Lernenden mit deutscher Familiensprache. Es zeigen sich demnach sowohl für schematisierbare Fertigkeiten als auch für das konzeptuelle Verständnis signifikante Unterschiede zwischen Lernenden mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache. Die Ergebnisse verdeutlichen die Relevanz der Familiensprache, wie bereits bei TIMSS 2011 gezeigt (Tarelli, Schwippert & Stubbe, 2012).

Um sprachliche Einflüsse auf verschiedene Bereiche der Mathematik zu untersuchen, wurden in Kovarianzanalysen zunächst nur kognitive Grundfähigkeiten, im Anschluss zusätzlich Sprachkenntnisse im Deutschen kontrolliert. Unter Kontrolle der kognitiven Grundfähigkeiten bleiben die signifikanten Effekte für alle Facetten der mathematischen Kompetenz erhalten, wohingegen diese unter zusätzlicher Kontrolle der Sprachkenntnisse verschwinden. Die Ergebnisse zeigen die Relevanz der Sprachkenntnisse für alle vier Facetten mathematischer Kompetenz. Im Gegensatz zu den in Jahrgangsstufe 1 und 2 erhobenen schematisierbaren Fertigkeiten (vgl. Ufer, Reiss & Mehringer, 2013) scheinen diese in Jahrgangsstufe 3 verstärkt auf dem konzeptuellen Wissen aus den vorherigen Jahrgangsstufen aufzubauen und sind damit ebenso beeinflusst von deren sprachlicher Kommunikation und Elaboration im Unterricht.

Die ersten Ergebnisse zum ersten Messzeitpunkt der laufenden Längsschnittstudie zeigen erneut Unterschiede zwischen Kindern mit deutscher und nicht-deutscher Familiensprache auf. Die gezielte Entwicklung von Items zu verschiedenen Kompetenzfacetten ergab für Jahrgangsstufe 3 jedoch kein differenziertes Bild. Mit zunehmendem Alter scheint es schwieriger zu werden, schematisierbare und konzeptuelle Fähigkeiten voneinander zu trennen. Ansatzpunkte eines sprachsensiblen Fachunterrichts sollten demnach auch auf der Thematisierung von Routineprozeduren liegen, die ein grundlegendes konzeptuelles Verständnis erfordern.

Literatur

Abedi, J., Courtney, M., Leon, S., Kao, J. & Azzam, T. (2006). *English Language Learners and Math Achievement*. Los Angeles: National Center for Research on Evaluation, Standards and Student Testing (CRESST).

Bos, W., Hornberg, S., Arnold, K.-H., Faust, G., Fried, L., Lankes, E.-M. et al. (Hrsg.). (2007). *IGLU 2006. Lesekompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Cattell, R. B., Weiß, R. H. & Osterland, J. (1997). *Grundintelligenztest Skala 1. CFT 1.* Braunschweig: Westermann.

Dollmann, J. & Kristen, C. (2010). Herkunftssprache als Ressource für den Schulerfolg? Das Beispiel türkischer Grundschulkinder. In C. Allemann-Ghionda (Hrsg.), Migration, Identität, Sprache und Bildungserfolg, 123–146. Weinheim: Beltz.

Haag, N., Heppt, B., Stanat, P., Kuhl, P. & Pant, H. A. (2013). Second language learners' performance in mathematics: Disentangling the effects of academic language features. *Learning and Instruction, 28,* 24–34.

Hobusch, A., Lutz, N. & Wiest, U. (2002). *Sprachstandsüberprüfung und Förderdiagnostik für Ausländer- und Aussiedlerkinder (SFD 3/4).* Horneburg: Persen Verlag.

Niklas, F., Segerer, R., Schmiedeler, S. & Schneider, W. (2012). Findet sich ein "Matthäus-Effekt" in der Kompetenzentwicklung von jungen Kindern mit oder ohne Migrationshintergrund? *Frühe Bildung, 1* (1), 26–33.

Schütte, M. (2009). *Sprache und Interaktion im Mathematikunterricht der Grundschule.* Münster: Waxmann.

Tarelli, I., Schwippert, K. & Stubbe, T. C. (2012). Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund. In W. Bos, H. Wendt, O. Köller & C. Selter (Hrsg.), *TIMSS 2011: Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich* (S. 247–267). Münster: Waxmann.

Ufer, S., Reiss, K. & Mehringer, V. (2013). Sprachstand, soziale Herkunft und Bilingualität. Effekte auf Facetten mathematischer Kompetenz. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach. Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S. 185–202). Münster: Waxmann.

Wolfgang BOCK, Lissabon, Martin BRACKE, Kaiserslautern

MINT-Projektunterricht in der Sekundarstufe I: Konzepte und Herausforderungen

Beginnend mit der ersten PISA Studie im Jahr 2000 (OECD, 2001) gibt es eine weltweite Diskussion über geeignete Ausbildung in MINT-Disziplinen. Ein Grund war der alarmierende Fakt, dass in vielen Ländern die Großzahl der Schüler der weiterführenden Schulen nicht die Profizienz in Mathematik und Naturwissenschaften erreichten (Kuenzi, 2008). Weitere Studien zeigten, dass das Fehlen substanziellen fachlichen Wissens von Lehrern hierfür einen wichtigen Grund darstellt. Ein anderer Grund für das stetig anwachsende Interesse an der Diskussion über die MINT-Ausbildung ist die Nachfrage der Industrie nach hochqualifizierten jungen Menschen mit einem Abschluss in einem MINT-Fach. Die Debatte zeigt zwei Hauptfragen auf:

1.) Welche Änderungen sind in der Lehrerausbildung nötig?

2.) Gibt es Änderungsbedarf für die MINT-Ausbildung in der Schule?

In diesem Artikel möchten wir diese Fragen aus Sicht eines Mathematikers diskutieren. Eine signifikante Reaktion auf die oben genannte Debatte war es, die Rolle der mathematischen Modellierung in Lehreraus- und -fortbildung sowie in den Lehrplänen zu stärken. In Deutschland kann dies daran gesehen werden, dass mathematische Modellierung in den meisten Master-Programmen der Lehramtsausbildung als Pflichtmodul Einzug gehalten hat. Ebenso gibt es einen starken Anstieg in der Anzahl der Publikationen zu mathematischer Modellierung von authentischen und realistischen, oder Real-World Problemen.

Definition: *Ein authentisches Problem ist ein Problem, welches von einem Kunden gestellt wird, der eine Lösung erhalten will, die für die Kundenbedürfnisse anwendbar ist. Die Problemstellung ist weder gefiltert noch reduziert und ist in vollständiger Allgemeinheit ohne Manipulationen gestellt, (d.h. sie ist gestellt wie gesehen).*

Ein Real-World-Problem oder realistisches Problem ist ein authentisches Problem, welches Bestandteile beinhaltet, welche von Schülerinnen und Schülern in der Realität zugänglich sind.

Unser Konzept für MINT-Unterricht

In unserem Pilotprojekt wollen wir nicht nur ein neues Konzept für MINT-Unterricht entwickeln, sondern vielmehr eine neue organisatorische Struktur etablieren. Darum haben wir das Heinrich-Heine-Gymnasium in Kai-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 205–208). Münster: WTM-Verlag

serslautern, ein Gymnasium mit Hochbegabtenzweig, als Partner ausgewählt. Hier war bereits ein Wahlpflichtfach „MINT“ mit drei Wochenstunden eingeführt, welches ab der Klassenstufe 7 belegt werden kann. Das bestehende Konzept sah vor, MINT in drei Abschnitten sequentiell zu unterrichten: Im ersten Jahr wurden die Schülerinnen und Schüler in Informatik unterricht, im zweiten Jahr gab es zusätzliche Mathematikstunden und das dritte Jahr sah Unterricht in einer Naturwissenschaft, d.h. Biologie, Chemie oder Physik vor (in wechselnder Reihenfolge). Es ist wichtig zu betonen, dass die Unterrichtsinhalte keine Überschneidung mit dem Lehrplan der Klassenstufen 7-10 haben sollten. Das Hauptaugenmerk bei der Auswahl der Schule war nicht der spezielle Hochbegabtenzweig, sondern vielmehr die bereits existierenden organisatorischen Strukturen. Ähnliche Projekte wurden bereits durch das TheoPrax-Zentrum in Pfinztal für Regelklassen der Stufen 8-10 durchgeführt (TheoPrax, n.d.).

Zusammen mit der Schulleitung und Lehrerinnen und Lehrern von MINT-Fächern wurde der neue Kurs „MINT“ geschaffen: Dieser ist immer noch ein Wahlpflichtfach mit drei Wochenstunden in den Klassenstufen 7, 8 und 10, allerdings gibt es nun ein gemeinsames Thema für einen gesamten 3-Jahres-Zyklus und jeweils wöchentlichen Unterricht in Mathematik, Informatik und einer Naturwissenschaft. Im ersten Durchgang, der in 2010 startete und im vergangenen Schuljahr beendet wurde, wurde das Thema *Standortplanung von Windparks* behandelt und neben Mathematik und Informatik das Fach Physik unterrichtet. Die zweite Runde mit Start in 2011 beschäftigte sich mit *Batterie, Akku und Brennstoffzelle: Die Suche nach dem Superspeicher* mit Chemie als zugehöriger Naturwissenschaft. Der 2012 startende Durchgang hat das Thema *Bioakustik: Automatische Erkennung von Vogelstimmen* mit zusätzlichem Unterricht in Biologie. In der nun neu gestarteten Junior-Ingenieur Akademie geht es darum, das ehemalige Werksgelände der Firma Pfaff in Kaiserslautern neu zu planen. Hierbei wird zusätzlich Geographie unterrichtet. Dieses Projekt hat dabei die Besonderheit, dass das Thema erst im Laufe des Projektes konkretisiert wird, so dass auf individuelle Schülerinteressen eingegangen werden kann.

Bereits beim Lesen der Projekttitel werden viele denken, dass diese Projekte sehr ambitioniert für Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe sind, ja vielleicht zu ambitioniert. Unsere Idee ist es an Real-World-MINT-Problemstellungen zu arbeiten, die für Schülerinnen und Schüler interessant sind. Während des Kurses geht es nicht nur darum Konzepte zu erlernen und Probleme zu lösen. Auch werden die Lehrerinnen und Lehrer nicht als Leitung, sondern vielmehr als Kollaborateure im MINT-Thema verstanden. Für jeden Durchgang gibt es ein Team von regulären und externen Lehrern: Die externen Lehrer sind Angehörige der TU Kaiserslautern für den Informatikunterricht in Runde 1 und 2 sowie für Mathematikunterricht in Runde 2 bzw. für Mathematik- und Informatikunterricht in Runde 3 und 4.

Das Konzept umfasst regulären Unterricht sowie Exkursionen und Workshops, welche in den 3-Jahres Kurs eingearbeitet sind. Beispiele für Exkursionen sind Besuche in Laboren der Universität (auch zum eigenen Experimentieren) oder anderen Instituten und Firmen. Die Workshops reichen von *Team Building* über *Zeit- und Projektmanagement* bis hin zu *Kreativitätstraining* und *Konfliktbewältigung.*

Ein wichtiger Punkt des Pilotprojektes ist die Finanzierung: Für die erste Runde wurde durch das Felix-Klein-Zentrum und das Heinrich-Heine-Gymnasium eine sogenannte Junior-Ingenieur-Akademie der Telekom Stiftung angeworben. Dies deckte die Kosten für Exkursionen, Workshops sowie Materialien und Geräte ab, welche nicht im regulären Budget der Schule inbegriffen sind. Da sich bereits im ersten Jahr deutliche Erfolge abzeichneten, beschlossen beide Partner das Programm auf mindestens drei volle Jahrgänge, d.h. eine 5-Jahres Periode zu erweitern.

Eigenschaften der „JIA“

1.) *Eigenständige Planung soll Identifikation und Motivation erhöhen*

Durch den oben beschriebenen Workshop *Zeit- und Projektmanagement* sollen die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, möglichst viele Phasen des Unterrichts selbst zu planen. Dabei sollen sich Kleinprojekte bzw. Unterrichtsinhalte so oft wie möglich durch die Klasse selbst vorgegeben werden. Hierbei spielt auch die Einbeziehung von Experten oder das Bewusstwerden fehlender Kenntnisse eine Rolle.

Die Einbeziehung von Schülerideen macht häufig Änderungen in der Unterrichtsplanung notwendig, Ebenso kann eine Planung im Gegensatz zum Regelunterricht nur sehr kurzfristig gemacht werden. Auf der anderen Seite soll die eigenständige Planung jedoch die Identifikation mit dem Projekt sowie die Motivation zur Beschäftigung mit dem Stoff erhöhen. Es ist erlaubt, ja sogar erwünscht, dass die Schülerinnen und Schüler in eine Sackgasse rennen, auch eine schlechte Idee bis zum Ende denken dürfen.

2.) *Schülerinnen und Schüler soll Zeit gegeben werden, möglichst viele Erfahrungen selbst zu sammeln*

Innerhalb des MINT-Unterrichts soll den Schülerinnen und Schülern möglichst viel Zeit gegeben werden, sich auf vielfältige Weise mit dem Thema auseinanderzusetzen. Hierzu wird versucht möglichst viel Kleingruppenarbeit zu ermöglichen. Hierbei haben die Teilnehmer einer Gruppe verschiedene Aufgaben (Zeitnehmer, Materialwart, Gruppensprecher, Protokollant).

Ebenso werden viele Experimente, etwa mit dem Rechner, oder – falls benötigt – auch physikalische Experimente durchgeführt. Von Beginn an wurde darauf Wert gelegt, regelmäßig Ergebnisse in Kurzform zu präsentieren und zu diskutieren.

Ab Klasse 8 in Runde 3 wurde die Klasse in „Expertenteams“ aufgeteilt. Dadurch sollen individuelle Stärken und Interessen besser berücksichtigt werden. Ein Nachteil ist sicherlich die notwendige Vernetzung der einzelnen Gruppen im Hinblick auf das gemeinsame Ziel.

3.) *Der Weg zum Produkt ist das Ziel*

Die Problemstellungen in der JIA sind Real-World-Probleme und zielen daher auf ein Produkt am Ende der dreijährigen Projektdauer ab. Das Arbeiten auf ein großes Ziel gibt einen roten Faden vor. Es liefert die Motivation für das Weitermachen, wenn man in einer Sackgasse steckt. Ein gemeinsames Überlegen der Frage: „Wo wollen wir hin?“ gibt oft neue Aspekte und Sichtweisen auf das Thema. Das Produkt am Ende ist ebenfalls wichtig für die Identifikation mit dem Projekt.

4.) *Technologie-Einsatz*

In Runde 3 wurden im Schuljahr 2013/14 Tablets eingeführt. Zusammengefasst kann man den Technologieeinsatz in zwei Teilbereiche einteilen:

Zu einem wird der Rechner klassisch zur Dokumentation, Kommunikation, Präsentation und zum Berechnen eingesetzt. Zum anderen wird er als „Blackbox“-Tool genutzt, um anspruchsvolle (mathematische) Techniken durch geeignete Computerprogramme zu ersetzen. So kann etwa die Fourieranalyse eines Audiosignals mit dem vorgenommen werden. Ebenso kann mit Hilfe einer Oszilloskop-App Schall als Schwingung verdeutlichtwerden, die man im Audiosignal wieder erkennen und bearbeiten kann.

Literatur

Baumert, J., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., Blum, W. & Neubrand, M. (2004). Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel et al. (Hrsg.), *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 123–234). Münster: Waxmann.

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik, 5*, 87–101.

Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Katharina BÖCHERER-LINDER, Andreas EICHLER, Freiburg

Der Einfluss der Visualisierung auf den Wissenserwerb im Bereich bedingte Wahrscheinlichkeit

Hintergrund

„Representation and visualization are at the core of understanding in mathematics“ (Duval, 2002, S. 312). Dass die Visualisierung, hier verstanden als die grafische Repräsentation eines mathematischen Objekts oder Verfahrens, einen erheblichen Einfluss auf das Lernen von Schülerinnen und Schülern haben kann, ist in der mathematikdidaktischen Forschung unbestritten. Dennoch ist hier wie auch in der psychologischen Forschung ebenso unbestritten, dass eine Visualisierung nicht per se auf den Lernerfolg wirkt, sondern ihre Güte wie auch die Güte ihrer Verknüpfung mit dem mathematischen Objekt entscheidend ist (z.B. Ainsworth, 2006; Presmag, 2006). Damit besteht für die mathematikdidaktische Forschung einerseits die Frage, welche von möglicherweise mehreren Visualisierungen für einen Themenbereich den höchsten Lernerfolg verspricht, andererseits die Frage, welcher Art der adressierte Lernerfolg ist.

In dem hier beschriebenen Forschungsprojekt, das Teil der Promotionskollegs VisDeM (Visualisierungen im Deutsch- und Mathematikunterricht) ist, wollen wir beiden Fragen nachgehen. Dies geschieht bezogen auf das Thema der bedingten Wahrscheinlichkeiten, einem Bereich, in dem einerseits Visualisierungen potentiell Lernhürden beseitigen können und in dem andererseits bereits empirische Untersuchungen zur Wirksamkeit von Visualisierung, dem Einheitsquadrat und dem Baum mit absoluten Häufigkeiten, bestehen (Bea, 1995; Sedlmeier & Gigerenzer, 2001).

Visualisierungen im Themenbereich bedingte Wahrscheinlichkeit

Beim Umgang von Erwachsenen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ergaben Studien von Sedlmeier und Gigerenzer (2001) die langfristig höhere Effektivität des Baumes mit absoluten Häufigkeiten gegenüber dem Wahrscheinlichkeitsbaum beim Rückwärtsschließen auf Grundlage bedingter Wahrscheinlichkeiten. Dies wurde auch auf Schulebene durch die Arbeit von Wassner (2004) bestätigt. Die Überlegenheit des Baumdiagramms mit absoluten bzw. natürlichen Häufigkeiten gegenüber dem Wahrscheinlichkeitsbaum wird zum einen mit der Repräsentation der Information (natürliche Häufigkeiten) erklärt (Gigerenzer & Hoffrage, 1995), zum anderen mit der grafischen Hilfe des Baumes, die eine sequentielle Strukturierung der Information ist (Sedlmeier & Gigerenzer, 2001). Die nachgewiesene Überlegenheit bezieht sich dabei auf das Lösen von Rechenaufgaben zur

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 209–212). Münster: WTM-Verlag

Formel von Bayes in verschiedenen Kontexten und damit auf das prozedurale Wissen (Hiebert & Carpenter, 1992).

Andererseits belegt die Untersuchung von Bea (1995) die höhere Wirksamkeit des Einheitsquadrates gegenüber dem Wahrscheinlichkeitsbaum hinsichtlich der langfristigen Qualitätsverbesserung stochastischen Denkens mit Bezug auf bedingte Wahrscheinlichkeiten. Der Vorteil des Einheitsquadrates ist dabei darin zu sehen, dass das Einheitsquadrat als eine statistische Grafik die Größenverhältnisse darstellt und somit eine strukturelle Visualisierung auch der Formel von Bayes bietet. Die Ergebnisse von Bea (1995) zeigen, dass das Einheitsquadrat gegenüber dem Wahrscheinlichkeitsbaum sowohl hinsichtlich der Förderung des prozeduralen Wissens als auch bezogen auf das Verständnis und die Problemlösefähigkeit im Sinne eines konzeptuellen Wissens (Hiebert & Carpenter, 1992) überlegen ist.

Bezogen auf die bisherigen Forschungsergebnisse bleibt die Frage bestehen, welche der beiden Visualisierungen (Baum, Einheitsquadrat) wirksamer hinsichtlich des Lernerfolgs von Schülerinnen und Schülern ist und zwar getrennt nach prozeduralem und konzeptuellem Wissen. Vorab vermuten wir, dass das Einheitsquadrat wirksamer das konzeptuelle Wissen fördert, während sich der Baum (mit natürlichen Häufigkeiten) hinsichtlich des Aufbaus prozeduralen Wissens überlegen zeigt.

Forschungsmethode

Die Wirksamkeit der Visualisierungen auf den Wissenserwerb wurde in einer Pilotstudie in einem quasi-experimentellen Design in einem einheitlichen Setting untersucht und verglichen. Hierfür wurde eine Intervention mit Lehramtsstudierenden für die Sekundarstufe I an der PH Freiburg durchgeführt. Das Treatment bestand aus zwei Lerneinheiten von je 60 Minuten, die sich allein in der Visualisierung unterschieden. In der ersten Interventionsgruppe (N=21) wurde das Einheitsquadrat bzw. eine gewichtete Vierfeldertafel eingesetzt, in der zweiten Gruppe (N=22) das Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten. Es wurde ein Vortest und ein Nachtest durchgeführt. Die Tests waren bis auf die eingesetzten Visualisierungen identisch. Dabei wurden eine A- und eine B-Version in einem Überkreuzdesign verwendet.

Ausgehend davon, dass die beschreibende Statistik Verständnisgrundlage für die schließende Statistik ist (Meyer, 2008), bezogen sich die Interventionen und die Testaufgaben auf einen Bereich, der Verständnisgrundlage für den Themenkomplex bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes ist. Dabei ging es darum, Aussagen in bivariaten Situationen zu verstehen und zu bewerten. Es wurden Größenverhältnisse innerhalb eines Datensatzes in den Blick genommen. An einer Beispielaufgabe (Abb.1) zeigt sich, wie das Verständnis für den Einfluss der Basisrate („Die meisten Patienten sind gesund“) und das Problem der Diagnose seltener Ereignisse bzw. das Rückwärtsschließen („Die meisten positiv getesteten Patienten sind gesund“) angebahnt werden kann, ohne sich unmittelbar auf die Formel von Bayes zu beziehen (Sedlmeier & Gigerenzer, 2001).

Beispielaufgabe: Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an:

- Die meisten positiv getesteten Patienten sind gesund.
- Die meisten kranken Patienten haben ein positives Testergebnis.
- Die meisten Patienten sind gesund.

Gruppe 1 hatte das Einheitsquadrat, Gruppe 2 das Baumdiagramm

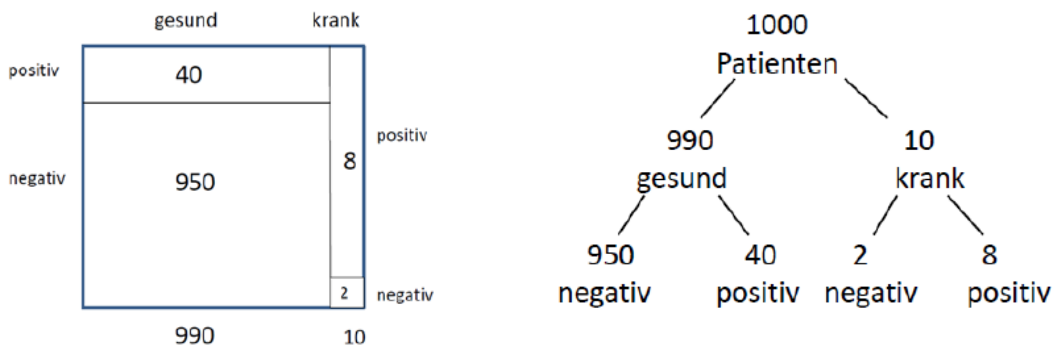


Abb. 1: Beispielaufgabe mit Visualisierungen Einheitsquadrat und Baum

In unserer Pilotstudie haben wir uns darauf beschränkt, das Einheitsquadrat als Anschauungshilfe so zu skizzieren, dass die Größenverhältnisse ungefähr wiedergegeben werden. Auf eine exakte Konstruktion haben wir verzichtet.

Ergebnisse

In der Pilotierung wurden sowohl im Vor- als auch im Nachtest ausschließlich Items mit Verständnisfragen zu bivariaten Zusammenhängen und keine Routine- oder Rechenaufgaben eingesetzt. Daher wurden alle Testaufgaben auf den Erwerb von konzeptuellem Wissen bezogen. Insgesamt haben sich die Testitems überwiegend als zu leicht für die Stichprobe erwiesen, da deutliche Deckeneffekte zu beobachten waren. Durch die fehlende Varianz waren erwartungsgemäß eine Skalenbildung sowie der Nachweis eines überzufälligen Unterschieds der Interventionsgruppen schwierig.

Mit Hilfe der Pilotierung konnte unsere Eingangshypothese, dass das Einheitsquadrat für den Erwerb konzeptuellen Wissens überlegen ist, nicht beurteilt werden. Allerdings geben die Ergebnisse der Pilotierung einen Hinweis darauf, dass es lohnenswert sein könnte, die genannte Hypothese weiter zu untersuchen. So zeigte sich bei einzelnen Testitems durchaus eine leichte wenn auch nicht signifikante Überlegenheit des Einheitsquadrates. In dem oben genannten Testitem aus dem Nachtest (Abb.1) zum Beispiel erreichte die Einheitsquadratgruppe im Schnitt 5,71 Punkte, die Baumdiagrammgruppe 5,36 Punkte ($p = 0{,}116$). Diese höhere Wirksamkeit des Einheitsquadrates ist insofern bedeutsam, als für fast alle Studierenden das Einheitsquadrat neu und unbekannt war, wohingegen das Baumdiagramm fast allen Studierenden schon vor der Intervention vertraut war.

Ausblick

Geplant ist eine Interventionsstudie mit Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 10 am Gymnasium. Hier sollen nicht nur die Verständnisgrundlagen sondern auch der Satz von Bayes direkt in den Blick genommen werden. Die Intervention und der Test werden weiterentwickelt, so dass sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen erhoben werden kann. Mit den Erfahrungen der Pilotierung soll zudem die Spannweite der Aufgabenschwierigkeiten vergrößert werden.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183–198.

Bea, W. (1995). *Stochastisches Denken*. Frankfurt a.M.: Lang.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt (Hrsg.), *Representation and mathematics visualization* (S. 311-336). North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. *Psychological Review, 102, 4,* 684-704.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 65-97). New York: Macmillan.

Meyer, J. (2008). Bayes in Klasse 9. In A. Eichler & J. Meyer (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht, Band 4* (S. 123-135). Hildesheim: Franzbecker.

Presmag, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (S. 117-146). Rotterdam: Sense Publishers.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian Reasoning in Less Than Two Hours. *Journal of Experimental Psychology: General, 130, 3,* 380-400.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens*. Hildesheim: Franzbecker.

Claudia BÖTTINGER, Jana KAULVERS, Jessica LEHMGRÜBNER, Essen

Der Einsatz von historischen Rechenbüchern zur Förderung mathematisch interessierter Grundschulkinder

An der Universität Duisburg-Essen gibt es am Standort Essen seit Jahren einen Kurs zur Förderung mathematisch interessierter Kinder unter dem Namen Mathe für schlaue Füchse. Es hat sich herausgestellt, dass die Kinder sich nicht nur für Mathematik sondern auch für mathematikhaltige Themen mit historischem Hintergrund interessieren (Böttinger, 2013). Die Arbeit mit diesen Themen wurde in den letzten beiden Jahren immer weiter systematisiert und es wurden gezielt Ziele und Methoden der Geschichtsdidaktik einbezogen. Dies wird am Beispiel von zwei Aufgaben aus dem Rechenbuch von Adam Ries dargestellt. Als erster Schritt zur Reflexion wird untersucht, welche Kompetenzen, die üblicherweise im Geschichtsunterricht entwickelt werden sollen, sich bei den Kindern nachweisen lassen.

1. Geschichte im Unterricht – Ziele und Modelle

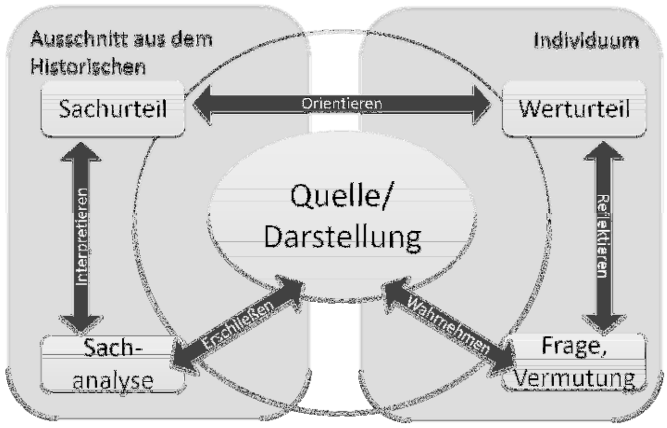
Richtet man den Blick auf die Geschichtsdidaktik, so ist dort das vorrangige Ziel, die Förderung eines reflektierten Geschichtsbewusstseins. Nach Létouneau (2001) (zitiert nach van Reeken 2009) handelt es sich *„um die Kompetenz des menschlichen Individuums, seinen Platz in einer sich entwickelnden und fortschreitenden Umwelt relativ zu einem Vorher, einem Hier und Jetzt zu definieren.“*

Es gibt eine weithin akzeptierte Theorie von Pandel (1987), nach der beim Geschichtsbewusstsein Geschichtlichkeit mit den Unterdimensionen Temporalbewusstsein, Wirklichkeitsbewusstsein und Historizitätsbewusstsein und Gesellschaftlichkeit mit den Unterdimensionen Identitätsbewusstsein, politisches Bewusstsein, moralisches Bewusstsein und ökonomisches und soziales Bewusstsein unterschieden wird.

Anhand der Dimensionen des Geschichtsbewusstseins lässt sich sagen, dass ein Inhalt (Phänomen, Sachverhalt, Person) Gegenstand von Historischem Lernen ist, wenn er hinsichtlich der Dimension Zeit und in diesem Rahmen auf die grundlegende Sinnbildungsbereiche Herrschaft (politisches Bewusstsein), Wirtschaft (ökonomisches Bewusstsein), Werte oder Identität behandelt wird. (in Anlehnung an Gautschi, 2011, S. 43)

Modellhaft stellt man sich historisches Lernen als Kreislauf vor, vgl. Abb.1. Es beginnt, wenn das Individuum gezielt den Blick auf eine Quelle oder eine Darstellung richtet.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 213–216). Münster: WTM-Verlag



´Abb. 1

Im Idealfall stellen die Lernenden selbst Fragen oder Vermutungen an diese Quelle. Diese können jedoch auch von außen angetragen werden (wie dies im Unterricht typischerweise der Fall ist). Sie erschließen das Wahrgenommene, indem sie einen Sachverhalt, der aus historischen Zeugnissen rekonstruiert wurde klären – die Sachanalyse. Interpretation bedeutet, Bezüge zu anderen historischen Zeugnissen herzustellen und in einen größeren Zusammenhang von Ursachen und Wirkungen einzuordnen. Am Ende steht ein historisches Sachurteil, das entlang individueller Fragestellungen erstellt werden kann. Im nächsten Schritt geht es um ein historisches Werturteil z. B. im Hinblick auf später auftretende, gegenwärtige oder zukünftige Ereignisse (Gautschi 2011, S. 44). Im Idealfall führt dieses zu weiteren Fragen an die Quellen.

2. Geschichte im Rahmen von „Mathe für schlaue Füchse“

Um historisches Lernen anzuregen empfiehlt Pandel (2013) im Unterricht „Ereignisnester“ zu bilden, die sich gegenseitig im Lernprozess stützen. In diesem Sinne wird ein Kurs thematisch von einer Epoche bestimmt, z. B. Mittelalter und frühe Neuzeit. Die Themen sind zeitlich und geografisch aufeinander abgestimmt. Das Anliegen besteht darin, nicht nur Mathematikgeschichte zu besprechen, sondern auch mithilfe von Mathematik ein Stück Geschichte besser zu verstehen.

Dies soll an einem Beispiel aus dem Rechenbuch von Adam Ries aufgezeigt werden (Abb. 2), (Nachdruck 1992, Übersetzung von Deschauer, 2012).

Zunächst bestand die Aufgabe für die Kinder darin, die folgende Aufgabe selbst zu rechen.

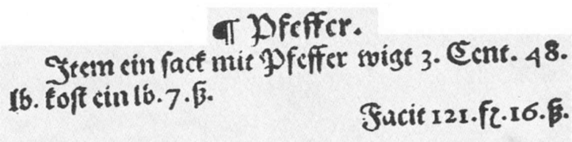

¶ Pfeffer.
Item ein sack mit Pfeffer wigt 3. Cent. 48. lb. kost ein lb. 7. ß.
Facit 121. fl. 16. ß.

Abb. 2

Übersetzung:
Ein Sack mit Pfeffer wiegt 3 Zentner 48 Pfund. 1 Pfund kostet 7 Schilling. Ergebnis: 121 Gulden 16 Schilling

Diese Aufgabe wurde mit einer anderen kontrastiert, (Abb. 3), die die Kinder bereits zu einem früheren Zeitpunkt bearbeitet hatten:

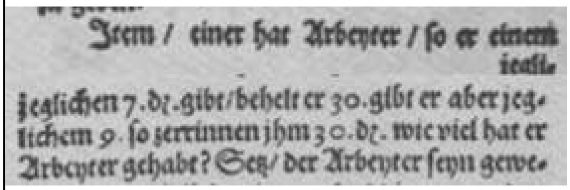

Item / einer hat Arbeyter / so er einem iegli. jeglichen 7.dz.gibt/behelt er 30.gibt er aber jeglichem 9. so zerrinnen jhm 30.dz. wie viel hat er Arbeyter gehabt? Setz/ der Arbeyter seyn gewe.

Abb. 3

Übersetzung:
Einer hat Arbeiter. Wenn er jedem 7 Pfennige gibt, behält er 30 Pfennig. Gibt er aber jedem 9 Pfennig, so fehlen ihm 30 Pfennig. Wie viel Arbeiter hat er gehabt?

Es lässt sich entnehmen, dass ein Arbeiter ca. 7 Pfennig pro Tag verdiente.

Beide Aufgaben zusammen führen auf die Frage: Wie lang müsste ein Tagelöhner arbeiten, um das Geld für ein Pfund Pfeffer zu verdienen? (1 Schilling = 30 Pfennig). (Bem.: Das Ergebnis sind 30 Tage.)

Zum Vergleich: Legt man heute einen Stundenlohn von 8,50 € zugrunde (Mindestlohn!), so benötigt man etwa eine halbe bis eine Stunde, um das Geld für 1 Pfund Pfeffer zu erwirtschaften. Beide Berechnungen waren Thema einer gemeinsamen Besprechung mit den Kindern, da sich herausgestellt hat, dass die Kinder bei der eigentlichen mathematischen Bearbeitung der Aufgaben nicht auf den historischen Kontext Bezug nehmen.

3. Reflexion auf der Basis des geschichtsdidaktischen Modells

Diese Besprechung wurde videographiert und transkribiert. Die verschiedenen Kompetenzen des historischen Lernens (Abb. 1) in der ausdifferenzierten Form (vgl. Gautschi, 2011, S. 64 ff.) wurden als Analyseraster gewählt. Beispielhaft werden einige für die Besprechung typische Äußerungen ausgewählt.

Zur Erschließungskompetenz für historische Inhalte gehört, dass Lernende in Quellen/Darstellungen verschiedene Phänomene, Sachverhalte und Personen identifizieren. „*Ich hab gelernt, dass Pfeffer aus Indien kommt und ein Zentner, dass das hundert Pfund sind. Dass das gleich von eins auf hundert springt dachte ich nicht. (unverständlich) Da war ja vorne immer eine kleinere Zahl und hinten dann was Größeres. Vorne war die Eins und da hinten jetzt hohe Zahlen, zum Teil*“ Das Kind bezieht sich ausschließlich auf historische Fakten, die aus Erzählungen oder den Aufgaben entstammen. Diese werden nicht zueinander in Beziehung gesetzt und es werden keine weiteren Fakten zur Quelle hinzugezogen. Dass der Pfeffer aus Indien kommt, war Teil der Einführung der Aufgabe.

Zur Interpretationskompetenz gehört, dass Lernende Ereignisse oder

Personen zeitlich ordnen und sie zueinander in Beziehung setzen.
MAX: Es haben ja viele mit den neperschen Streifen gerechnet, aber der Adam Ries konnte das damals noch nicht.
L: Warum nicht?
MAX: Weil die neperschen Streifen danach erfunden wurden, also später.
Hintergrund dieser Äußerung ist, dass Max, der nicht schriftlich multiplizieren konnte, die neperschen Streifen zur Ergebnisermittlung der obigen Aufgabe genutzt hat, die er in einer Sitzung zuvor kennen gelernt hat. Anhand des Zeitstrahls mit den entsprechenden Themen konnte er feststellen, dass dies zu Zeiten von Adam Ries unmöglich war.

Zur Interpretationskompetenz gehört auch, dass Lernende Mächtige von Machtlosen, Reiche von Armen, Gebildete von Ungebildeten unterscheiden. *„Die haben nicht viel geschafft, aber die meisten Leute mussten ja in den Geschäften arbeiten und die hatten dann nicht mehr so viel Geld um die Geschäfte überhaupt zu eröffnen und nur die etwas Reicheren, die Reichen konnten ein Geschäft aufmachen oder die etwas Reicheren. Damit sie die Armen dort drin arbeiten lassen konnten. Damit die Armen dann Lohn kriegen. Dafür mussten die ganz schön reich sein.“* Typisch an dieser Äußerung ist, dass das Kind sehr wohl ein Bewusstsein etwa für arm und reich entwickelt hat. Zur Bildung eines Sachurteils zieht es Elemente hinzu, die nicht Thema der Sitzung waren, die teilweise jedoch falsch bzw. fiktiv sind. Vergleichbare Äußerungen finden sich regelmäßig im Rahmen von Interpretationen. Es ist noch offen, ob dies ein Zeichen dafür ist, dass sich bei Kindern die Unterscheidung fiktiv-real erst noch entwickeln muss oder ob dies ein Hinweis darauf ist, dass deutlicher auf diese Unterscheidung fokussiert werden muss. Dies muss noch genauer herausgearbeitet werden.

Literatur

Böttinger, C. (2013). Historische Aspekte bei der Förderung math. interessierter Grundschulkinder, Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, WTM, Münster, 172-175

Gautschi, P. (2011). Guter Geschichtsunterricht. Grundlagen, Erkenntnisse, Hinweise. Wochenschau Verlag, Schwalbach

Deschauer, S. (2012). Das macht nach Adam Riese, Anaconda Verlag, Köln

Pandel, H.-J. (1987). Dimensionen des Geschichtsbewusstseins. Ein Versuch, seine Struktur für Empirie und Pragmatik diskutierbar zu machen. Geschichtsdidaktik 12, 130-142

Pandel, H.-J. (2013) Geschichtsdidaktik. Eine Theorie für die Praxis. Wochenschau Verlag, Schwalbach/Ts.

Rise, A. (1574/1992). Rechenbuch auff linien und Zphren in allerley Hand, Nachdruck einer Ausgabe von 1574, Verlag Th. Schäfer, Hannover.

Von Reeken, (2009) Historisches Lernen im Sachunterricht, Schneider, Hohengehren

Thomas BORYS, Vincenzo FRAGAPANE, Mutfried HARTMANN, Fabian MUNDT, Karlsruhe

Apps im Mathematikunterricht

Mobile Endgeräte wie z.B. Tablet-PCs oder Smartphones sind überall auf dem Vormarsch. So besitzen nach der aktuellen JIM-Studie 2013 (Jugend, Information, Multi-Media) des Medienpädagogischen Forschungsverbunds Südwest fast Dreiviertel der Jugendlichen zwischen 12 und 19 Jahren ein Smartphone. Tablet-PCs, auf denen in der Regel auch die gleichen Apps laufen, haben bereits 15% der Jugendlichen. Mobile Endgeräte sind aus medientechnischer Sicht die reinsten Tausendsassas. So können sie als Videokamera, Fotoapparat, Diktiergerät, Scanner, Fernseher, Computer, Buch etc. eingesetzt werden (vgl. Kirch, 2013).

Die breite Verfügbarkeit dieser Geräte eröffnen auch für den Mathematikunterricht neue Möglichkeiten. Neben Taschenrechnern, Tabellenkalkulationssystemen, Plottern, CAS und DGS sind es oft auch nicht direkt im Bereich der Mathematik angesiedelte Apps wie z.B. Spiele, die interessante mathematische Bezüge aufweisen. Bachmair, Friedrich und Risch stellen sich die Frage, warum man die Kompetenzen der Jugendlichen bezüglich dieses neuen Mediums nicht für einen „gezielten Bildungsprozess“ (vgl. Bachmair et al., 2011) nutzbar macht. Möchte man dies im Mathematikunterricht tun, ergeben sich viele Fragen, so z.B.:

- Wie kann man Apps mit Schüler/innen selbst erstellen?
- Welche Apps gibt es für den Mathematikunterricht?
- Wie findet man die richtige App für den Unterricht?

1. Projektbeispiel: App-Erstellung mit Schüler/innen

An der PH Karlsruhe haben Studierende bereits selbständig eine App entwickelt. Die dabei entstandene App ist unter dem Namen Colourize im Appstore von Google und Apple kostenfrei erhältlich. Bei der Erstellung einer solchen App fallen viele unterschiedliche Tätigkeiten an. Damit die Studierenden arbeitsteilig vorgehen konnten, wurde für die Umsetzung der Idee ein Projektansatz gewählt.

Zurzeit wird dieser Ansatz auch in einer Hauptschule getestet. Angelehnt an die Produktionsstrukturen in der Game-Industrie konnten sich die Schüler/innen in folgende Projektgruppen einteilen: Artdesign, Leveldesign, Programmierung, Marketing, Sound und Projektmanagement. Programmiert wird mit der Software Stencyl. Bei dieser Software handelt es sich um ein leistungsfähiges Tool zur Spieleentwicklung, das den gleichen edu-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 217–220). Münster: WTM-Verlag

kativen Ansatz wie Scratch verfolgt. Es ist geplant, das Spiel in den einschlägigen Appstores kostenfrei anzubieten.

2. Apps für den Mathematikunterricht

Die Anzahl der Anwendungssoftware für Mobilgeräte bzw. mobile Betriebssysteme ist in den letzten Jahren rasant gestiegen. Im iTunes App-Store waren im Juli 2013 rund 900.000 Apps verfügbar. Google Play bietet knapp 1.000.000 Programme für Mobilgeräte mit dem Betriebssystem Android an. Zwar wurde nur ein Bruchteil dieser Apps für die Bereiche Bildung und Unterricht entwickelt, aber auch dort wird die Menge der angebotenen Apps zunehmend unüberschaubar. Für Lehrer, Schüler und Eltern ist die große Anzahl an Angeboten bei der Auswahl geeigneter Anwendungen eine Herausforderung. Dies gilt insbesondere auch für Apps aus dem Bereich Mathematik. Viele nutzen bei der Recherche die Suchfunktion der jeweiligen Anbieter und orientieren sich bei der Auswahl an Bewertungen, die Nutzer zu den entsprechenden Anwendungen dort hinterlegen. Bisher fehlt jedoch eine didaktisch konzipierte Orientierungshilfe, die Lehrer, Schüler und Eltern bei der Auswahl einer geeigneten Anwendung für den Unterricht unterstützt. Eine Datenbank mit Informationen zu den entsprechenden Anwendungen könnte diesem Problem entgegensteuern. Sowohl qualifizierte Lehrkräfte als auch Nutzer könnten die Programme gemeinsam nach sinnvollen Kriterien klassifizieren und bewerten. Exemplarisch für Anwendungen aus dem Bereich der Mathematik wird von einem Team an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe die mögliche Umsetzung einer solchen Datenbank untersucht und wissenschaftlich begleitet.

Ziel der Bemühungen ist die Entwicklung einer Online-Datenbank, die eine Hilfestellung zur zielgerichteten Auswahl von Apps für den Mathematikunterricht bietet. Zu diesem Zweck sollen Apps und deren relevante Daten akkumuliert und strukturiert werden. Diese Daten setzen sich zusammen aus allgemeinen Informationen – den Meta-Daten – der jeweiligen Anbieter (über die iTunes und GooglePlay Such-API[1]) und fachspezifischen didaktischen Informationen (Typ, Bewertungen, Kommentare, inhaltliche Schwerpunkte, Zielgruppe, etc.), die Nutzer der Apps (Lehrer, Eltern und Schüler) beisteuern.

Besondere Herausforderungen stellen dabei zum einen die Typisierung der Apps und zum anderen die Bereitstellung eines validen, aber gleichzeitig praktikablen Bewertungssystems dar. In der Literatur finden sich divergierende Ansätze für Kategoriensysteme, die Apps nach jeweils anderen Kri-

---

[1] API: application programming interface

terien unterscheiden. Diese Unterscheidungen können unter anderem im Hinblick auf die Instruktionsmethode, den Grad der Lernkontrolle, den Grad der Interaktionsfreiheit oder im Hinblick auf die didaktische Konstruktion vorgenommen werden.

Beispiele für Software-Kategoriensysteme				
A Gibbs und Tsichritzis (1994)	**B** Bodendorf (1990)	**C** Fergusen (1992)	**D** Schulmeister (2007)	**E** Gloor (1990)
• Interaktive Bildplattenanwendungen • Elektronische Spiele • Hypermedia-Browser • Multimedia Präsentationen • Multimedia Autorensystem • Multimedia Mail-Systeme • Desktop Video-Systeme • Desktop Conferencing-Systeme • Multimedia Service • Multimedia Produktionswerkzeuge	• Hilfe (Lernen durch Hinweise) • Passiver Tutor (selbstgest. Lernen) • Training (Lernen durch Üben) • Aktiver Tutor (angeleitetes Lernen) • Simulation (entdeckendes Lernen) • Spiel (unterhaltendes Lernen) • Problemlösung (Learning by doing) • intelligenter Dialog (sokratisches Lernen)	• Drill & Practice • Tutorials • Simulations • Discovery Activities • Microworlds • Programming Environments • Application Tools	• Drill & Practice • Courseware • Präsentationen • KIOSK-Systeme • Guided Tours • Electronic Books • Hypertextsysteme • Simulationen • Interaktive Programme	• Drill & Practice • Tutorials • Lernspiele • Simulationen
Keine spezielle Unterscheidung	**Unterscheidung im Hinblick auf die Instruktionsmethode**	**Unterscheidung im Hinblick auf den Grad der Lernkontrolle**	**Unterscheidung im Hinblick auf den Grad der Interaktionsfreihet**	**Unterscheidung im Hinblick auf die didaktische Konstruktion**

Da in der Praxis eine trennscharfe Unterscheidung der Apps in definierte Kategorien nur in seltenen Fällen möglich ist, haben wir uns entschieden, die Apps in unterschiedliche *Typen* einzuteilen, die eine Mehrfachzuordnung erlauben. Diese von uns vorgenommene vorläufige Typisierung orientiert sich an den Einsatzmöglichkeiten und didaktischen Konstruktionen der Apps (vgl. Gloor, 1990).

Typen von Apps	
Virtuelles Modell	Trainer
Spiel	Tutorial
Werkzeug	Lernumgebung

Eine Akkumulierung und Strukturierung des App-Angebotes im Bereich des Mathematiklernens wird ohne gleichzeitige Qualitätskontrolle der Apps keinen hinreichenden Mehrwert darstellen. Eine valide Bewertung der Apps stellt aber eine noch größere Herausforderung dar als die der Typisierung. Ein Bewertungssystem muss, wenn es einen Mehrwert gegenüber dem der App-Stores bieten soll, auf die spezifischen Herausforderungen für das Lernen oder Lehren von Mathematik angepasst und damit auch erheblich differenzierter sein. Dies führt zwangsläufig zu einer Gratwanderung zwischen sehr einfachen (damit unter Umständen wertlosen) Systemen und der Komplexität angemessenen (damit aber impraktikablen) Systemen. Es gibt dabei grundliegende Fragen zu berücksichtigen: Wer darf bewerten und für wen soll diese Bewertung gewinnbringend sein? Der zu erwartende riesige Strom an Neuentwicklungen spricht für ein offenes System, in dem nicht ausschließlich durch eine kleine Gruppe besonders kompetenter Bewerter evaluiert wird. In diesem Fall müssen Bewertungen in Abhängigkeit von Bewertertypen (etwa Schüler, Lehrer, Fachdidaktiker) getrennt zur Verfügung gestellt werden können. Welche Aspekte (etwa durch einfache Ordinalskalen) bewertet werden sollen, muss von der Bewertergruppe und deren spezifischen Kompetenzen abhängig gemacht werden. Unumgänglich für die Bewertung sind Freitextfelder, in denen die Bewertungen transparent gemacht werden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass für eine Datenbank zu Apps für das Lehren und Lernen von Mathematik dringender Bedarf besteht, viele Fragen bezüglich der Gestaltung allerdings noch ungeklärt sind. Entwicklungsfähig kann ein solches Projekt nur mit einer breiten Unterstützung der Community sein. Diese ist wiederum nur zu erwarten, wenn hinsichtlich der Gestaltung der Datenbank ein gewisser Konsens erzielt werden kann: Eine Herausforderung für die Zukunft.

Literatur

Bachmair, B.; Friedrich, K.; Risch, M. (2011): *Mobiles Lernen mit dem Handy*. Weinheim: Beltz-Verlag

Bodendorf, F. (1990): *Computer in der fachlichen und universitären Ausbildung.* München: Oldenbourg

Ferguson, D.L. (1992): *Computers in Teaching and Learning.* In: Scanlon, E./O'Shea, T. (Hrsg.): New Directions in Educational Technology, 96, S. 34-50. Heidelberg: Springer

Gibbs, S.J.; Tsichritzis, D.C. (1994): *Multimedia Programming: Objects, Environments and Frameworks.* Reading: Addison-Wesley

Gloor, P.A. (1990): *Hypermedia-Anwendungsentwicklung. Eine Einführung mit Hypercard Beispielen.* Heidelberg: Springer

Kirch, M. (2013): Entdeckung der Normalität – Tablet im Unterricht. *Lernen & Lehren*. 8/9, S. 20-24

Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest (2013): *JIM Studie 2013*. Stuttgart

Schulmeister, R. (2007): *Grundlagen hypermedialer Lernsysteme – Theorie, Didaktik, Design*. München: Oldenbourg

Marc BOSSE, Essen

Wie können fachfremd unterrichtende Mathematiklehrkräfte durch Lehrerfortbildungen effektiv unterstützt werden?

1. Zur Einführung

Als „fachfremd" Unterrichtende werden im Folgenden diejenigen Lehrkräfte bezeichnet, die im Fach Mathematik nicht universitär ausgebildet worden sind und/oder kein Referendariat im Unterrichtsfach Mathematik absolviert haben. Für die Definition dieser Gruppe von Lehrerinnen und Lehrern ist also die *formale Qualifikation* bzw. fehlende Lehrbefähigung entscheidend.

Die Autoren zweier Studien des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) weisen darauf hin, dass fachfremd erteilter Mathematikunterricht negative Auswirkungen auf die fachlichen Leistungen vor allem leistungsschwacher Schülerinnen und Schüler haben kann (Richter, Kuhl, Haag & Pant, 2013; Richter, Kuhl, Reimers & Pant, 2012).

Dass das Fach Mathematik an Primar- und Sekundarschulen fachfremd unterrichtet wird, ist auch international gesehen keine Ausnahme. In anderen Staaten stellt das beschriebene Phänomen ebenfalls eine Herausforderung für Lehrkräfte und andere Akteure im Bildungswesen dar (vgl. z.B. Crisan & Rodd, 2011; Dee & Cohodes, 2008; Ingersoll, 1998; Loveys, 2011; Vale, 2010).

2. Kompetenzprofile fachfremd unterrichtender Mathematiklehrkräfte

Die gängige Argumentation für die niedrigere Kompetenzerwartung bei fachfremd unterrichteten Schülerinnen und Schülern, der sich auch Richter et al. (2013) anschließen, lautet wie folgt: Durch die fehlende fachlich-universitäre Ausbildung verfügen fachfremd unterrichtende Lehrpersonen über geringere *fachmathematische* und *mathematikdidaktische* Kompetenzen, was wiederum Implikationen auf die mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler hat.

Diese Überlegung legt mit Blick auf Interventionsmaßnahmen nahe, nach Defiziten in den beiden Kompetenzbereichen zu suchen, diese durch Lehrerfortbildungen zu beseitigen und so die Schülerleistungen auf das Niveau zu verbessern, das durch nicht-fachfremd erteilten Unterricht im Mittel erreicht wird.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 221–224). Münster: WTM-Verlag

3. Holistische Betrachtung des Phänomens

Dieser defizitorientierte Interventionsansatz mit Blick auf die kognitiven Kompetenzen (KK) der betreffenden Lehrpersonen reicht im Gefolge von ersten Untersuchungen nicht aus (vgl. Bosse & Törner, 2013).

Erstens muss verstanden werden, wie fachfremd erteilter Mathematikunterricht überhaupt „funktioniert" und welche Rolle die Lehrkraft dabei hat. Schließlich darf man nicht vergessen, dass fachfremd unterrichtende Lehrerinnen und Lehrer auf Basis spezifischer *kognitiver*, *sozialer* und *materieller* Ressourcen bereits Mathematikunterricht erteilen, der im Mittel immerhin bei einem Teil der Schülerinnen und Schüler zu Lernerfolgen führt. Gerade die *gelebte Praxis* (vgl. Wenger, 2007) einer Schule scheint von Bedeutung: Doppelbesetzungen im Unterricht, Fachkonferenzen, Teamklassen, Kolleginnen und Kollegen mit Expertenstatus usw. können die kognitiven Defizite „abpuffern" oder definieren überhaupt erst, was als Defizit wahrgenommen wird.

Zweitens konnten Bosse und Törner (2013) zeigen, dass sich gerade auch affektiv-motivationale Charakteristika (AMC) spezifisch (und teils negativ) von denen der nicht-fachfremd Unterrichtenden unterscheiden. Da sich dieser Kompetenzbereich steuernd auf die Auswahl kognitiver Ressourcen auswirkt (vgl. Schoenfeld, 2011), hat das ausschließliche Beheben von kognitiven Defiziten durch Lehrerfortbildungen unter Umständen gar keinen Einfluss auf das tatsächliche unterrichtliche Handeln der Lehrpersonen. Lehrerfortbildungen für fachfremd Unterrichtende sollten also auch wünschenswerte AMC fördern.

Drittens sind AMC der Lehrpersonen häufig biographisch erworben (Welche Haltung hat die Lehrkraft z.B. daran gehindert, Mathematik zu studieren?), d.h. sie unterliegen einer prozesshaften und identitätsstiftenden Dynamik. Kompetenzmodelle verschließen sich davor und berücksichtigen außerdem die kontextuelle Abhängigkeit der AMC nicht. Internalisierte Kompetenzen werden aber erst durch Situationen und Kontexte „getriggert" ehe sie Einfluss auf Entscheidungen und Handeln haben (vgl. ebd.). Bosse und Törner (2013) weisen darauf hin, dass bekannte Kontexte (z.B. die studierten Fächer der Lehrkräfte) als Ressource für den fachfremd erteilten Mathematikunterricht durch Lehrerfortbildung nutzbar gemacht werden könnten.

4. Professionalisierung der mathematikbezogenen Lehreridentität als Fortbildungsanliegen

Aus diesen drei Überlegungen heraus scheint es sinnvoll, auch das Konzept der *Lehreridentität* als interventionsleitenden Zugang zu wählen, der neben

KK auch AMC der Lehrpersonen einbezieht (Grootenboer & Zevenbergen, 2008). Das Konzept dient als Instrument der Weitwinkelaufnahme, das unterschiedliche Facetten und Variablen fachfremd erteilten Mathematikunterrichts einerseits und der Lehrperson mit ihrem Verhältnis zur Mathematik andererseits sichtbar machen kann. Ziel von Lehrerfortbildungen für fachfremd Unterrichtende sollte demnach auch die Professionalisierung der mathematikbezogenen Lehreridentität sein.

5. Fazit: Effektive Lehrerfortbildung

Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) entwickelt Lehrerfortbildungen unter Berücksichtigung eines theoretischen Rahmens, welcher aufzeigt, welche Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen wirksamkeitsfördernd sind (vgl. Blömeke, Leuders, Barzel, Scherer & Selter, 2013).

Zur *Teilnehmerorientierung*: Aufgrund mangelnder Fähigkeit zur Selbstreflexion werden die fachfremd Unterrichtenden maximal dort Schwierigkeiten im Erteilen von Mathematikunterricht sehen, wo sich die Grenzen ihrer spezifischen Unterrichtspraxis befinden. Diese Schwierigkeiten sollten in Lehrerfortbildungen zuerst angegangen werden, da sie subjektiv die größte Relevanz haben.

Zur *Fallbezogenheit*: Bei der Gestaltung von Fortbildungen durch die Orientierung an Praxiserfahrung sollte berücksichtigt werden, dass sich die Unterrichtspraxis bei fachfremd Unterrichtenden von der nicht-fachfremd Unterrichtender unterscheiden kann. Grund dafür können nicht nur Defizite im professionellen Wissen, sondern auch die AMC der Lehrpersonen sein. Was für reguläre Mathematiklehrkräfte unterrichtsrelevant ist, kann für fachfremd Unterrichtende keine Bedeutung haben. Will man erreichen, dass auch diese Lehrpersonen andere, wünschenswerte Praxismomente des Mathematikunterrichts (er)kennen, sollte Mathematik als Prozess und Wissenskörper neu erfahrbar gemacht werden.

Zur *Kompetenzorientierung* und dem *Anregen von Selbstreflexion*: Lehrerfortbildungen für die genannte Zielgruppe sollten über KK hinaus auch die Entwicklung einer wünschenswerten, mathematikbezogenen Lehreridentität im Blick haben. Dazu gehört es auch, zur Reflexion über das eigene professionelle Handeln und Lernen anzuregen.

Zur *Vernetzung*: Kollegialer Austausch und Deprivatisierung von Unterrichtsgestaltung und -durchführung können effektive Wege zur Professionalisierung sein, da die Nutzung von sozialen Ressourcen für einige fachfremd Unterrichtende sowieso schon fester Bestandteil bei der Gestaltung und Durchführung von Mathematikunterricht ist.

Literatur

Blömeke, S., Leuders, T., Barzel, B., Scherer, P. & Selter, C. (2013). *Theoretischer Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik.* Zugriff am 30.01.2014. Verfügbar unter http://www.dzlm.de/media/Theoretischer-Rahmen_v2.pdf

Bosse, M. & Törner, G. (2013). Out-of-field Teaching Mathematics Teachers and the Ambivalent Role of Beliefs – A First Report from Interviews. In M. S. Hannula, P. Portaankorva-Koivisto, A. Laine & L. Näveri (Hrsg.), *Current state of research on mathematical beliefs XVIII. Proceedings of the MAVI-18 Conference* (S. 341–355). Helsinki.

Crisan, C. & Rodd, M. (2011). Teachers of mathematics to mathematics teachers: a TDA Mathematics Development Programme for Teachers. In C. Smith (Hrsg.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (Bd. 31, S. 29–34).

Dee, T. S. & Cohodes, S. R. (2008). Out-of-Field Teachers and Student Achievement: Evidence from Matched-Pairs Comparisons. *Public Finance Review, 36* (1), 7–32.

Grootenboer, P. & Zevenbergen, R. (2008). Identity as a Lens to Understand Learning Mathematics. Developing a Model. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Hrsg.), *Navigating currents and charting directions. Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Bd. 1, S. 243–249).

Ingersoll, R. M. (1998). The Problem of Out-of-field Teaching. *Phi Delta Kappan,* 773–776.

Loveys, K. (2011). *Scandal of the untrained teachers. Thousands don't have degrees in the subjects they teach.* Zugriff am 30.01.2014. Verfügbar unter http://www.dailymail.co.uk/news/article-1378908/Thousands-teachers-dont-degrees-subjects-teach.html

Richter, D., Kuhl, P., Haag, N. & Pant, H. A. (2013). Aspekte der Aus- und Fortbildung von Mathematik- und Naturwissenschaftslehrkräften im Ländervergleich. In H. A. Pant, P. Stanat, U. Schroeders, A. Roppelt, T. Siegle & C. Pöhlmann (Hrsg.), *IQB-Ländervergleich 2012. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I* (S. 367–390). Münster/New York/München/Berlin: Waxmann.

Richter, D., Kuhl, P., Reimers, H. & Pant, H. A. (2012). Aspekte der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften in der Primarstufe. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (S. 237–250). Münster: Waxmann.

Schoenfeld, A. H. (2011). How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications. New York: Routledge.

Wenger, E. (2007). *Communities of Practice. Learning, meaning, and identity* (Learning in Doing). Cambridge et al.: Cambridge Univ. Press.

Vale, C. (2010). Supporting "out-of-field" teachers of secondary mathematics. *The Australian Mathematics Teacher, 66* (1), 17–24.

Martin BRACKE, Kaiserslautern, Wolfgang BOCK, Lissabon

MINT-Projektunterricht in der Sekundarstufe I: Beispiele aus der Unterrichtspraxis

Obwohl es einen Konsens bezüglich der Wichtigkeit der Integration von Modellierungsproblemen in den Mathematikunterricht gibt, stehen Lehrerinnen und Lehrer dabei vor Problemen: Oft wird Zeitmangel als ein Hauptargument angeführt. Weiterhin sind viele Real-World-Probleme sehr komplex und scheinen nicht für Schülerinnen und Schüler (vielleicht sogar nicht einmal auf Universitätsniveau) bzw. für Kurzzeitprojekte geeignet zu sein. Ebenso können viele reale Fragestellungen nicht nur rein von der mathematischen Perspektive bearbeitet werden, da sie Inhalte anderer MINT-Disziplinen benötigen – dies ist eine große Herausforderung für die Schüler- sowie die Lehrerseite. Natürlich können Probleme immer vereinfacht werden; jedoch wenn der essenzielle Beginn des Modellierungsprozesses durch den Lehrer übernommen wird, kann dieser wichtige Punkt nicht von den Schülerinnen und Schülern erlernt werden. Später, sofern sie in einem MINT-Beruf arbeiten, ist jedoch niemand da, der ihnen diesen Schritt abnehmen wird und daher werden sie wohlmöglich mit der Bearbeitung von Real-World-Problemen (zur Definition siehe Bock, Bracke 2013) Schwierigkeiten haben.

Zusammengefasst scheint es schwierig eine sinnvolle Bildung in MINT-Fächern zu garantieren, nur indem man die Art des Unterrichtens der isolierten Teildisziplinen ändert. Wir haben bereits einige Erfahrung mit einem Langzeit-Experiment, in dem eine größere Anzahl von Modellierungsprojekten in den Regelunterricht eingebracht wurden (Bracke & Geiger, 2011). Dennoch tauchten während dieser Studie einige der oben genannten Schwierigkeiten auf, weshalb wir uns zu einem neuen Konzept für die MINT-Ausbildung entschlossen haben, das zur Zeit unter Evaluation als ein Pilotprojekt zwischen dem Felix-Klein-Zentrum für Mathematik und dem Heinrich-Heine-Gymnasium in Kaiserslautern läuft. Im Folgenden werden wichtige Bestandteile der Unterrichtspraxis dieses Konzepts beschrieben, was allerdings nicht die Darstellung konkreter Inhalte bzw. Unterrichtseinheiten bedeutet. Die Erfahrung der letzten Jahre hat gezeigt, dass prozessorientierte Fähigkeiten im Verhältnis zu reinen fachspezifischen Inhalten einen deutlich höheren Einfluss auf den Erfolg der gesamten dreijährigen Projektarbeit haben, weshalb auch in diesem Artikel der Fokus entsprechend gewählt wurde.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 225–228). Münster: WTM-Verlag

Setting und Entwicklung der Junior-Ingenieur-Akademie „MINT“

Bereits vor der Zusammenarbeit mit dem Felix-Klein-Zentrum für Mathematik gab es ein Wahlpflichtfach „MINT“ in der Mittelstufe des Hochbegabtenzweigs des Heinrich-Heine Gymnasiums in Kaiserslautern. Bis 2010 wurde keine Vernetzung zwischen den Fächern im Wahlpflichtfach „MINT“ vorgesehen, die Fächer wurden jahreweise sequentiell unterrichtet. So begann man im 7. Schuljahr mit MINT-Informatik, widmete sich in Klassenstufe 8 MINT-Mathematik und behandelte die Naturwissenschaft in Stufe 10 (Stufe 9 wird in diesem Zweig übersprungen).

Mit dem Antrag für eine Junior-Ingenieur-Akademie in Kooperation mit dem Felix-Klein-Zentrum änderte sich das Unterrichtskonzept. Das Wahlpflichtfach „MINT“ wird seitdem als Projektunterricht abgehalten. Hierbei stehen wie zuvor drei Unterrichtsstunden pro Woche in der Mittelstufe zur Verfügung. Jedoch steht nun im Kern ein authentisches MINT-Projekt, dass die involvierten MINT-Disziplinen vernetzen soll.

Ergänzend zum Unterricht gibt es Softskill- und Teamtrainings, welche von *Team Building* über einem *Zeit- und Projektmanagement* bis hin zu *Kreativtätstraining* und *Konfliktbewältigung* reichen (vgl. TheoPrax-Zentrum (Pfinztal)).

Die Projekte der Junior-Ingenieur-Akademie seit 2010 sind

Start 2010/11:	*„Standortplanung von Windrädern“* (M, Inf, Phy)
Start 2011/12:	*„Batterie, Akku und Brennstoffzelle – die Suche nach dem Superspeicher“* (M, Inf, Ch)
Start 2012/13:	*„Bioakustik – Automatisches Erkennen von Vogelstim men“* (M, Inf, Bio, Phy), Tabletklasse
Start 2013/14:	*„Neugestaltung des Pfaff-Geländes in Kaiserslautern“* (M, Inf, Ek, Phy)

Entwicklung der JIA (ab Schuljahr 2012/13)

In der Junior-Ingenieur-Akademie wurde in den ersten beiden Jahrgängen die drei beteiligten Fächer (Mathematik, Informatik und eine Naturwissenschaft) jeweils einstündig pro Woche von unterschiedlichen Lehrkräften unterrichtet. Im Hinblick auf die Projektstruktur hat sich eine solche Unterteilung als wenig hilfreich erwiesen. Ab dem Schuljahr 2012/13 wird die Naturwissenschaft in Stufe 7 als Einzelstunde, Mathematik und Informatik jedoch im Teamteaching als Doppelstunde unterrichtet. Seit Beginn des Schuljahres 2013/14 wird der Biologieunterricht in Runde 3 von einer Lehrerin gehalten, die auch den Mathematik- und Informatikunterricht im Teamteaching mitgestaltet. Dies ermöglicht eine flexible Einteilung von

Zeit- und Inhalten, wie sie im Rahmen dieses Projektes gebraucht wird. Durch das Teamteaching ist die Vernetzung der Lehrenden untereinander bei Unterrichtsplanung und Reflexion stark verbessert worden.

Wie bereits beschrieben, arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Projektarbeit mit einem Produkt als Ziel. Diese Produktorientierung liefert den roten Faden für das 3-Jahres-Projekt. Innerhalb des Gesamtprojekts wird jedoch oft an Klein- oder Miniprojekten gearbeitet, um benötigte Kenntnisse und Fertigkeiten zu erwerben, die für das große Ziel am Ende gebraucht werden. Die Vorgabe, welche Miniprojekte bearbeitet und welche Kenntnisse benötigt werden, soll hierbei weitgehend von Schülerseite kommen.

Seit Beginn des Schuljahres 2013/14 arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Runde 3 aufgeteilt in Expertenteams an verschiedenen Teilbereichen des Projekts. Das Ziel ist es eine App zu programmieren, welche automatisch Vogelstimmen erkennt. Hierbei sind neben der algorithmischen Umsetzung auch mathematische Modellierung, technische Umsetzung und sogar Design gefragt. Die Kleingruppen arbeiten entsprechend in diesen Teilgebieten und müssen sich regelmäßig austauschen, um das gemeinsame Projekt nicht aus den Augen zu verlieren.

Einerseits soll dieser Ansatz die individuellen Fähigkeiten fördern und ausbauen, aber auch die Interessen der Schülerinnen und Schüler berücksichtigen. Andererseits hat die notwendige Vernetzung der einzelnen Gruppen auch den Vorteil, dass Spezialisten den Nicht-Spezialisten Sachverhalte möglichst genau erläutern müssen. Das war zu Beginn für die Schülerinnen und Schüler ungewohnt, doch durch regelmäßige Kurz-Präsentationen von Ergebnissen ab Klassenstufe 7 wurde hier gezielt geübt. Zu beobachten ist, dass die Schülerinnen und Schüler inzwischen sehr kritisch mit schlechten Präsentationen und unverständlichen Erklärungen umgehen.

Rolle der Lehrenden – Teamteaching

Die Lehrkraft tritt in den Unterrichtsstunden vermehrt als Moderator und gegebenenfalls auch als Experte auf. Die Thematik geht oft über den Schulstoff hinaus. Daher ist es nötig, aufgrund von Authentizität, zuzugeben, dass man – auch als Lehrerin oder Lehrer – auf eine gestellte Frage keine (sofortige) Antwort hat und selbst Experten um Rat fragen muss. Der Umgang mit Experimenten und Software erfordert einen hohen Zeitaufwand: Die Schülerinnen und Schüler sollen ja möglichst viel experimentieren und ausprobieren.

Das Teamteaching ermöglicht es hier, individuell auf Schülerprobleme einzugehen ohne dass andere Teile der Klasse benachteiligt werden. Durch die Anwesenheit von zwei Lehrkräften in einer Doppelstunde ist es auch möglich die Klasse etwa zum Erlernen von Programmierkenntnissen zu teilen: Der eine Teil der Klasse unternimmt etwa physikalische Versuche, während der andere Teil parallel im Lehrgang am Rechner Programmieraufgaben umsetzt. Für den zweiten Teil der Doppelstunde werden dann die Rollen getauscht.

Ein weiterer Vorteil des Teamteachings wird bei der Unterrichtsplanung gerade im Hinblick auf die interdisziplinäre Struktur des Projekts deutlich.

Herausforderungen und Ideen

Durch die Einführung von Tablets in Runde 3 der JIA wurde der Zugang zu Informationen erleichtert. Hierbei tritt jedoch das Problem des Umgangs mit der Fülle von Informationen auf. Vielfach liegt ein Problem auf Schülerseite darin, die gefundenen Informationen kritisch zu hinterfragen und im Hinblick auf die gegebene Fragestellung geeignet zusammenzufassen und aufzubereiten.

Gerade die Interdisziplinarität und der Projektcharakter scheinen viele Lehrerinnen und Lehrer von MINT-Projektunterricht abzuschrecken. Hierbei scheint das Teamteaching sowohl bei der Unterrichtsplanung als auch bei der Durchführung ein Ausweg zu sein. Im Unterrichtsalltag stellt es sich jedoch oftmals als schwierig dar, Kollegen anderer Fächer als Experten für das Projekt zu gewinnen. Speziell in Nicht-MINT Fächern ist dies nach unseren Erfahrungen ein Problem. Durch Teamteaching und das Bilden von MINT-Teams an Schulen kann die Kommunikation der einzelnen Fächer untereinander verstärkt werden. Besonders bei der Unterrichtsplanung und bei Fragen, welche in die interdisziplinären Bereiche des Gesamtprojekts fallen, ist dies von großer Wichtigkeit.

Literatur

Bock, W. und Bracke, M. (2013). Project Teaching and Mathematical Modelling in Stem Subjects: A Design Based Research Study, Proceedings of CERME 8

Bracke, M. und Geiger, A. (2011). Real-world modelling in regular lessons: A long-term experiment. In Kaiser, G.; Blum, W.; Borromeo Ferri, R.; Stillman, G. (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling (pp. 529-550). Dordrecht, The Netherlands: Springer. Doi:10.1007/978-94-007-0910-2.

Kuenzi, J. J. (2008). Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education: Background, Federal Policy, and Legislative Action. CRS Report for Congress. Retrieved from http://www.fas.org/sgp/crs/misc/RL33434.pdf.

OECD (2001). Knowledge and Skills for Life: First Results from PISA 2000, OECD, Paris.

TheoPrax-Zentrum (Pfinztal). NWT-Unterricht in Pfinztal. Retrieved from http://www.-theo-prax.de/de/projekte/an-schulen/nwt-unterricht-pfinztal.html

Katinka BRÄUNLING, Andreas EICHLER, Freiburg

STELLA I: Lehren und Lernen von Arithmetik aus Sicht von Lehrkräften

1. Einleitung und theoretischer Rahmen

Die Bedeutung individueller Überzeugungen von Lehrkräften zum Mathematikunterricht ist hoch (Hannula, 2012). Untersuchungen haben gezeigt, dass die Planung und Durchführung des Mathematikunterrichts wesentlich durch die Überzeugungen der Lehrkräfte beeinflusst wird (Hiebert & Grouws, 2007). Dabei gibt es Hinweise darauf, dass die Überzeugungen von Lehrkräften spezifisch für einzelne mathematische Teildisziplinen sind (Eichler & Erens, 2012). Daher liegt der Fokus dieses Beitrags zum Projekt STELLA I (**S**ubjektive **The**orien von **L**ehrerinnen und Lehrern zum **L**ehren und Lernen von **A**rithmetik) auf den Überzeugungen von Lehrkräften für den Bereich der Arithmetik der Primar- und Sekundarstufe I.

Die mit der Planung und Durchführung verbundenen Ziele des Mathematikunterrichts können als spezifische Form von Überzeugungen verstanden werden (Eichler, 2011). Im internationalen Kontext als beliefs bezeichnet, stellen diese Überzeugungen subjektiv als wahr erachtete Aussagen zu einem Gegenstand dar (Philipp, 2007). Die Gesamtheit von Zielen zum Mathematikunterricht kann damit als zumindest quasi-logisches System von beliefs, also als sogenanntes belief system (ebd.), verstanden werden. Solch ein System zeichnet sich dadurch aus, dass es Unterschiede in der Zentralität von beliefs gibt und dass beliefs eine Hierarchie aufweisen, also bestimmte beliefs anderen untergeordnet sind (Green, 1971). Da wir davon ausgehen, dass der Grad der Zentralität von beliefs entscheidend für das unterrichtliche Handeln der Lehrkräfte und für die Weiterentwicklung ihrer belief systems ist, stellt die Identifikation von zentralen und peripheren beliefs ein Hauptanliegen der Studie dar. Aus diesem Grund werden beide Eigenschaften von belief systems in diesem Beitrag fokussiert.

2. Methodisches Vorgehen

Zu drei Erhebungszeitpunkten (Beginn des Referendariats, Ende des Referendariats und Ende des ersten Berufsjahres) werden je drei Personen aus der Grund- und der Realschule mit Hilfe von halbstrukturierten Leitfadeninterviews befragt. Parallel dazu erfolgen vier Interviews mit Grundschullehrkräften und vier Interviews mit Realschullehrkräften, die mindestens zehn Jahre Unterrichtserfahrung haben. Die Interviews umfassen Themenblöcke wie Inhalte, Ziele, Methoden, Materialien sowie vorgefertigte Prompts, in denen Aufgaben, Schüler- oder Lehreräußerungen bewertet

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 229–232). Münster: WTM-Verlag

werden sollen. Zur Analyse der Interviews werden deduktive Kodes verwendet sowie induktive Kodes entwickelt (Mayring, 2003). Deduktive Kodes umfassen u.a. die folgenden vier Typen von Zielsetzungen für den Mathematikunterricht: Schemaaspekt, Formalismusaspekt, Prozessaspekt und Anwendungsaspekt (Grigutsch et al., 1998).

3. Ergebnisse

Betrachtet wird das belief system der Referendarin Frau A. An ihrem Beispiel wird ein dreistufiger Analyseprozess dargestellt, mit dem Ziel zentrale und periphere beliefs zu identifizieren.

Im ersten Schritt der Analyse wird das belief system von Frau A auf der Basis des Interviewtranskripts charakterisiert. Es wird aufgezeigt, dass Frau A eine prozessorientierte Sichtweise auf Unterricht vertritt, die im Verlauf des Interviews immer wieder betont wird. So antwortet Frau A z.B. auf die Frage nach ihrem bevorzugten Unterrichtsstil:

„…das ist ja wohl wichtig, dass sie die Lösungswege selbstständig finden können, individuell bearbeiten können(…), dass sie Probleme selbstständig lösen können, dass sie offene Aufgaben bearbeiten können, dass sie so eigene Strategien finden…“

Nahezu analog antwortet sie zum Lernverhalten der Schüler:

„…mir ist immer wichtig, dass es von den Schülern selbst kommt, dass es problemorientiert ist, ich gebe den Schülern gerne Problemstellungen…“

Neben diesen Interviewpassagen zeigt sich die Prozessorientierung von Frau A aber auch in verschiedenen Prompts. Etwa ordnet sie bei vorgegebenen Zielkärtchen die Begriffe Problemlösen und Prozessorientierung über alle anderen Zielaspekte. Die Konsistenz aller hier gegebenen Antworten wird als Beleg dafür genommen, dass Prozessorientierung zentral im belief system von Frau A ist.

Im zweiten Schritt der Analyse wurden alle Episoden des Interviews kodiert und gewichtet. In Abbildung 1 ist die Summenbildung der deduktiven Codes der vier mathematischen Weltbilder (Anwendung, Formalismus, Prozess und Schema) im Säulendiagramm links dargestellt.

Der dritte Schritt der Analyse beinhaltet die Auswertung eines Fragebogens, der auf einer Skala von Grigutsch et al (1998) basiert und 24 Items zu den vier mathematischen Weltbildern beinhaltet (Abb. 1, links). Um die gewichteten Codes und die Fragebogenergebnisse vergleichen zu können, wurden die jeweiligen Ergebnisse standardisiert (Abb. 1, rechts). Sogar für eine einzelne Lehrkraft kann hier die gute Passung der beiden Auswertungen aufgezeigt werden.

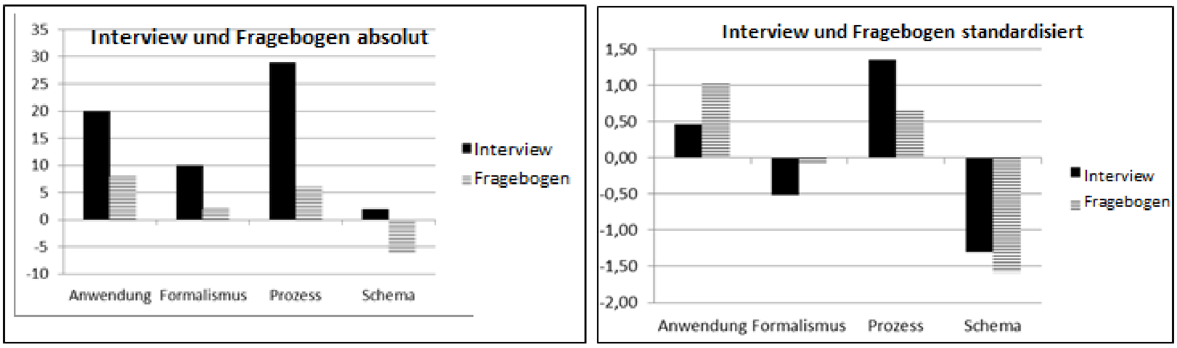


Abbildung 1: Gewichtete Codes und Fragebogenergebnisse

Zusammenfassend kann an dieser Stelle gesagt werden, dass sich die Prozessorientierung von Frau A durch alle Analyseschritte hindurchzieht. Sowohl am direkten Interviewtext, als auch in der Summe der Gewichtungen der Codes und in den Fragebogenergebnissen zeigt sich diese Präferenz und wird somit als zentraler belief von Frau A verstanden.

Während es die Summenbildung der gewichteten Codes und die Ergebnisse des Fragebogens ermöglichen, zentrale und periphere beliefs zu identifizieren, braucht es den genaueren Blick in das Interviewtranskript, um Relationen und Beziehungen von zentralen und peripheren beliefs erklären und aufzeigen zu können. So spielt z.B. neben der Prozessorientierung auch die Anwendungsorientierung bei Frau A eine zentrale Rolle. Allerdings wird an den Antworten von Frau A deutlich, dass sie Anwendung eher als Mittel zum Erreichen von Prozessorientierung versteht, diese also der Prozessorientierung untergeordnet ist. Anwendung scheint somit ein zwar zentraler aber eben der Prozessorientierung untergeordneter belief zu sein:

„Der Realitätsbezug ist auch wichtig, wie ich gesagt habe mit dem Geld und mit der Uhr, aber es muss nicht immer sein, z.B. heute habe ich sie ja auch nur mit einem fachlichen Problem konfrontiert."

Peripher, also unbedeutend, sind für Frau A dagegen die Formalismus-Orientierung wie auch die Schema-Orientierung, was sich ebenfalls in allen drei Stufen des Analyseprozesses nachweisen lässt.

4. Ausblick

Die Identifizierung von zentralen und peripheren beliefs wie auch der Hierarchie von beliefs in den drei vorgestellten Analyseschritten ermöglicht einerseits die Beschreibung eines individuellen belief systems. Andererseits ermöglicht diese die Beschreibung von Lehrertypen (Abb. 3) und liefert potentiell Erklärungsansätze zur Handlungsrelevanz sowie zur Änderungsresistenz von beliefs (Philipp, 2007), die in nachfolgenden Schritten unseres Forschungsprojekts untersucht werden sollen.

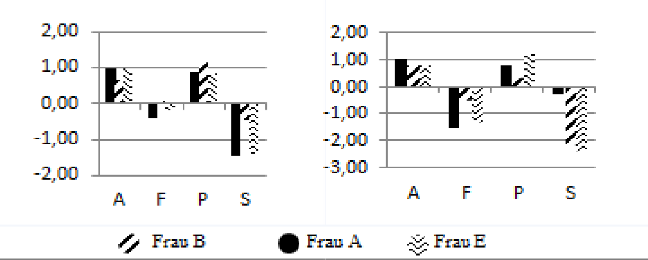
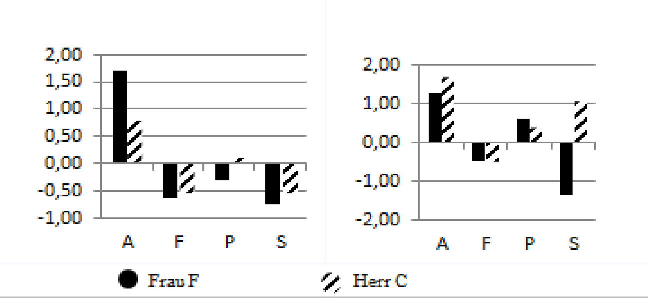
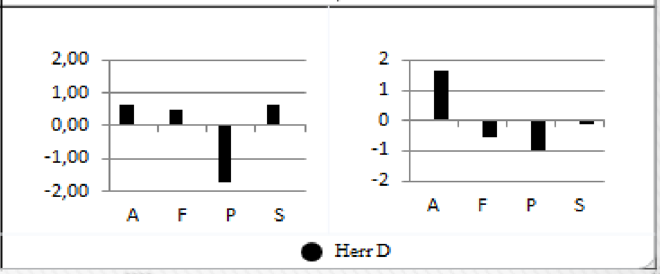
Typisierung	Interviewauswertung standardisiert	Fragebogenauswertung standardisiert
1 Prozess durch Anwendung Und deswegen wäre für mich ein guter Mathematikunterricht ein Unterricht, in dem die Schüler viel eigenständig erarbeiten und […] eigenständig Entdeckungen machen, man gemeinsam vielleicht reflektiert." (Frau E)		
2 reiner Anwender Also ganz oben hab ich den Realitätsbezug, weil dafür ist die Schule ja da, sie soll ja aufs Leben vorbereiten, also ist es wichtig, dass auch Dinge, die wir in der Schule berechnen auch irgendwas mit der Realität der Schüler zu tun hat. (Frau F)		
3 Schema durch Anwendung ...aber sicherlich auch dabei helfen soll einfach einen Automatismus bei den Schülern hervorzurufen, dass es eben dann einfach, dass sie was sehen und es im Grunde gleich schriftlich lösen können. (Herr D)		

Abbildung 3: Typisierung der 6 Referendare und Referendarinnen

Literatur

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. C. Batanero, G., Burrill, C., Reading, C. (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education: A joint ICMI/IASE Study*. ICMI and IASE, New ICMI Study Series (S. 175-186). Dordrecht: Springer.

Eichler, A. & Erens, R. (2012). Teachers' curricular beliefs referring to calculus. In: Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education (ICME), Seoul, Korea.

Green, T. F. (1971). *The Activities of Teaching*. New York: McGraw-Hill.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). *Einstellungen gegenüber Mathematik von Mathematiklehrern*. Journal für Mathematikdidaktik, 19(1), S.3-45

Hannula, M. (2012). Exploring new dimensions of mathematics – related affect: embodied and social theories. In: *Research in Mathematics Education 14* (2), S. 137 – 161

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effect of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim: Beltz.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Susanne BRAND, Hamburg

ERMO – Ein empirischer Vergleich zweier Ansätze zum *Er*werb von *Mo*dellierungskompetenzen

Theoretischer Hintergrund

Bei der Förderung von mathematischen Modellierungskompetenzen werden ein holistischer und ein atomistischer Ansatz unterschieden (vgl. Blomhøj & Jensen, 2003). Nach dem holistischen Ansatz wird davon ausgegangen, dass Modellierungskompetenzen durch die Durchführung vollständiger Modellierungsprozesse erworben werden, wobei die Komplexität der Modellierungsaufgaben den Fähigkeiten der Modellierenden entsprechen sollte. Im Gegensatz hierzu umfasst der atomistische Ansatz die Annahme, dass die Bearbeitung vollständiger Modellierungsbeispiele insbesondere zu Beginn des Kompetenzerwerbs zu zeitaufwändig und ineffektiv ist. Als angemessener wird eine separate Beschäftigung mit einzelnen Teilkomponenten des Modellierungsprozesses erachtet (vgl. ebd.; Zöttl, 2010).

Unter mathematischen Modellierungskompetenzen werden in Anlehnung an Weinert (2001) und Maaß (2004) erwerbbare, kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden, bestimmte Modellierungsaufgaben adäquat bearbeiten und lösen zu können. Eingeschlossen ist zusätzlich die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten in verschiedenen Modellierungsprozessen einzusetzen. Zentrale Charakteristika von Modellierungsprozessen sind dabei die Übersetzungsprozesse zwischen Realität und Mathematik (Niss, Blum & Galbraith, 2007). Bei der idealisierenden Darstellung des Modellierungsprozesses wird auf das didaktische Kreislaufmodell von Kaiser und Stender (2013) zurückgegriffen, von dem angenommen wird, dass es durch seine reduzierte Komplexität auch als metakognitives Hilfsmittel für Schülerinnen und Schüler genutzt werden kann.

Methodischer Rahmen

Im Rahmen des Projekts ERMO (Erwerb von Modellierungskompetenzen) werden spezifische Formen des holistischen und atomistischen Ansatzes hinsichtlich ihrer Effektivität in Bezug auf die Förderung von Modellierungskompetenzen empirisch miteinander verglichen. An dem Projekt, welches eingebettet ist in langjährige Modellierungsaktivitäten an der Universität Hamburg (vgl. u.a. Kaiser & Schwarz, 2010), waren 15 Klassen mit N=377 Schülerinnen und Schülern des 9. Jahrgangs verschiedener Gymnasien und Stadtteilschulen in und um Hamburg beteiligt. Die teilnehmenden Klassen wurden in eine holistische und eine atomistische Gruppe geteilt. Vor Beginn der Interventionsphase erhielten die Lehrkräfte,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 233–236). Münster: WTM-Verlag

getrennt nach Ansatz, eine dreistündige Vorbereitungsveranstaltung und ausführliche Leitfäden zur Durchführung der entwickelten Modellierungsaktivitäten. Die Interventionsphase selbst schloss für beide Vergleichsgruppen jeweils sechs Modellierungsaktivitäten und drei Tests von jeweils einer Doppelstunde ein (siehe Abbildung 1).

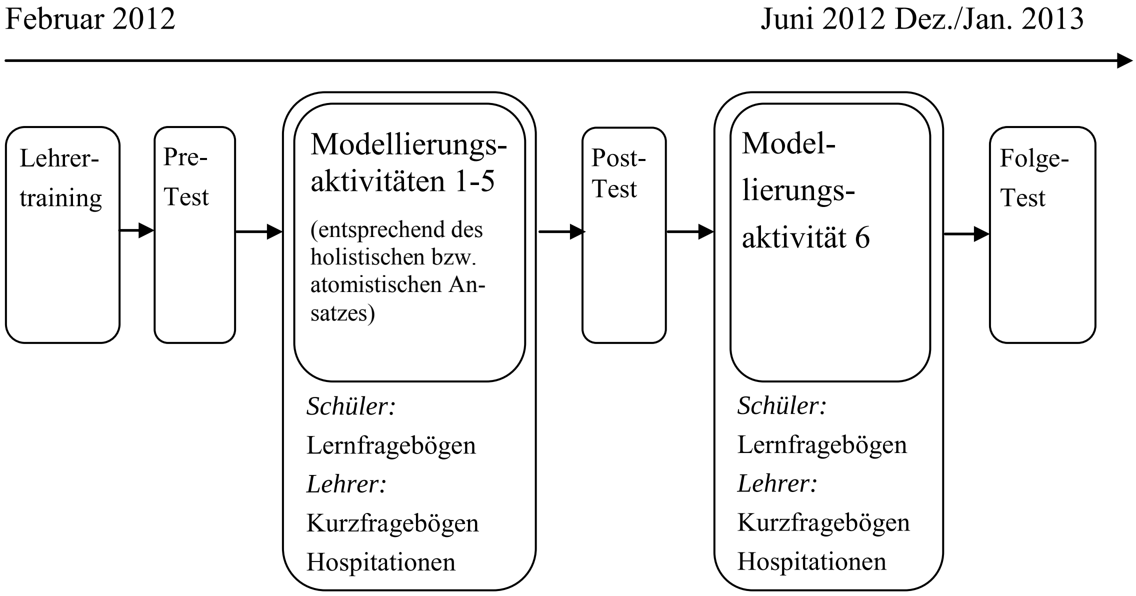


Abbildung 1: Interventionsdesign Projekt ERMO

Die Kontrolle des Treatments umfasste neben Kurzfragebögen, welche von den Lehrkräften im Anschluss an die Unterrichtsstunden ausgefüllt wurden, Hospitationen von etwa 80% der Modellierungsaktivitäten.

Zur Evaluation der Kompetenzentwicklung der beteiligten Lernenden wurden Modellierungstests im Pre-, Post- und Folge-Test-Design im Umfang von jeweils einer Doppelstunde entwickelt. Grundlage der Testkonstruktion war eine vierdimensional angenommene Kompetenzstruktur, dementsprechend wurden Items zu den drei Teilprozessen mathematischer Modellierung: *Vereinfachen / Mathematisieren*, *Mathematischen arbeiten* und *Interpretieren / Validieren* entwickelt sowie zu der übergreifenden Modellierungskompetenz *Gesamtmodellieren*, welche neben der Fähigkeit, vollständige Modellierungsprozesse durchführen zu können ebenfalls die Fähigkeit einschließt, einen Überblick über den Modellierungsprozess zu haben. Bei der Auswertung der Modellierungstests wurden diejenigen 204 Schülerinnen und Schüler von insgesamt 13 Schulklassen einbezogen, die vollständig an allen drei Testungen teilgenommen haben.

Die Skalierung der erhobenen Testdaten wurde mit Hilfe der probabilistischen Testtheorie durchgeführt (vgl. Rost, 2004) und erfolgte unter Rückgriff auf das Programm Conquest (vgl. Wu et al., 2007). Zur Untersuchung der Kompetenzstruktur wurden verschiedene psychometrische Modelle verwendet und anhand der informationstheoretischen Maße AIC, BIC und CAIC miteinander verglichen (vgl. Rost, 2004). Für das relativ beste, vierdimensionale between-item Modell mit den vier Kompetenzfacetten *Vereinfachen / Mathematisieren*, *Mathematisch arbeiten*, *Interpretieren / Validieren* und *Gesamtmodellieren* wurden im Anschluss an die Modellselektion die Personenfähigkeiten der getesteten Lernenden geschätzt und ausgewertet.

3. Ergebnisse

Die Auswertung der mit Hilfe der Modellierungstests erhobenen Daten lässt Rückschlüsse einerseits auf die Struktur der Modellierungskompetenzen zu und andererseits auf die Kompetenzentwicklung der untersuchten Schülerinnen und Schüler.

Der Modellvergleich bestätigt die theoretisch angenommen mehrdimensionale Kompetenzstruktur: die relativ beste Passung auf die Daten ergibt sich für das vierdimensionale between-item Modell mit den Dimensionen V*ereinfachen / Mathematisieren*, *Mathematisch arbeiten*, *Interpretieren / Validieren* und *Gesamtmodellieren*. Dieses Modell weist die relativ niedrigsten Werte der Informationskriterien AIC, BIC und CAIC auf und beinhaltet zusätzlich in allen Kompetenzfacetten mit Werten zwischen 0,767 und 0,823 zufriedenstellende EAP-/PV-Reliabilitäten. Die mehrdimensionale Struktur des der Auswertung der geschätzten Personenparameter zugrunde liegenden Modells ermöglicht eine dimensionsspezifische Analyse der Leistungsentwicklungen der getesteten Schülerinnen und Schüler.

Die Analyse der Personenfähigkeiten ergab insgesamt, dass die relative Effektivität des holistischen und atomistischen Ansatzes zur Förderung der Modellierungskompetenzen von Schülerinnen und Schülern differenziert zu sehen ist. Hinsichtlich der Kompetenzentwicklung wurden sowohl in der holistischen als auch in der atomistischen Gruppe in allen vier Kompetenzfacetten signifikante Leistungszuwächse zwischen dem ersten und zweiten sowie zwischen dem ersten und dritten Messzeitpunkt festgestellt. Folglich sind beide Ansätze unter realen Unterrichtsbedingungen geeignet, die verschiedenen Dimensionen der Modellierungskompetenzen zu fördern, da es sich bei dem Projekt ERMO um eine Feld- und keine Laborstudie handelt. Einschränkend ist hinzuzufügen, dass die Ergebnisse des Projekts ERMO lediglich relative Aussagen anhand eines Vergleichs der beiden Ansätze zulassen. Interpretationen der absoluten Leistungszunahmen sind dagegen nicht zulässig, da hierfür die Resultate einer Kontrollgruppe fehlen.

Bei der Auswertung der Daten sind sowohl zwischen verschiedenen Gruppen von Lernenden als auch zwischen verschiedenen Kompetenzfacetten

Unterschiede zwischen dem holistischen und dem atomistischen Ansatz rekonstruierbar. Eine grundsätzliche Überlegenheit eines der beiden betrachteten Ansätze wurde dabei nicht nachgewiesen. Die differenzierte Analyse der Kompetenzzuwächse nach Schulform deutet allerdings darauf hin, dass für vergleichsweise leistungsschwächere bzw. -heterogene Schulklassen der holistische Ansatz geeigneter zu sein scheint, da diese höhere Leistungszuwächse erzielten, wenn sie diesem Ansatz zugeordnet waren.

Literatur

Blomhøj, M. & Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications 22*(3), 123-139.

Kaiser, G. & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal für Mathematikdidaktik 31*, 51-76.

Kaiser, G. & Stender, P. (2013). Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-Directed Learning Environments. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. P. Brown (Hrsg.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (S. 277-293). Dordrecht: Springer.

Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.

Niss, M. Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (S. 3-32). New York: Springer.

Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion*. Bern: Verlag Hans Huber.

Wu, M. L., Adams, R. J., Wilson, M. R. & Haldane, S. A. (2007). *ACER Conquest Version 2.0. Generalised Item Response Modelling Software*. Camberwell: ACER Press.

Zöttl, L. (2010). *Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Lösungsbeispielen*. Hildesheim: Franzbecker.

Eileen Angélique BRAUN, Münster

Konzeption eines Lernangebots zum Sachkontext Zoo mit analysierten Impulsen zum Lösen von unscharfen Problemen

Konzipierung eines Lernangebots

Im Zuge der Digitalisierung tragen Didaktiker wie Oliver (2000) Richtlinien zusammen, die sich an Designer von web-basierten Lernangeboten richten. In diesen Richtlinien sind konstruktivistische Lernansätze eingeschlossen. Sie gewähren hinreichend viel Freiraum zur Konzeption vielfältiger Lernangebote und stützen sich gleichzeitig auf mathematikdidaktische Erkenntnisse. Beispielsweise weist Oliver (2000) auf die Bedeutung eines realistischen Kontextes hin, der mit überbestimmten Aufgabenfeldern einhergeht. Auch in der wissenschaftlichen Analyse können diese Richtlinien eine Orientierungshilfe für die Konzipierung eines Lernangebots darstellen. Harvey & Averill (2012) weisen indes darauf hin, dass „[t]he literature indicates using contexts to teach mathematics can be difficult and few detailed exemplars exist" (Harvey & Averill, 2012, S. 41).

Innerhalb des ZooMa-Projekts wurde eine Lernumgebung für Schülerinnen und Schüler der 3. bis 7. Jahrgangsklasse erstellt, um Lernende an die Modellierung von unscharfen Problemen heranzuführen. Am Beispiel des realitätsnahen Kontexts Zoos sollen sie im Wesentlichen erlernen, unter- bzw. überbestimmte Aufgaben zu lösen. Die Aufgabenstellungen enthalten nicht alle für eine erfolgreiche Bearbeitung notwendigen Daten. Die noch *unter*bestimmten Aufgaben werden durch das Hinzufügen eines Sachbuchs über das entsprechende Tier zu *über*bestimmten Aufgaben. In den Sachbüchern sind mehr Informationen enthalten als für eine erfolgreiche Modellierung erforderlich sind. Zu jedem der 16 Zootiere gibt es ein Sachbuch. Alle Sachbücher wurden nach einem einheitlichen Layout erstellt. Mittels der wiedererkennbaren Struktur können sich Lernende trotz des großen Datenumfangs orientieren. Sie erlernen durch das Bearbeiten dieser unscharfen Probleme neben dem Umgang mit Größen und der Festlegung auf eine Operation auch das Bestimmen und Recherchieren relevanter Daten (vgl. Stein & Braun, 2014). Zusätzlich zu den bereitgestellten realitätsnahen Kontexten und den 64 Aufgaben enthält die Lernumgebung für jede Aufgabe spezifische Hilfestellungen, welche – der Idee Vygotskis (1978) zum Scaffolding folgend – einen Unterstützungsrahmen darstellen. Dieser wird den Lernenden nicht erst nach einem Fehler angeboten, sondern grundsätzlich bei der Bearbeitung zur Verfügung gestellt (vgl. Vygotski, 1978, S. 88f.). Da das Lösen dieser

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 237–240). Münster: WTM-Verlag

Aufgaben ein gesteigertes Problembewusstsein erfordert, werden spezifische, den Lernenden frei zugängliche Impulse in Form von Tipps angeboten. Auf diese Weise verlieren die Aufgaben etwas an Offenheit, sind aber gleichzeitig als sogenannte einfache offene Aufgaben zugänglicher.

Zunächst wurden innerhalb des Forschungsvorhabens aus einer Fehleranalyse zehn theoriegeleitete Hilfestellungen generiert und anschließend in einer Vergleichsuntersuchung bezogen auf den individuellen Bearbeitungserfolg analysiert. Außerdem kommentierten die Lernenden durch einen Fragebogen die Nützlichkeit der Tipps. Nach der Analyse wurde eine Auswahl von drei bis vier Impulsen pro Aufgabe getroffen, welche auf das Verstehen der Aufgabe, die zu beschaffenden Daten und z. T. auch auf die mathematische Bearbeitung hinweisen. Die Aufgabe zum Nashorn: „Stimmt es, dass die Nashörner auf dem Foto zusammen knapp 10 000 kg wiegen? Schreibe deine Ideen und Rechnungen auf!" umfasst ein farbiges Foto, auf dem vier Nashörner zu erkennen sind, von denen eines im Schatten steht. Die ausgewählten Tipps lauten:

1. Hast du darüber nachgedacht, wie viele Nashörner auf dem Foto sind?
2. Im Buch findest du das Gewicht eines Nashorns.
   Das Inhaltsverzeichnis kann dir bei der Suche helfen.
3. Schreibe Wichtiges auf!

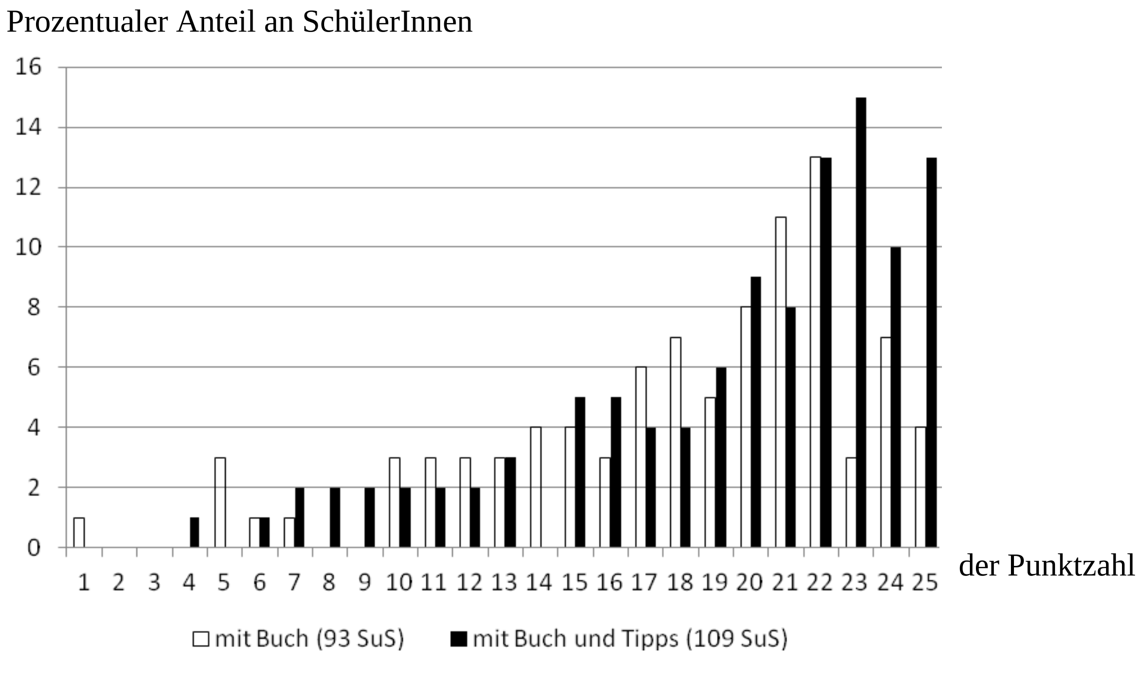
Analyseverfahren der Schülerlösungen

Auf Grundlage des Modellierungskreislaufs und des Bewertungsschemas nach Maaß (2009) sowie der Bewertung nach Leiss & Müller (2008) wurde ein Punktekatalog für jeden schriftlich erkennbaren Gedankengang erstellt. Für jede Aufgabe werden je nach Schwierigkeit unterschiedlich viele Punkte vergeben. Neben den notwendig zu leistenden Gedankengängen können zusätzliche Punkte separat analysiert werden. Für die erfolgreiche Bearbeitung der Nashornaufgabe werden für die fünf Phasen des Modellierungskreislaufs nach Maaß (2009) und der Dokumentation bis zu 25 Punkte vergeben.

Ergebnisse

Die Untersuchung fand zum Ende des vierten Schuljahres 2012 / 2013 in Münster und Umgebung statt. Eine Gruppe Lernender ($N_B = 93$) löste die Aufgabe ausschließlich mit dem Sachbuch zum Nashorn und eine weitere Gruppe ($N_T = 109$) hatte zusätzlich zehn Tipps. Die Lernenden beider Gruppen setzten sich insgesamt zu genau 50 % beider Geschlechter zusammen. Sie waren zwischen 8; 8 und 11; 10 Jahre alt. In beiden Varianten wurden während der Bearbeitung mit Ausnahme des Hinweises auf die Tipps dieselben einführenden Worte ohne sonstige Hilfestellung gegeben. Den Lernenden stand eine Schulstunde (45 min.) zum Lösen der Aufgabe zur Verfügung, wobei die Lernenden N_B diese Zeit nicht voll ausschöpften. Von den 93 Lernenden N_B legten sich 79 auf einen Wert für das Gewicht eines Nashorns fest. Das Sachbuch nutzten 67 Lernende (72,04 %) für eine erfolgreich Recherche. Die übrigen zwölf Lernenden schätzten einen Wert, der zwischen 65 kg (genau viermal) und 2000 t liegt. Wobei lediglich fünfmal das Gewicht zwischen 2 t und 3 t angegeben wurde.

Unter den Lernenden N_T, welche die Aufgabe einschließlich der Tipps bearbeiteten, bestimmten sogar 84 Lernende (77,1 %) das Gewicht erfolgreich mittels des Sachbuchs. In der Gruppe N_B liegt der Mittelwert der erreichten Punkte bei 17,94 (Standartabweichung 5,283). Die Schülerinnen und Schüler N_T schneiden mit einem Mittelwert von 19,41 Punkten (Standartabweichung 5,148) signifikant besser ab (Sig. (2-seitig) = 0,046, T = -2,009, df = 200). Der mittlere Effekt nach Cohen beträgt d = 0,28. Die Abbildung präsentiert die prozentuale Verteilung der erreichten Gesamtpunktzahl beider Gruppen.



Der Median der erreichten Punkte von N_T (MD = 21) weicht zur Gruppe N_B um zwei Punkte nach oben ab. Bei der Analyse wird deutlich, dass bei vier Phasen des Modellierungskreislaufs, nämlich bei der Bildung des Realmodells, der Bildung des mathematischen Modells, der Interpretation und der kritischen Reflexion, die Lernenden mit den Tipps mehr Punkte erhalten als die Lernenden N_B. Hinsichtlich der Datenbeschaffung sind die Lösungen der

Gruppe N_T sogar hochsignifikant besser (Sig. (2-seitig) = 0,003, T = -3,005, df = 200). Der mittlere Effekt nach Cohen beträgt (d = 0,43).

Diskussion

Das Sachbuch wird von den Lernenden als Informationsquelle angenommen. Ein Hinweis auf das Buch bewirkt, dass tendenziell mehr Lernende das Buch nutzen und in dieser Phase Daten hochsignifikant besser recherchieren. Obwohl die Nashornaufgabe im Vergleich zu den anderen unscharfen Problemen der Untersuchung eher einfach ist, schneiden die Lernenden N_T bereits bei dieser Aufgabe signifikant besser ab. Die Tipps zur Bildung des Realmodells wurden von etwa 80 % der Lernenden als hilfreich eingestuft. Die Bewertung der Tipps (nämlich mit dem Hinweis auf das Sachbuch, zum Festhalten wichtiger Daten und der Operation) korrelieren schwach bis mittel mit dem Erhalt des Punkts. Das heißt, diejenigen, die den Tipp als hilfreich bewerteten, erhielten i. d. R. auch den Punkt. Die Richtlinien Olivers (2000) kombiniert mit einer wissenschaftlichen Analyse können, wie das beschriebene ZooMa-Beispiel zeigt, dazu beitragen, gute Lernangebote methodisch und inhaltlich zu konzipieren.

Literatur

Harvey, R. & Averill, R. (2012): A Lesson Based on the Use of Contexts: An Example of Effective Practice in Secondary School Mathematics. In: *Mathematics Teacher Education and Development*. Vol. 14.1, S. 41-59.

Leiss, D. & M. Müller (2008): Offene Aufgaben – auch ein offenes Problem der Bewertung? In: *Praxis Schule*. Heft 5, S. 13-17.

Maaß, K. (2009): *Mathematikunterricht weiterentwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.

Oliver, R. (2000): When Teaching Meets Learning: Design Principles and Strategies for Web-based Learning Environments that Support Knowledge Construction. In R. Sims, M. O'Reilly, & S. Sawkins (Hrsg.): *Learning to choose: Choosing to learn. Proceedings of the 17th Annual Conference of the Australasian Society for Computers in Learning in Tertiary Education* (S. 17-28). Lismore, Australia: Southern Cross University Press. Abgerufen im Januar 2014, von http://www.ascilite.org.au/conferences/coffs00/papers/

Stein, M. & Braun, E. (2014): Aufgaben mit Realitätsbezug in einer Lernumgebung zum Thema Zoo. In: Bausch, Isabell; Pinkernell, Guido; Schmitt, Oliver (Hrsg.): *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder*. Münster: WTM Verlag, S. 351-362.

Vygotski, L. S. (1978): *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Massachusetts, Landon, England: Harvard University Press.

Bernhard BROCKMANN, Augsburg

Strategien von Schülern und typische Fehler beim Lösen linearer Gleichungen

Wahrscheinlich wird jeder Lehrer, der ein zentrales Thema wie Äquivalenzumformungen bei linearen Gleichungen behandelt, das Kapitel mit einem Test abschließen, der korrigiert, evtl. benotet und zurückgegeben wird. Bei der Besprechung der Testergebnisse mit den Schülern wird er die Aufgaben nach ihrem Anspruchsniveau gewichten, über den einen oder anderen Lösungsweg diskutieren, auf die häufigsten Fehler eingehen und sich passende Übungen überlegen. Ist der Test gut ausgefallen, sind Schüler und Lehrer zufrieden, für weitere Analysen aber bleibt in der Regel keine Zeit.

Anhand von Materialien aus dem Archiv der ehemaligen Zentralstelle für Computer im Unterricht, ergänzt durch aktuelle Erhebungen sollen mit nicht zu aufwendigen Werkzeugen differenzierte Auswertungen eines Tests zu linearen Gleichungen versucht werden.

Gruppe A (n=196)	*Gruppe B (n=66)*
19x + 84 = 23x	29x + 124 = 33x
9x + 5(4 + 3x) = 140	14x + 5(6 + 2x) = 150
14x - 15 + 29 = -8 + 19x - 21x	13x - 24 + 39 = -7 + 28x - 31x
15x - 82 = 16 - 4(7 - 5x)	15x - 87 = 18 - 5(7 - 4x)

Leicht oder schwer?

Als Maß für die Schwierigkeit einer Aufgabe wurde der Anteil richtiger Lösungen angesetzt. Ein aktueller Test (8. Klasse Februar 2014) schien die Anordnung des Autors nach steigendem Schwierigkeitsgrad zu bestätigen. Der Blick in andere Klassen zeigt aber, dass in manchen Fällen Aufgabe 1 fehleranfälliger als Aufgabe 2 war oder dass Aufgabe 3 die meisten Schwierigkeiten bereitete. Die leichten Einstiegsaufgaben 1 und 2 grenzen sich in ihrer Schwierigkeit jedoch deutlich gegen die beiden letzten Aufgaben ab. Der Anteil der richtigen Lösungen kann also nur eine grobe Orientierung für die Schwierigkeit einer Aufgabe geben. Unterschiede zwischen den Gruppen A und B lassen sich nur vermuten. Könnten z. B. die in Gruppe B etwas größeren Zahlenwerte Ursache für den etwas geringeren Anteil richtiger Lösungen sein?

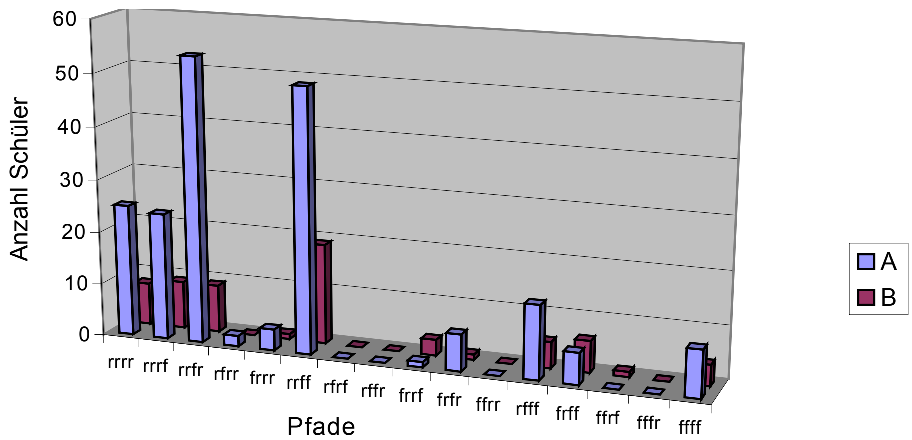
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 241–244). Münster: WTM-Verlag

Richtig oder falsch?

Wenn man bei den Lösungsversuchen nur zwischen richtig r und falsch f unterscheidet, lassen sich für alle Schüler alle möglichen „Erfolgspfade“ von „alles richtig“ über „Fehler nur bei der letzten Aufgabe“, ... bis „alles falsch“ aufzeichnen und z. B. wie bei einem Galtonbrett die Häufigkeiten zu jedem einzelnen Pfad angeben.

Ein Blick auf das Säulendiagramm zeigt schnell, dass etwa die Hälfte aller möglichen Pfade überhaupt nicht oder nur ganz selten vorkamen. Deutlich erkennbar wird auch hier der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben, weil z. B. Schüler mit 3 richtigen Lösungen ihre Fehler bei Aufgabe 3 oder 4 machen und Schüler mit 2 richtigen Lösungen ihre Fehler vorwiegend bei den Aufgaben 3 und 4 haben.

Die Diagrammsäulen erlauben auch Aussagen über die Sicherheit der Schüler im Lösen von Aufgaben. Als Maßstab könnte die Zahl der richtigen Lösungen dienen. Sieht man von den Schülern ab, die keine Aufgabe richtig haben, gibt es keine Auffälligkeiten.



	rrrr	rrrf	rrfr	rfrr	frrr	rrff	rfrf	rffr	frrf	frfr	ffrr	rfff	frff	ffrf	fffr	ffff
A	25	24	54	2	4	50	0	0	1	7	0	14	6	0	0	9
B	8	9	9	0	1	19	0	0	3	1	0	5	6	1	0	4

Differenzierte Analyse

Nach diesem mehr globalen Bewertungsansatz soll eine differenzierte lokale Analyse versucht werden. Ziel ist ein Überblick über die tatsächlich gewählten Lösungswege und über die von den Schülern gemachten Fehler. Es bedurfte mehrerer Ansätze, für die Darstellung der Lösungswege eine geeignete Form zu finden. Versuche, die Lösungen aller Schüler einer Klasse in einem einzigen Diagramm simultan aufzuzeigen, scheiterten an mangelnder Übersicht. Eine Aufteilung wurde notwendig: Fehler wurden in einer eigenen Liste nach Typen und vermuteten Ursachen erfasst, in das Diagramm nur Wege mit richtigen Lösungen aufgenommen. Es erwies sich dabei als praktikabel, zuerst mit einer Klasse zu beginnen und die verwendeten Zwischenschritte und damit die Lösungswege auf einer Folie aufzuschreiben bzw. einzuzeichnen. Auf einer zweiten, darüber gelegten Folie wurden dann Schüler für Schüler die benutzten Wege mit Punkten markiert. Relativ schnell entstand so ein Bild der Häufigkeitsverteilung für die einzelnen Lösungswege. Für die nächsten Klassen wurden stets weitere neue Folien zur Erfassung der Häufigkeiten aufgelegt. Fast immer mussten bisher nicht übliche Weg nachgetragen werden. Mit dieser Methode wurden aber Unterschiede auch zwischen den Klassen sofort sichtbar.

Links oder rechts? Analyse der Aufgabe 19x + 84 = 23x

Die Aufgabe schaffen die Schüler in der Regel in zwei Schritten. Ihr erster Blick gilt dabei Termen mit x, bevor sie Strategien für ihre Lösung entwickeln. Weil so die Subtraktion einfacher wird, fassen die meisten Schüler (mehr als zwei Drittel) Terme mit x auf der rechten Seite zusammen und kommen zur Gleichung 84 = 4x oder direkt zur Lösungsmenge. Schüler, die x lieber auf der linken Seite hatten, entwickelten allein für den ersten Umformungsschritt neun weitere Varianten. Welche Ideen hatten sie wohl?

- mit Seitentausch: 23x = 19x + 84; 23x - 19 x = 84; oder direkt 4x = 84
- ohne Seitentausch: 19x = 23x - 84; 19x - 23x = -84; -23x + 19x = -84; 19x - 23x + 84 = 0; -4x + 84 = 0; oder direkt zu -4x = -84

In der Regel geben die Schüler an, welche Rechenoperation sie vornehmen wollen (z. B. -19x). Gelegentlich schreiben sie Zwischenschritte und Nebenrechnungen auf; manche verzichten aber auch auf schriftliche Notation und führen mehrere Umformungen gleichzeitig durch. Die Vielfalt der individuellen Lösungswege in allen Klassen überrascht. Ein Zeichen für Methodensicherheit?

Überraschend ist auch, dass schon bei dieser relativ einfachen Aufgabe fast alle typischen Fehler vorkommen: Rechenfehler bei Subtraktion oder Division, Vorzeichenfehler, nicht deutbare Umformungsfehler, aber auch typische Fehler wie

- entgegengesetzte Operationen (z. B. links -84, rechts +84),
- einseitige Operationen (z. B. links -84, rechts unverändert),
- falsche Interpretation von Termen (z. B. 4x als 4 + x).

Lassen sich solche Fehler reduzieren oder gar vermeiden?

Aus dem Archiv der Zentralstelle: Üben mit Erfolg

Im Projekt „Computerunterstützter Unterricht“ (s. Literaturhinweis) wurden u. a. Untersuchungen zu einem Algebrakurs mit Programmen zum Thema Gleichungen durchgeführt (B. Brockmann: „Zur Effektivität von Übungsprogrammen – Untersuchung am Beispiel von linearen Gleichungen“). Die Auswertung von Protokollen, Tests und Erhebungen aus diesem Projekt enthält Aussagen auch zum Umgang mit typischen Fehlern:

Wurden z. B. die Schüler in einem Übungsprogramm – der Computer war hier Übungsmittel und zugleich Forschungsinstrument – besonders darauf hingewiesen, dass sie beim Umformen auf den beiden Seiten einer Gleichung entgegengesetzte Rechenoperationen durchgeführt hatten, so trug diese spezifische Diagnose in hohem Maße zur Vermeidung von Fehlern dieser Art bei. Diese Wirkung wurde noch verstärkt, wenn die Schüler aufgefordert wurden, ihren Fehler selbst zu beschreiben. Dass eine solche Aufforderung zur Verbalisierung nicht nur über das Medium Computer, sondern auch im Unterricht, vor allem aber bei der Arbeit mit einzelnen Schülern erfolgreich ist, kann als gesichert gelten.

Jung oder alt? Strategien von Erwachsenen

Die Aufgaben wurden auch einigen Erwachsenen vorgelegt, die 10, 20 oder auch 40 Jahre mit Gleichungen nichts mehr zu tun hatten. Auch nach langer „Mathe-Pause“ verfügten die Erwachsenen über Strategien zur Lösung der angebotenen Gleichungen. Wer sich mutig der Herausforderung stellte, alte Methoden aus der Schulzeit wieder zu aktivieren, spürte mit jeder Aufgabe, die bearbeitet war, wachsendes Vertrauen in die eigenen lange verborgenen Fähigkeiten und fand fast immer einen Weg zur richtigen Lösung. Besonders auffällig die Souveränität, mit der in einem einzigen Schritt die Seiten einer Gleichung vertauscht und Differenzen berechnet wurden. Diesen „ganzheitlichen Blick“, vermutlich am Waagemodell geschult, scheinen Erwachsene den allermeisten Schülern vorauszuhaben.

Wenn einzelne Fehler gemacht wurden, waren es Rechen- oder Vorzeichenfehler, in einem Fall auch einseitiges Operieren. Warum aber jemand, der eine Aufgabe der Gruppe A richtig löste, bei der gleich strukturierten Aufgabe B keinen Ansatz zu einer Lösung fand, bleibt ein Rätsel.

Literatur

Keil, K.-A. (1976). Das Projekt Computerunterstützter Unterricht Augsburg. Kapitel 5 Untersuchungen und Einsatzerfahrungen (S. 566-593). Augsburg: Zentralstelle für Programmierten Unterricht. (Auszüge aus dem Projektbericht, graphische Darstellungen, für die in diesem Beitrag kein Platz ist, über bernhard.brockmann@web.de)

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

Wie steigert man die Problemlöse- und Argumentationskompetenz? Ergebnisse der HeuRekAP Studie

1. Hintergrund

Argumentieren und Problemlösen sind grundlegende mathematische Tätigkeiten und sollten entsprechend im Unterricht abgebildet werden. Daher stellt sich die Frage, wie ein Unterricht gestaltet werden sollte, dessen Ziel in einer Steigerung der Schülerkompetenzen in diesen Bereichen besteht (vgl. z. B. Herbst 2002, S. 283f.).

Boero (1999) beschreibt sechs Phasen des Beweisprozesses, beginnend mit der Untersuchung eines Sachverhaltes und Aufstellen einer Vermutung, dem Formulieren einer Aussage gemäß fachlicher Konventionen, dem Erforschen des Umfeldes der Vermutung, der Auswahl und Aneinanderreihung von Argumenten in eine deduktive Reihe, der publizierbaren Verschriftlichung dieser deduktiven Reihe und schließlich – insbesondere für den schulischen Bereich zu weit gehend – dem Erreichen mathematischer Strenge. Nach Reiss (2002, S. 9) ergibt sich eine „wesentliche Schwierigkeit […] nun daraus, dass in einem Prozess der Beweiskonstruktion, so wie ihn Boero beschreibt, insbesondere die explorativen Schritte für Schülerinnen und Schüler (und wahrscheinlich auch für viele Mathematiklehrer) weitgehend intransparent bleiben". Ein Ziel des HeuRekAP-Projektes war es daher, die Schülerinnen und Schüler zu möglichst vielen unterrichtlichen Gelegenheiten die Phasen des Beweisprozesses eigenständig durchlaufen zu lassen. Eine umfassende Beschreibung einer solchen Phasenfolge zum Unterrichtsthema „Satz des Thales" findet sich bei Brockmann-Behnsen (2013).

Bezüglich eines erfolgreichen Heurismentrainings fordert König (1992, S. 24) ein „explizites Abheben von methodologischen Erkenntnissen", was im HeuRekAP-Projekt durch separate Unterrichtsphasen realisiert wurde.

2. Forschungsfragen/ -hypothesen

Der Forschungsschwerpunkt für die in diesem Artikel beschriebene Untersuchung liegt in der Auswertung von Schülerprodukten zu verschiedenen Aufgaben vor und nach dem Heurismen- und Argumentationstraining des HeuRekAP-Projektes. Konkret wurde untersucht, in welchem Maße Argumente von den Schülerinnen und Schülern mathematisch korrekt verknüpft wurden. Zu Beginn der Studie sollten bei den Produkten der parallelisierten Stichproben aus Trainings- und Vergleichsgruppe wenig oder keine Unter-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 245–248). Münster: WTM-Verlag

schiede zu sehen sein, nach dem Training sollten sich bei der Vergleichsgruppe leichte und bei der Trainingsgruppe deutliche Verbesserungen in der Vollständigkeit der Argumentationen zeigen.

3. Methodologie

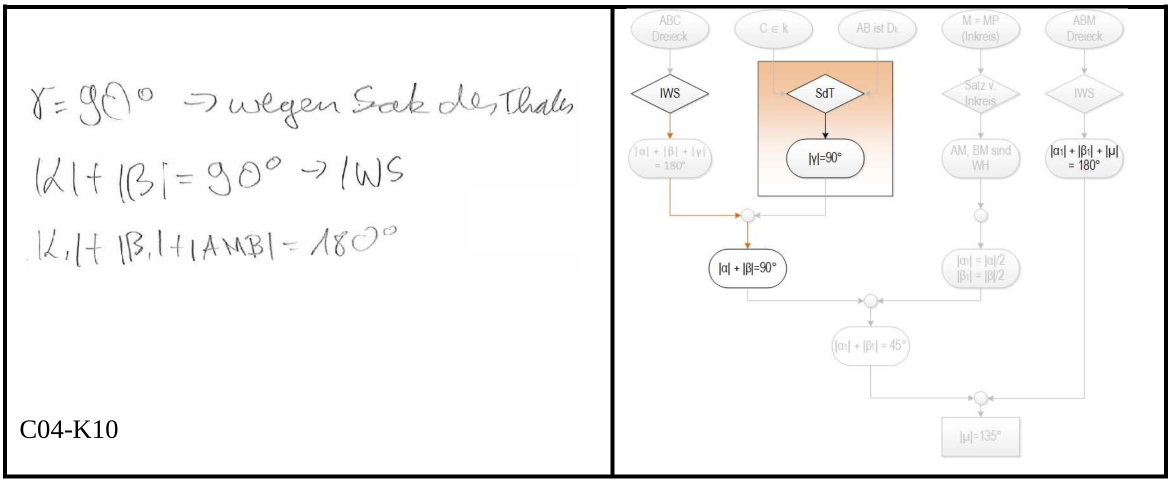
Im Verlauf des HeuRekAP-Projektes wurden vier Klassen eines hannoveraner Gymnasiums über einen Zeitraum von eineinhalb Jahren untersucht, zwei davon waren mathematisch-naturwissenschaftliche Profilklassen, die beiden anderen nicht. Je eine Klasse mit und ohne Profil wurde über den Gesamtzeitraum der Studie vom Autor unterrichtet. Dieser Unterricht umfasste auch ein im Rahmen des Projektes entwickeltes Heurismen- und Argumentationstraining.

	MN-Profil	Kein Profil
Training	**ET** (Klasse D)	**IT** (Klasse C)
Kein Training	$\mathbf{V_1}$ (Klasse A)	$\mathbf{V_2}$ (Klasse B)

Für die hier beschriebenen Untersuchungen wurden zwei parallelisierte Stichproben von je 15 Schülerinnen und Schülern aus den mathematisch-naturwissenschaftlichen Profilklassen D (mit explizitem Heurismen- und Argumentationstraining „ET") und A (Vergleichsklasse V_1 ohne Training) ausgewählt.

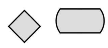
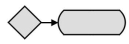
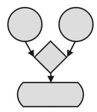
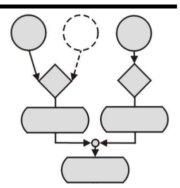
Erhoben wurden die schriftlichen Bearbeitungen aller 30 Probanden von zwei Aufgaben vor Beginn der Studie („Raute 1" und „Winkel 1") und von drei Aufgaben zum Ende der Studie („Raute 2": ähnlich „Raute 1", erneut die Ankeraufgabe „Winkel 1" und die TIMSS-Aufgabe K10 als komplexere Aufgabe):

Die Bearbeitungen der Probanden wurden im Sinne der Vergleichbarkeit und Kategorisierbarkeit in einem ersten Schritt mithilfe gerichteter Multigraphen sensu König (1996, S. 17) in ein strukturiertes und standardisiertes Repräsentationsformat überführt. Nachfolgend wird dies exemplarisch für die Bearbeitung des Probanden C04 und die Aufgabe K10 dargestellt:



Im Produkt genannte Startgrößen werden in Kreise bzw. Ovale geschrieben, genannte Zielgrößen in Quadrate bzw. Rechtecke, Teilziele (nach König 1992, S. 25 „Feststellungen“) in eine Mischform aus Oval und Rechteck und Hilfsmittel („Sätze, Definitionen, Formeln, Umformungsregeln“, ibid.) in Rauten. Beschriebene Folgerungen werden durch Pfeile repräsentiert.

In einem zweiten Schritt wurde die Vollständigkeit des Argumentationsweges an Hand des erstellten Lösungsgraphen beurteilt. Dazu wurde ein sechsstufiges, ordinalskaliertes Kategoriensystem entwickelt:

Kat.	Kurzbeschreibung	Repräsentation im LG
K0	**Kein Ansatz** Keine Bearbeitung oder Nennung nur vollständig sachfremder Dinge	
K1	**Atome** Unzusammenhängende Nennung von geeigneten Zwischenziele bzw. Hilfsmitteln	
K2	**Moleküle** Mathematisch korrekte Verknüpfung von Teilzielen und/ oder Hilfsmitteln	
K3	**Deduktive Keimzellen** Mindestens eine vollständige und korrekte mathematische Schlussfolgerung	
K4	**Deduktiver Torso** Mindestens eine mathematisch korrekte Zusammenführung zweier mathematischer Schritte zu einem neuen Teilziel	
K5	**Deduktiver Körper** Eine im Wesentlichen vollständige deduktive Schlusskette	Im wesentlichen vollständiger LG

4. Ergebnisse

Es ergaben sich vergleichbare Ergebnisse beider parallelisierter Gruppen bezüglich der Mediane erreichter Kategorien bei den Bearbeitungen der Aufgaben vor Beginn der Studie, aber signifikante Unterschiede bei den Bearbeitungen der drei Aufgaben zum Ende der Studie ($\chi^2 = 19{,}72$, $p < 0{,}0001$):

	Raute 1 (Pre)	**Raute 2** (Post)	**Winkel 1** (Pre)	**Winkel 1** (Post)	**K10** (Post)
ET: Median (Quartilsabstände)	**2** (1)	**4** (1)	**2** (3)	**4** (0,5)	**2** (0,5)
$\mathbf{V_1}$: Median (Quartilsabstände)	**2** (1)	**1** (2)	**2** (2)	**2** (2)	**1** (1)

Vergleicht man die Entwicklung der Trainingsklasse ET bezüglich der erreichten Kategorien zwischen den beiden Pre-Aufgaben Raute 1 und Winkel 1 und den beiden zugehörigen Post-Aufgaben Raute 2 und Winkel 1 (Post), so zeigt sich, dass nur 5 von 30 Produkten in derselben oder einer schlechteren Kategorie verblieben, wogegen 21 Produkte sich um zwei oder mehr Kategorien verbesserten. In der Vergleichsklasse ergibt sich ein nahezu inverses Bild: 18 der 30 Produkte verblieben in derselben Kategorie oder verschlechterten sich gar, lediglich 5 Bearbeitungen stiegen um zwei oder mehr Kategorien.

5. Diskussion/ Ausblick

Im Rahmen dieses Artikels wurden die Produkte von zwei parallelisierten Gruppen von je 15 Schülerinnen und Schülern vor Beginn und zum Ende eines Zeitraumes von eineinhalb Jahren untersucht. Zur Untersuchung der Argumentationsqualität wurde ein System entwickelt, mit dessen Hilfe die explizierten Einzelheiten einer Argumentationskette und deren Verknüpfung kategorisiert werden kann. Literaturgemäß zeigten sich vor Beginn der Studie bei beiden Gruppen eher schwache Leistungen bezüglich der Vollständigkeit der verschriftlichten Argumentationen. Die über den beschriebenen Zeitraum trainierte Gruppe zeigte aber zum Ende der Studie signifikant bessere Leistungen.

Weitere Untersuchungen zur Effektivität des Heurismen- und Argumentationstrainings werden folgen. Außerdem müssen die Untersuchungen auf die zweite Trainingsklasse C und die Vergleichsklasse V_2 einerseits sowie auf weitere erhobene Aufgaben andererseits ausgeweitet werden.

Literatur

Brockmann-Behnsen, D. (2013). The process of proving Thales' Theorem. In: Scottish Mathematical Council Journal 43 (2013), 26-31

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematical education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Juli / August 1999

Herbst, P. (2002):Establishing a Custom of Proving in American School Geometry: Evolution of the Two-Column Proof in the Early Twentieth Century, in: Educational Studies in Mathematics 49: 283–312, 2002, Kluwer Academic Publishers.

König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen, in: Der Mathematikunterricht Jg. 38, 3/1992

König, H. (1996): Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich, Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler, Chemnitz

Reiss, K. (2002). Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. Projektserver SINUS. Bayreuth. Universität

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Thomas GAWLICK, Hannover, Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Heurismen- und Argumentationstraining im Unterricht, explizit oder implizit?

1. Hintergrund

Argumentieren und Beweisen sowie Problemlösen sind wesentliche Tätigkeiten professioneller Mathematiker. Daher finden sich diese Tätigkeiten auch im Kompetenzkanon der Schulcurricula (vgl. Niedersächsisches KC 2006, S. 17 f.). Defizite speziell beim Problemlösen können gemäß dem Kompensationsprinzip von Bruder (Bruder & Collet, 2011, S. 36) durch ein gezieltes Heurismentraining z. T. ausgeglichen werden. Folglich stellt sich die Frage, wie ein solches Training auszusehen hat. Wir haben aus der Literatur zwei mögliche Herangehensweisen abgeleitet:

Pólya (1949, S. 18) fordert vom Lehrer, den Schülern die Fragen aus seinem berühmten Problemlösekatalog so oft vorzulegen, „wie er das ungezwungen tun kann. [...]. Dank dieser Führung wird der Schüler schließlich hinter den rechten Gebrauch dieser Fragen und Anregungen kommen“. Diese Vorgehensweise bildet den Kern für das, was wir *implizites Training* nennen: Heurismen werden an Hand des aktuellen Schulstoffes im laufenden Unterricht vom Lehrer akzentuiert.

König (1992, S. 24) dagegen behauptet, dass „ein nur implizites Vermitteln etwa durch Vorbildwirkung“ nicht ausreicht und fordert ein „explizites Abheben von methodologischen Erkenntnissen“. In unserem *expliziten Training* geschieht dies im Rahmen separater Unterrichtsphasen zu Heurismen Zu den in unserem Training vermittelten Heurismen gehörten Hilfsmittel (Hilfslinien, Tabellen, Gleichungen), Strategien (Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten) und Prinzipien (Analogie).

In Bezug auf das Beweisen durchliefen die Schüler in beiden Trainings an vielen Stellen des Unterrichtes komplette Beweisprozesse, die sensu Boero (1999) aus den Phasen a) Satzfindung, b) Satzformulierung, c) Beweisfindung, d) Beweisorganisation und e) Beweisdarstellung bestehen[1]. Die Phasen a) und c) wurden durch den Einsatz von elektronischen, interaktiven Arbeitsblättern (EIWOS) flankiert, die aus dem Bestand von Elschenbroich & Seebach (2002) weiterentwickelt wurden.

[1] Boero beschreibt mit dem *Erreichen mathematischer Strenge* noch eine sechste Phase, zitiert aber Thurston, der sagt, dass diese Phase praktisch unerreichbar und für die Arbeit von Mathematikern nicht wichtig ist.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 249–252). Münster: WTM-Verlag

2. Analogie – Beispiel für einen trainierten Heurismus

Als Beispiel für einen in beiden trainierten Klassen eingeführten Heurismus stellen wir hier das Analogieprinzip vor. Im Folgenden wird kurz umrissen, wie dieses Prinzip im Rahmen des *expliziten* bzw. *impliziten Trainings* behandelt wurde:

2.1 Das Analogieprinzip im impliziten Training

Das Analogieprinzip wurde inhaltlich an die Einführung der quadratischen Funktionen geknüpft. Im Rahmen des impliziten Trainings wurden im laufenden Unterricht unter anderem Analogien zwischen den Eigenschaften quadratischer Funktionen *(Aktuelle Aufgabe)* und linearer Funktionen *(Ähnliche Aufgabe)* herausgearbeitet. Das folgende Beispiel stammt aus der Einführungsphase in die Thematik, weitere Analogien bezogen sich auf das Arbeiten mit den Funktionsgleichungen quadratischer und linearer Funktionen (Werteberechnungen, Äquivalenzumformungen etc.) bis hin zu quadratischen respektive linearen Regressionen.

Ähnliche Aufgabe		Lehrer-impulse		*Aktuelle Aufgabe*
Wie lautet die Funktionsgleichung einer Normalparabel, deren Scheitelpunkt um zwei Einheiten auf der Ordinate nach oben verschoben ist.	⟶	Kennst du Aufgaben, bei denen etwas Ähnliches gesucht wird wie hier? (…)	⟶	Wie lautet die Funktionsgleichung einer linearen Funktion, deren Graph um zwei Einheiten auf der Ordinate nach oben verschoben ist.

2.2 Das Analogieprinzip im expliziten Training

Hier wurde das Analogieprinzip außerdem im Rahmen einer separaten Doppelstunde kontextunabhängig unterrichtet. Diese separaten Unterrichtsphasen bestehen aus drei Säulen:

a) Im Rahmen einer vorbereitenden Hausaufgabe erinnern oder informieren sich die Schülerinnen und Schüler, wo und wann sie den fraglichen Heurismus im (Mathematik-)Unterricht oder außerhalb der Schule zuvor schon verwendet haben und warum er in jener Situation hilfreich war.

b) Während der separaten Unterrichtsphase erstellen die Schüler gemeinsam einen Metaplan unter der Fragestellung: Wie kann mir der Heurismus hilfreich sein?

c) Der Lehrer stellt den Schülern stoffübergreifende Aufgaben, für deren Lösung der Heurismus hilfreich ist. Nachfolgend findet sich ein Beispiel für eine solche stoffübergreifende Aufgabe:

Aufgabe 1 (*Ähnliche Aufgabe*):	**Aufgabe 2** (*Aktuelle Aufgabe*):
Ein Rechteck hat den Umfang 60cm. Eine Seite ist 5cm länger als die benachbarte Seite. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?	Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit der Fläche $22{,}5\ cm^2$ unterscheiden sich die Längen der Katheten um 4cm. Bestimme die Längen der Katheten.
Die Schüler bearbeiten die *ähnliche Aufgabe* zunächst im Plenum.	Danach bearbeiten die Schüler die *aktuelle Aufgabe* im Rahmen einer Ich-Du-Wir Folge.

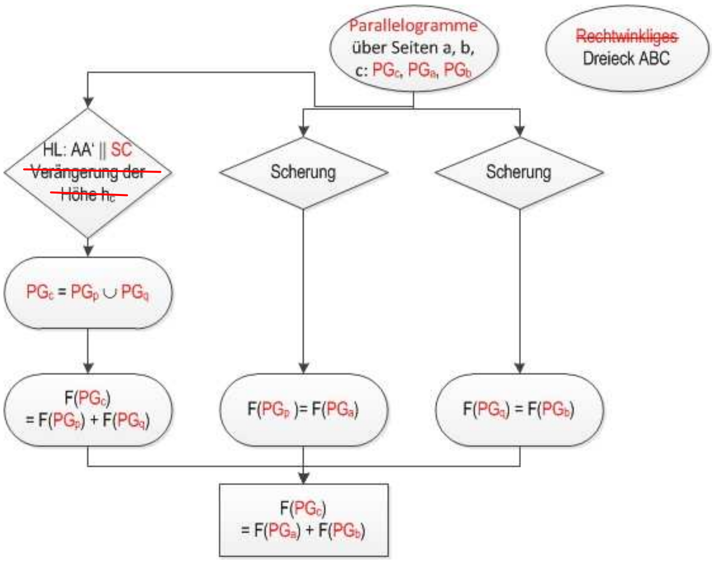
3. Beweisen im HeuRekAP Training

Im Laufe des HeuRekAP-Trainings sollten die Schülerinnen und Schüler an möglichst vielen Stellen den gesamten Beweisprozess sensu Boero 1999 durchlaufen. Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick über die Phasen dieses Prozesses für die Unterrichteinheit „Satz des Pythagoras“. Eine ausführliche Beschreibung des Beweisprozesses für die Einheit „Satz des Thales“ findet sich bei Brockmann-Behnsen 2013.

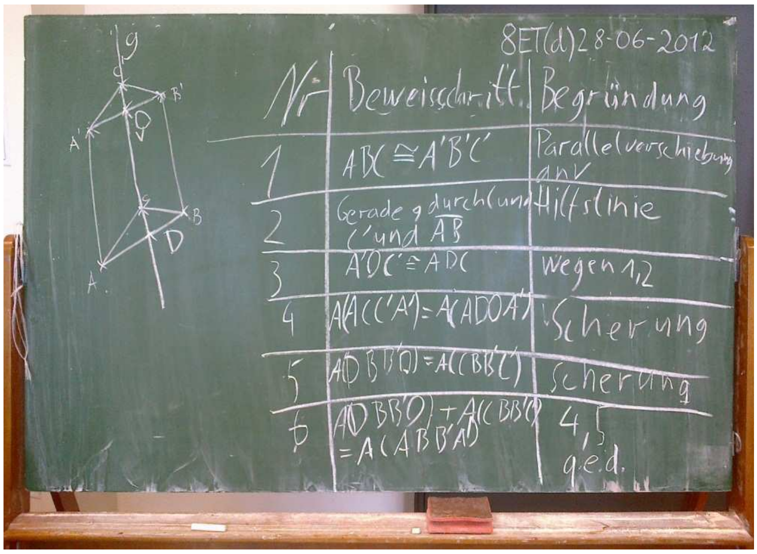
Phase	**Inhalte**	**Soz.-F.**	**Medien**
1 Satzfindung	Untersuchung des Scheitelwinkels eines Dreieckes, Entdeckung des SdP, Tabelle zur Unterscheidung der Fälle: C außerhalb, innerhalb und auf dem Umkreis von AB	Einzeln PA Plenum	EIWOS 1 Lerntagebuch Tafel
2 Satzformulierung	Gemeinsame Formulierung des Satzes für den Fall: $\gamma = 90°$. (C auf dem Umkreis um AB)	Plenum	Tafel
3 Beweisfindung	Lehrerimpulse: Was wissen wir schon in Bezug auf Flächen, Quadrate etc. Welche heuristischen Hilfsmittel sind uns bekannt?	Plenum	EIWOS 2
4 Beweisorganisation	Erstellen und Zusammenführen von Argumentationsteilen	Einzeln PA	Beweispuzzle Lösungsgraph mit Lücken
5 Beweisdarstellung	Niederschrift des Beweises in einem Zweispaltenbeweis	Einzeln PA Plenum	Tafel Lerntagebuch

4. Übertragen der Beweisidee

Der Satz des Pythagoras wurde mit einem Scherungsbeweis bewiesen. Im Anschluss wurde den Schülerinnen und Schülern der Satz des Pappus vorgelegt. Diese erkannten im Spezialfall (Translation des Dreiecks ABC auf A’B’C‘) die Analogie zwischen den beiden Sätzen und übertrugen die zentrale Beweisidee des Kathetensatzes auf die neue Situation. Die dafür erforderlichen Umstrukturierungen können auch anhand eines Lösungsgraphen verdeutlicht werden, was im Unterricht häufig geschah:



In den Voraussetzungen müssen für den Satz des Pappus nun die Quadrate aus dem Satz des Pythagoras durch Parallelogramme ersetzt werden. Das betrachtete Dreieck bleibt auch nicht auf den rechtwinkligen Fall beschränkt. Die grundsätzliche Idee der Flächentrennung und –verwandlung durch Scherung bleibt aber unter der Analogie erhalten. Nachstehend sieht man die Niederschrift des Beweises dieser Pappus–Variante von Schüler D13 aus dem oberen Leistungsdrittel als Zweispaltenbeweis. Interessanterweise ist der formal übertragene Schritt 3 redundant, was Schülerin D03 aus dem mittleren Leistungsdrittel auffiel und Anlass zu einer guten Diskussion lieferte.



Literatur

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematical education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Juli / August 1999

Brockmann-Behnsen, D. (2013). The process of proving Thales' Theorem. In: Scottish Mathematical Council Journal 43 (2013), 26-31

Bruder, R. & Collet, Chr. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin, Cornelsen Scriptor

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2002): Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Euklid DynaGeo, Lehrerhandbuch, 8. Klasse, co.Tec-Verlag

König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen, in: Der Mathematikunterricht Jg. 38, 3/1992

Pólya, G. (1949): Schule des Denkens, Francke, Tübingen

Ines BRONNER, Dortmund

Von der Situation zum Graphen – Wie Studierende graphentheoretische Modelle identifizieren

Im vorliegenden Beitrag werden die Konzeption und erste Ergebnisse einer Studie mit Lehramtsstudierenden zu Identifikationsprozessen graphentheoretischer Modelle in neuen Situationen beschrieben. In der Studie sollen im Sinne fachdidaktischer Entwicklungsforschung (vgl. Hußmann et al. 2013) individuelle Begriffe von Studierenden zu den fünf Bearbeitungsmodellen der *kürzesten Wege, aufspannenden Bäume, Eulerwege, Matchings* und *Färbungen* analysiert und deren Charakterisierung und Differenzierung im Umgang mit neuen Situationen beforscht werden. Nach einer Spezifizierung/Restrukturierung des Lerngegenstandes und der Analyse auftretender Hürden im Identifizierungsprozess, wird das Lernarrangement der Studierenden (die Veranstaltung „Diskrete Mathematik“ an der TU Dortmund) im Sinne eines iterativen Prozesses umgestaltet.

1. Charakteristika des Lerngegenstandes

In der Graphentheorie sind Problemstellungen häufig Beweis- oder Konstruktionsprobleme (vgl. Thiess 2002, 46). Die Konstruktionsprobleme lassen sich dabei noch mal in die Modellklassen der Zuordnungs- oder Wegeprobleme unterteilen (vgl. Dobrowolski 2010, 24; Lutz-Westphal 2006). Zuordnungsprobleme stellen dabei Probleme dar, in denen Elemente einander zugeordnet werden bzw. Eigenschaften Elementen zugeordnet werden müssen. Situationen, die man mithilfe eines Matchings oder einer Färbung lösen kann, passen somit in diese Modellklasse. Bei Wegeproblemen ist der Begriff des Weges ein zentrales Charakteristikum der zur Situationsbearbeitung hilfreichen Modelle, so dass z.B. die Konstruktion eines speziellen Weges hilfreich sein kann. Situationen, die man mithilfe eines aufspannenden Baumes, eines kürzesten Weges oder eines Eulerweges lösen kann, lassen sich somit den Wegeproblemen zuordnen.

In der Bearbeitung konkreter Situationen lassen sich einige Merkmale graphentheoretischer Modellnutzung ausmachen, die einen Einfluss auf den Umgang mit der gegebenen Situation haben: In der Graphentheorie können spezifische Bearbeitungswege zur Konstruktion eines gewählten Modells nicht direkt aus der Situation heraus umgesetzt werden, sondern die gegebene Situation muss zunächst als Graph dargestellt werden. Dieses *Rahmenmodell*, das relevante Grundstrukturen der Situation wiedergibt, dient als Grundlage für die Konstruktion eines passenden Bearbeitungsmodells, dass dann die Antwort auf eine entsprechende Fragestellung liefert. Das

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 253–256). Münster: WTM-Verlag

Erkennen relevanter situativer Aspekte zur Modellierung des Rahmenmodells kann nur vor dem Hintergrund einer Zielorientierung erfolgen. Zur Identifizierung, welche Strukturen der Situation relevant sind und im Rahmenmodell dargestellt werden sollen, muss der Lernende eine Idee davon haben, welchen Bearbeitungsweg er zur Situationsbewältigung einschlagen möchte. Das Rahmenmodell muss somit einerseits Strukturen der Situation wiedergeben und anderseits auch tragfähig sein für die Konstruktion des identifizierten Bearbeitungsmodells. Viele Situationen lassen durchaus verschiedene Rahmenmodelle und mehrere Bearbeitungsverfahren zu. Gerade bei kleineren Problemstellungen der diskreten Mathematik gibt es häufig nicht die eine richtige Lösung (vgl. Green 1997, 62), sondern mehrere Rahmen- und Bearbeitungsmodelle können zielführend genutzt werden. Dieses stellt eine der zentralen Hürden dar, die in dieser Studie näher beforscht werden soll.

2. Designexperimente

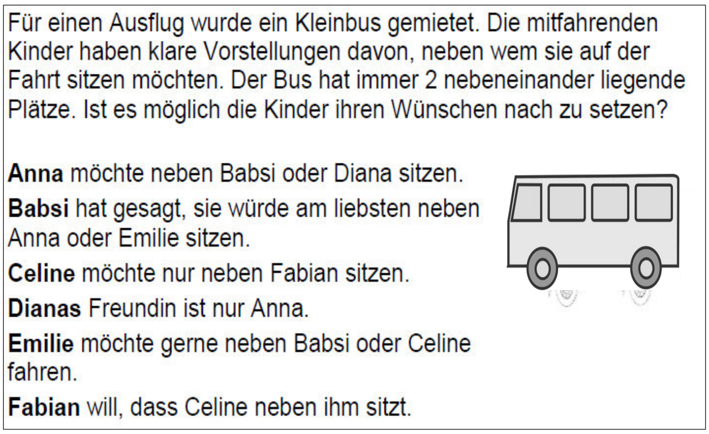
Im Rahmen von Designexperimenten (vgl. Hußmann et al. 2013) wurden im Anschluss an die Veranstaltung „Diskrete Mathematik“, genauer vor der Modulklausur, klinische Interviews mit 9 Studierendenpaaren und 4 einzelnen Studierenden durchgeführt. Ziel war die systematische Analyse individueller Vorstellungen zu den fünf zentralen Bearbeitungsmodellen und die Nutzung dieser individuellen Begriffe zur Strukturierung neuer Situationen.

3. Analyse und Ergebnisse

Zur Analyse der Identifizierungsprozesse wurde ein sprachanalytischer Analyserahmen aus Fokussierungen und Festlegungen genutzt (vgl. Hußmann 2013). Festlegungen sind dabei explizite Aussagen mit propositionalem Gehalt, die ein Individuum für wahr hält. Sie sind ‚kleinste‘ Einheiten, mit denen Aussagen über (mathematische) Objekte und Zusammenhänge expliziert werden. Diese sind situationsspezifisch und abhängig vom jeweiligen sozialen Diskurs. Fokussierungen als Analyseinstrument sind Ideen bzw. Konzepte, mit denen eine gegebene Situation strukturiert wird und die somit weder wahr noch falsch sein können. Sie sind typische individuelle Brillen, die Welt wahrzunehmen und spezifische Aspekte von Situationen herauszugreifen. Ohne Fokussierung(en) ist eine Festlegung nicht formulierbar. Die Betrachtung individueller Festlegungen und Fokussierungen ermöglicht somit eine Analyse der Nutzung individueller Begriffe innerhalb verschiedener Identifizierungsprozesse.

Besonders auffällig zeigt sich der Einfluss individueller Fokussierungen auf den Umgang mit der gegebenen Situation. Dies soll im Folgenden exemplarisch gezeigt werden.

In einem Interview befinden sich die beiden Studentinnen Anni und Begüm in der Situation, die folgende Fragestellung zu beantworten: Direkt nach dem Lesen der Situation geht Anni die Festlegungen *„Hier kann man ein Matching konstruieren.“ (Konklusion)* und *„weil wir zwei Teilmengen, die Kinder und die gewünschten Kinder, haben*.“ ein und fokussiert dazu auf die *`zwei Teilmengen*n´, die sie in der Situation sieht. Begüm zeichnet daraufhin ein Rahmenmodell der Situation, in dem die Kinder als Knoten dargestellt sind und die Kanten anzeigen, ob ein Wunsch von einer Seite aus besteht. In ihrer Modellierung achtet sie darauf, dass der Graph in seiner bildlichen Darstellung auch optisch direkt zwei disjunkte Teilmengen erkennen lässt. Dazu fokussiert sie auf *`disjunkte Teilmengen´* und geht die Festlegung ein, dass *„um ein Matching zu konstruieren, muss man einen bipartiten Graphen haben*.“.


Für einen Ausflug wurde ein Kleinbus gemietet. Die mitfahrenden Kinder haben klare Vorstellungen davon, neben wem sie auf der Fahrt sitzen möchten. Der Bus hat immer 2 nebeneinander liegende Plätze. Ist es möglich die Kinder ihren Wünschen nach zu setzen?

Anna möchte neben Babsi oder Diana sitzen.
Babsi hat gesagt, sie würde am liebsten neben Anna oder Emilie sitzen.
Celine möchte nur neben Fabian sitzen.
Dianas Freundin ist nur Anna.
Emilie möchte gerne neben Babsi oder Celine fahren.
Fabian will, dass Celine neben ihm sitzt.

Abb.1 gegebene Situation

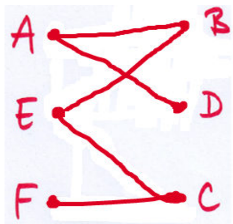


Abb.2 Rahmenmodell

Beide Studentinnen nutzen zur Identifikation eines passenden Bearbeitungsmodells die Fokussierung *`Teilmengen´*. Die Begründung, warum die Konstruktion eines optimalen Matchings hier hilfreich ist, ist jedoch fachlich nicht tragfähig, da man dieses auch in einem nicht bipartiten Graphen konstruieren kann. Die Fokussierung auf Teilmengen ist aus fachlicher Sicht somit nicht sinnvoll und führt dazu, dass in der Situation das Bearbeitungsmodell der Matchings durch nicht hinreichende bzw. falsche Eigenschaften als passend identifiziert wird. Festlegungen, die zur Identifikation einer Klasse graphentheoretischer Situationen genutzt werden, müssen daher tragfähig und vollständig in Bezug auf die Eigenschaften der Bearbeitungsmodelle sein. Die Fokussierungen, die der Modellierung des Rahmenmodells zugrunde liegen, sind handlungsleitend, da durch sie Festlegungen eingegangen werden können, die zur Situationsbearbeitung hilfreich oder, wie im Beispiel, nur bedingt hilfreich sein können.

Im weiteren Interviewverlauf werden die beiden Studentinnen gefragt, woran sie die beiden Teilmengen erkannt haben. Während Anni in ihren Festlegungen weiterhin auf *`Teilmengen´* fokussiert, überlegt Begüm, wie die Situation gelöst werden kann, wenn Anna und Emilie auch nebeneinander sitzen wollen würden. Für diese Idee fokussiert Begüm auf Beziehungen von Elementen innerhalb einer Teilmenge, so dass sich ihre individuelle Situation dahingehend ändert, dass nun Wünsche der Kinder auch innerhalb einer „Teilmenge“ vorkommen können. Auf die Nachfrage, was sich an der Situation dann ändern würde, legt sich Anni darauf fest, dass *„nun keine zwei Teilmengen mehr gebildet werden können“* und Begüm, dass „*wenn man keine zwei Teilmengen bilden kann, dann kann man färben*.“ und „*Man kann die Situation als Unverträglichkeitsgraph darstellen*.“ und zeichnet ein neues Rahmenmodell.

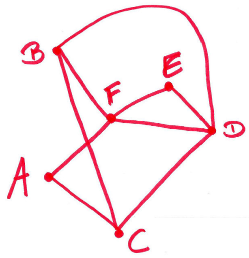


Abb.3 neues Rahmenmodell

Der Fokuswechsel vom Blick auf disjunkte Teilmengen hin zu Unverträglichkeiten bringt eine Veränderung der individuellen Situation mit sich. Ein bipartiter Graph ist nicht länger als Rahmenmodell passend. Die individuelle Situation passt nun, zumindest für Begüm, in eine andere Situationsklasse, nämlich die, in der Färbungen als Bearbeitungsmodell hilfreich sind. Fokuswechsel können somit gewinnbringend sein für eine alternative, tragfähige Situationsbewältigung, da sich individuelle Festlegungen dadurch zielführend ändern können und andere Bearbeitungsmodelle hilfreich erscheinen. Da Fokuswechsel jedoch auch hinderlich für eine Situationsbewältigung sein können, ist es wichtig, für Lernende eine Transparenz bzgl. tragfähiger Fokusse für verschiedene Bearbeitungsmodelle zu schaffen, die z.B. für den Bereich der Matchings einen Blick für die Disjunktheit zweier gematchter Kanten statt zweier Knotenmengen schaffen.

Literatur

Dobrowolski, M. (2010): *Mathematische Exkursionen. Gödel, Escher und andere Spiele*. Oldenburg: Wissenschaftsverlag GmbH.

Green, N. (1997): Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik. *Mathematik lehren “Anregungen aus England*”, 84, 60-64.

Hußmann, S. (2013). The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations, Preprint, TU Dortmund.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Kormorek & S. Prediger (Hrsg.): *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S.25-42). Münster: Waxmann.

Lutz-Westphal, B. (2006): *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht.* Online unter: http://page.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_final_online.pdf

Thies, S. (2002): *Zur Bedeutung diskreter Arbeitsweisen im Mathematikunterricht*. Online unter: http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2002/854/

Georg BRUCKMAIER, Stefan KRAUSS, Regensburg

Prädiktive Validität von Lehrermerkmalen in der COACTIV-Studie

Im vorliegenden Beitrag werden im Rahmen der COACTIV-Studie erhobene Lehrermerkmale betrachtet sowie deren Vorhersagekraft für die Unterrichtsqualität und für Zielkriterien von Unterricht berichtet. Als Konstrukte auf Seiten der Lehrkräfte werden das fachdidaktische Wissen, das Fachwissen, konstruktivistische Überzeugungen sowie der Enthusiasmus für das Unterrichten betrachtet, als Zielkriterien auf Schülerseite dienen der Leistungszuwachs der Schüler im Fach Mathematik, die Freude an Mathematik und die Verminderung der Leistungsängstlichkeit.

Es werden also *nicht* verschiedene Arten der Validität zu *einem* Konstrukt aufgeführt, sondern vielmehr die *prädiktive Validität mehrerer* Lehrermerkmale für die Unterrichtsqualität und für Unterrichtszielkriterien berichtet. Die folgenden Ergebnisse sind im Wesentlichen aus Kunter et al. (2011) entnommen.

Die COACTIV-Studie

Das Projekt COACTIV war organisatorisch und konzeptuell mit der PISA-Studie 2003/2004 verzahnt und nutzt zum einen Schüler- und Lehrerdaten aus PISA, zum anderen projektspezifisch erhobene Lehrerdaten. Das zugrundeliegende Wirkungsmodell (vgl. Abb. 1) geht davon aus, dass professionelle Lehrerkompetenzen zu einem qualitätsvollen Unterricht beitragen und ein qualitätsvoller Unterricht wiederum zum Beispiel zu Lernfortschritten der Schülerinnen und Schüler beiträgt.

Lehrermerkmale	→	Unterrichtsqualität	→	Schülermerkmale

Abb. 1: Zugrundeliegendes Wirkungsmodell

Zu einigen Lehrermerkmalen liegen mehrebenenanalytische Strukturgleichungsmodelle vor (siehe später), mit denen die prädiktive Validität spezifischer Lehrermerkmale im Detail untersucht wurde.

Das COACTIV-Lehrerkompetenzmodell (vgl. Abb. 1 links)

Zentrales Anliegen des COACTIV-Projekts war es, individuelle Merkmale zu identifizieren, die Lehrkräfte benötigen, um ihre berufliche Aufgaben erfolgreich absolvieren zu können (vgl. Baumert & Kunter, 2011). In Anlehnung an den Kompetenzbegriff von Weinert (2001) wurde dazu ein generisches Kompetenzmodell entwickelt, als dessen zentraler Bestandteil

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 257–260).
Münster: WTM-Verlag

und somit als Kern der Lehrerprofessionalität *Professionswissen* verstanden wird (siehe Abb. 2; für Details siehe Baumert & Kunter, 2011). Als weitere Aspekte professioneller Kompetenz werden *Überzeugungen/Werthaltungen/Ziele*, *motivationale Orientierungen* sowie *selbstregulatorische Fähigkeiten* aufgeführt.

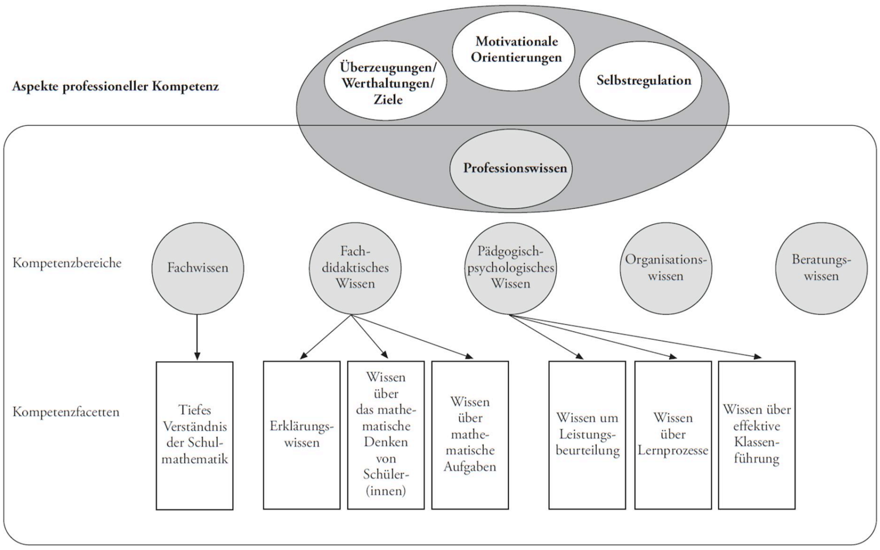


Abb. 2: Lehrerkompetenzmodell von COACTIV

Im Folgenden werden Ergebnisse zur prädiktiven Validität von fachdidaktischem Wissen (Baumert & Kunter, 2011), Fachwissen (Baumert & Kunter, 2011), konstruktivistischen Überzeugungen (Voss, Kleickmann, Kunter & Hachfeld, 2011) und Enthusiasmus für das Unterrichten (dies fällt unter motivationale Orientierungen; Kunter, 2011) berichtet.

Das Modell der Unterrichtsqualität (vgl. Abb. 1 Mitte)

Als Mediator potentieller Effekte dieser Lehrermerkmale wurde die Unterrichtsqualität durch *Kognitive Aktivierung*, *Klassenführung* und *Konstruktive Unterstützung* wie folgt konzeptualisiert (vgl. auch Abb. 3; für Details siehe Kunter & Voss, 2011):

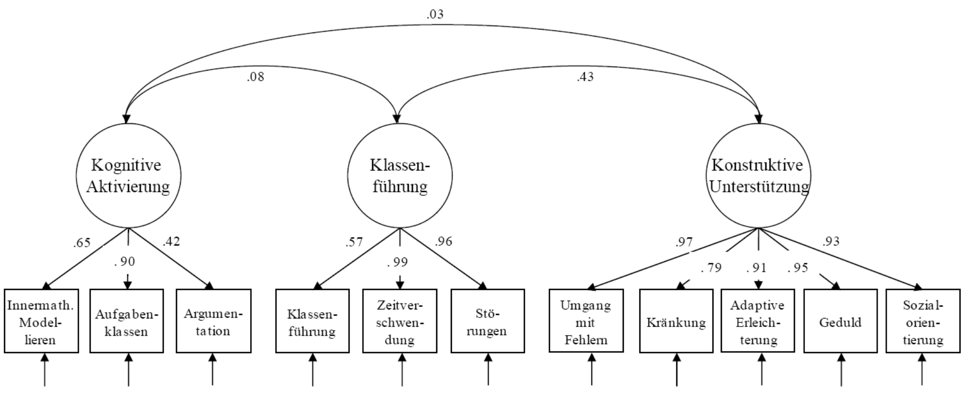


Abb. 3: Struktur- und Messmodell der Unterrichtsqualität

Zielkriterien von Unterricht (**Schülermerkmale;** vgl. Abb. 1 rechts)

Auf Schülerseite wurde insbesondere der *Leistungszuwachs* von Jahrgangsstufe 9 zu 10 in den Fokus genommen, jedoch auch das Ausmaß der *Freude an Mathematik* und die *Leistungsängstlichkeit* (für Details siehe Kunter & Voss, 2011).

Fragestellung

Welche Lehrermerkmale sind *prädiktiv valide* für die genannten Aspekte der Unterrichtsqualität und für die genannten Zielkriterien des Unterrichts?

Methode

Zur Untersuchung der Fragestellung wurden Strukturgleichungsmodelle spezifiziert (vgl. Abb. 4). Für Details zur Methode (z.B. auch zur Stichprobe) siehe Kunter et al. (2011).

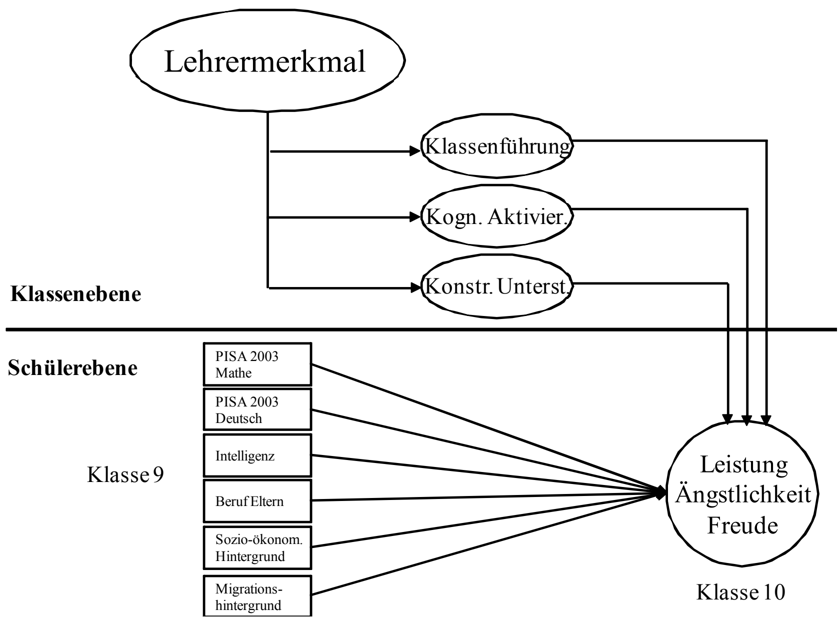


Abb.4: Strukturgleichungsmodell zur Untersuchung der prädiktiven Validität von Lehrermerkmalen für Aspekte der Unterrichtsqualität und für Zielkriterien des Unterrichts (unter Kontrolle individueller Schülermerkmale)

Bisherige Ergebnisse

Signifikante Effekte der Lehrermerkmale auf Aspekte der Unterrichtsqualität („→“ bedeutet: es liegt ein signifikanter Effekt vor)

Lehrermerkmal	Aspekte der Unterrichtsqualität
Fachdidaktisches Wissen	→kogn. Aktivierung & konstrukt. Unterstützung
Fachwissen	→(keine signifikanten Effekte)

Konstr. Überzeugungen	→kogn. Aktivierung & konstrukt. Unterstützung
Unterrichtsenthusiasmus	→kognitive Aktivierung, konstruktive Unterstützung und effektive Klassenführung

Signifikante Effekte der Aspekte der Unterrichtsqualität auf Schülermerkmale (vgl. Kunter & Voss, 2011):

Aspekte der Unterrichtsqual.	Schülermerkmale (Zielkriterien)
Effektive Klassenführung	→Leistung und Freude an Mathematik
Kognitive Aktivierung	→Leistung
Konstruktive Unterstützung	→Freude an Mathematik und Ängstlichkeit(–)

Die berichteten Resultate sind als erste Ergebnisse zu Lehrermerkmalen zu verstehen, die die Unterrichtsqualität und somit unter anderem den Leistungszuwachs der Schülerinnen und Schüler beeinflussen können (für Details siehe Kunter et al., 2011). Replikationen der Befunde sowie entsprechende Ergebnisse für andere Schulfächer stehen noch aus.

Literatur

Baumert, J., & Kunter, M. (2011). Das mathematikspezifische Wissen von Lehrkräften, kognitive Aktivierung im Unterricht und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 163–192). Münster: Waxmann.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Kunter, M. (2011). Motivation als Teil der professionellen Kompetenz – Forschungsbefunde zum Enthusiasmus von Lehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 259–276). Münster: Waxmann.

Kunter, M., & Voss, T. (2011). Das Modell der Unterrichtsqualität in COACTIV: Eine multi-kriteriale Analyse. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 85–114). Münster: Waxmann.

Voss, T., Kleickmann, T., Kunter, M., & Hachfeld, A. (2011). Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 235–257). Münster: Waxmann.

Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. S. Rychen & L. H. Saganik (Eds.), *Defining and selecting key competencies* (S. 45–65). Seattle, WA: Hogrefe & Huber.

Regina BRUDER, Ulf-Hermann KRÜGER, Lars BERGMANN

LEMAMOP - ein Kompetenzentwicklungsmodell für Argumentieren, Modellieren und Problemlösen wird umgesetzt

Derzeit gelingt es im Mathematikunterricht der Sekundarbereiche I und II noch zu wenig, die behandelten Lerninhalte geeignet zu vernetzen und verfügbares Können insbesondere zum mathematischen Argumentieren, aber auch zum Modellieren und Problemlösen in Verbindung mit solidem mathematischem Grundwissen in der Breite der Schülerschaft so auszubilden, dass damit die notwendigen Grundlagen für erfolgreiches Weiterlernen gelegt und auch MINT-Interessen geweckt und gefördert werden. Als ein den fachinhaltlich ausgerichteten Unterricht erweiternden Lösungsansatz wurde für das Projekt LEMAMOP das Explizieren von Lernstrategien innerhalb kompakter **Kompetenztrainings** gewählt.
In dem hier vorzustellenden Projekt geht es um drei spezifische Lerngelegenheiten im Umfang von jeweils etwa 4 Unterrichtsstunden pro Schuljahr für stoffliche und handlungsorientierte Vernetzungen mit Wiederholungen von Grundwissen und Grundkönnen auch aus vorigen Klassenstufen aus der spezifischen Perspektive jeweils einer der drei Kompetenzen: **Argumentieren, Modellieren bzw. Problemlösen**. Dieses gründet sich auf einen schrittweisen Erwerb von *intelligentem Wissen, Handlungskompetenz und Metakompetenz* im Sinne von Weinert (2001) zu den drei genannten Kompetenzen.

Theoretischer Hintergrund zu den Kompetenztrainings

Intelligentes Wissen lässt sich auf elementarem Niveau operationalisieren als ein *Identifizieren und Realisieren* der jeweiligen mathematischen *Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren.* Es schließt aber auch die Kenntnis typischer Anwendungen und Vorgehensstrategien ein. *Handlungskompetenz* zeigt sich darin, dass mathematisches Wissen vernetzt und auch in komplexen bzw. variablen Situationen inner- und außermathematisch angewandt werden kann. *Metakompetenz* lässt sich als Reflexionsfähigkeit über den eigenen Lernstand und Lernprozess sowie eine Methodenbewusstheit in Verbindung mit einem angemessenen Bild von Mathematik beschreiben.

Für Kompetenzentwicklungsmodelle, die als Hintergrund für die perspektivisch auch aufeinander aufbauenden Kompetenztrainings benötigt werden, sind die drei Zielkategorien *Intelligentes Wissen, Handlungskompetenz und Metakompetenz* zu spezifizieren. Da es hierzu noch keine empirisch geprüf-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 261–264). Münster: WTM-Verlag

ten Modelle gibt, wird zwar soweit wie möglich theoriegeleitet, aber auch in hohem Maße erfahrungsbasiert gearbeitet werden müssen. Die für die Beschreibung der Kompetenzanforderungen in der Matura in Österreich entwickelten Stufenmodelle (Siller et al in diesem Band) haben mit den hier geforderten Kompetenzentwicklungsmodellen lediglich die für die Kompetenzen relevanten Könnensdimensionen gemeinsam, die sich in den drei Zielkategorien wieder finden.

Z.B. für das Problemlösen gelten im Sinne des Konzeptes zum Problemlösenlernen von Bruder und Collet (2009) Heurismenkenntnisse mit episodischem Charakter als relevant. Als *Handlungskompetenz* lässt sich das Erkennen und eigenständige (implizite oder explizite) Anwenden von Heurismen beschreiben. Ein strukturiertes Vorgehen etwa im Sinne des Phasenmodells von Polya sowie Anstrengungsbereitschaft können einer *Metakompetenz* und Einstellungen zum Problemlösen zugerechnet werden.

Für die vierstündigen Kompetenztrainings zur expliziten Thematisierung des Problemlösens wurde eine gemeinsame Struktur in allen Jahrgangsstufen gewählt. Einen motivierenden Einstieg können z.B. Heurismen mit Alltagsbezügen ermöglichen.

Beispiel Kl.8: Nenne für die *informative Figur* und für das *systematische Probieren* jeweils eine Situation aus dem Alltag, bei der diese Heurismen helfen können.

Im nächsten Schritt werden Heurismen *identifiziert* und auch *realisiert* – hierfür werden im Folgenden nur mögliche Aufgabenformate vorgestellt:

Strategien entwickeln: Bearbeite die folgenden Aufgaben und schreibe jeweils dazu, wie du zur Lösung gelangt bist. Was ist das Gemeinsame bei diesen Aufgaben?

Strategien im Einsatz: Lies Dir die folgende Aufgabe durch und schau Dir die Lösungen an. Notiere jeweils die verwendete Strategie und erkläre, wie sie bei der Lösungsfindung geholfen hat.

Kern des Kompetenztrainings ist der Aufbau von Handlungskompetenz. Über mindestens 2 Unterrichtsstunden sollen eigenständig bzw. in Kleingruppen mehrere Problemaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit (z.B. mit Sternchen markiert) bearbeitet werden.

Training: Sammle mindestens 8 Sterne. Vermerke hier, welche Aufgaben du bearbeitet und welche Strategien du verwendet hast.

Daran schließt sich ein *Kompetenzcheck* als Selbsteinschätzung auf einer Metaebene an (Aufgaben verstehen, Lösungsansätze formulieren, Aufgaben lösen, Lösungswege reflektieren).

Zum Projekt LEMAMOP

Mit Beginn des Schuljahres 2013/14 startete das dreijährige niedersächsische Projekt LEMAMOP mit Unterstützung des DZLM in Kooperation zwischen der AG Fachdidaktik an der TU Darmstadt und erfahrenen, interessierten Lehrkräften (potenziellen Multiplikatoren) für die Klassenstufen 5-12 an 15 Gymnasien.

Mit dem Schulversuch LEMAMOP wird an die erfolgreichen, jetzt ausgelaufenen niedersächsischen Modellversuche CAliMERO und MABIKOM angeknüpft. Beteiligt sind 15 niedersächsische Schulen, die in den Schuljahrgängen 5 bis 10 nach dem Kerncurriculum Mathematik für das Gymnasium unterrichten und über eine gymnasiale Oberstufe verfügen. Die Projektschulen stellen zwei Fachlehrkräfte, insgesamt werden so 30 Projektteilnehmerinnen und –teilnehmer zu Multiplikatoren ausgebildet. Das Team wird durch vier Ausbilder der Studienseminare als beratende Mitglieder unterstützt.

Zu den jeweils zweieinhalbtägigen Treffen wird vom Leitungsteam des Projektes ein gemeinsam getragener Input eingebracht zu Modellen für einen langfristigen Kompetenzaufbau im Mathematischen Problemlösen, Argumentieren und Modellieren. Diese Modelle werden dann in Kleingruppen von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern für alle Jahrgänge in Form von Schüler- und Lehrermaterialien konkretisiert und bis zum nächsten Treffen im eigenen Unterricht erprobt. Gleichzeitig werden die ersten Trainings und die Erfahrungen damit in die Jahrgangsteams an der eigenen Schule multipliziert.

Ab dem 2.Projektjahr wird ein expliziter langfristiger Kompetenzaufbau über die Schuljahre hinweg systematisch aufeinander aufbauend angelegt. Am Ende des Projektes sollen mehrfach erprobte Beispiele von evaluierten Unterrichtsbausteinen zum langfristigen Kompetenzaufbau mit entsprechenden Lehr- und Lernmaterialien digitalisiert vorliegen. Die Ergebnisse sollen unmittelbar in die Lehreraus- und Fortbildung in Niedersachsen eingehen. Gemeinsam mit dem Netzwerk MUT wird ein Fortbildungskonzept für die niedersächsischen Schulen erarbeitet werden.

LEMAMOP unterscheidet sich von eher Top-Down angelegten Fortbildungen, bei denen Multiplikatorinnen und Multiplikatoren das ihnen vermittelte Wissen und die bei ihnen geförderten Kompetenzen ihrerseits an Lehrkräfte weitergeben bzw. bei diesen Kompetenzen fördern. LEMAMOP ist vielmehr ein symbiotischer Ansatz, bei dem Wissenschaftler und Fachberater sowie Fachleiter aus Studienseminaren gemeinsam mit den Lehrkräften Unterrichtskonzepte und Materialien zum Zwecke der Fortbildung entwickeln. Damit wird versucht, wesentliche Gelingensbedingungen für Fortbildungen wie Herstellung einer *Einstellungsakzeptanz* gepaart mit entsprechender *Verhaltensakzeptanz* zu realisieren (vgl. Bruder und Böhnke in diesem Band). Die damit verbundene Erwartung ist, dass nachher diejenigen die besten Multiplikatorinnen und Multiplikatoren sind, die bei den Entwicklungen dabei waren und sich mit dem Projekt identifizieren.

Die zentralen Fragen für die Evaluation des Projektes lauten:

> Wie werden die Kompetenztrainings von den Lernenden und Lehrenden angenommen?
>
> Wie lassen sich Fortschritte in der Kompetenzentwicklung zu Problemlösen, Argumentieren und Modellieren abbilden?
>
> Welche Entwicklungen zeigen sich beim mathematischen Grundwissen und Grundkönnen und bei den fokussierten Kompetenzen?

Erste Erfahrungen zu den Kompetenztrainings zum Problemlösen

Die bei LEMAMOP zu entwickelnden Materialien, in denen über die Klassenstufen der Sekundarstufen I und II hinweg gestuft systematisch prozessbezogene Kompetenzen in den Blick genommen werden, sind neuartig.

Bisher liegen erste Kompetenztrainings für das mathematische Argumentieren, das Modellieren und das Problemlösen vor.

Nach der Ersterprobung hat sich herausgestellt, dass die Schülerinnen und Schüler die Universalität von Heurismen als vorteilhaft erkannt haben. Eine weitgehend neue Erfahrung war das Bewusstmachen von Argumentationsweisen und der zulässigen Argumente. Die Schülerinnen und Schüler konnten die Nachhaltigkeit der ersten Kompetenztrainings bereits erleben, indem die dort gemachten Erfahrungen Eingang in den folgenden Unterricht fanden.

Eine wichtige Beobachtung aus den Kompetenztrainings ist, dass der Kreativität der Schülerinnen und Schüler breiter Raum gegeben wird. Die Notwendigkeit, einer Sicherung von Basiskompetenzen besondere Aufmerksamkeit zu widmen, wurde als eine zentrale Aufgabe für einen an Kompetenzentwicklung orientierten Mathematikunterricht erkannt.

Literatur

Bruder, R. & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Weinert, F. E. (Hrsg.) (2001). Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim: Beltz.

Regina BRUDER, Axel BÖHNKE, Darmstadt

Online-Fortbildungskurse: Gestaltungsmodelle, Adressaten, Effekte und offene Fragen

Wenn es darum geht innerbetriebliche Innovationen umzusetzen bzw. in den Schulen nachhaltig Unterrichtsentwicklung zu betreiben, dann gilt es Erkenntnisse aus der Arbeits- und Organisationspsychologie zu beherzigen. Insbesondere gilt: *„...die Motivation der Betroffenen, ihre Bereitschaft sich wirklich auf Veränderungen einzulassen, Vorhaben zu ihren eigenen zu machen, eine innere Einstellung der Verantwortung zu entwickeln“* hängen maßgeblich davon ab, *„wie mit ihrer emotionalen Befindlichkeit umgegangen wird.“* (Doppler et al 2002). Krüger (2002) beschreibt diesen erwünschten Prozess mit den beiden Phasen einer *Einstellungsakzeptanz* und einer *Verhaltensakzeptanz*. Zunächst müssen von den Akteuren von Veränderungen positive Erfahrungen mit einem Erklärungsmodell für die relevanten Phänomene innerhalb des eigenen Erfahrungswissens gemacht werden. Positive Anreiz-Beitrags-Salden in einem aktivierten Entscheidungsmodell führen dann auch zu einer *Verhaltensakzeptanz*.

Für die Wirksamkeit von Lehrerfortbildung hat Lipowsky (2010) wichtige Befunde zusammengestellt, die in unseren Online-Kursen Berücksichtigung fanden. Allgemein wird in der Professionalisierungsforschung die Ansicht geteilt, dass sich Fortbildungen an der alltäglichen Unterrichtspraxis von Lehrkräften orientieren und daher auch Gelegenheiten zur Erprobung von Fortbildungsinhalten bieten sollten. Unterschiedliche Ansichten bestehen darüber, ob man ein erwünschtes Verhalten von Lehrpersonen mit engen Skripts und Anleitungen trainieren sollte oder nicht. Der Tatsache, dass auch Lehrkräfte sehr unterschiedlich sind, wurde z.B. bei der Einführung neuer Curricula bisher nicht in erkennbarer Weise Rechnung getragen. Wirksame Fortbildungen sind in der Regel *zeitintensiv*, erstrecken sich über einen *längeren Zeitraum* und beziehen *externe Expertise* mit ein.

Themenübersicht: Online-Fortbildungen an der TU Darmstadt

Seit September 2005 wurden mit Unterstützung durch das Hessische Kultusministerium im Rahmen des Projekts *ProLehre* und unter Berücksichtigung der Ergebnisse anderer Forschungsprojekte nach und nach folgende acht Online-Fortbildungskurse für Mathematiklehrkräfte entwickelt, die bis jetzt von über 800 Teilnehmer/innen belegt wurden:

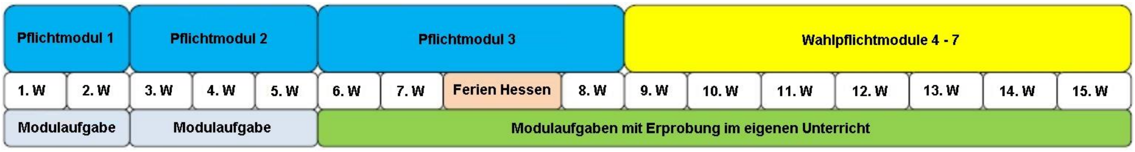
- *Basics - nachhaltige Entwicklung und permanentes Wachhalten von elementarem Grundkönnen im MU*
- *Problemlösen und Selbstregulation im MU*

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 265–268). Münster: WTM-Verlag

- *Mathematisches Modellieren*
- *Binnendifferenzierung im MU*
- *Tabellenkalkulation (Excel) im MU*
- *Langfristiger Kompetenzaufbau mit Aufgaben*
- *Argumentieren im MU*
- *Kompetenzdiagnose im MU*

Die Kurse bestehen in der Mehrzahl aus etwa sechs thematischen Modulen, die während der Kursdauer von 15 Wochen im Abstand von etwa zwei bis drei Wochen nacheinander frei geschaltet und von den Teilnehmer/innen bearbeitet werden.

Der Kurs „Binnendifferenzierung im MU“ besteht demgegenüber aus drei Pflicht- und vier Wahlpflichtmodulen. Um den Lehrkräften die Möglichkeit zu geben, insbesondere die Erprobungsphasen individuell ihrem Unterricht anzupassen, werden hier *alle Module* mit einer „Empfehlung zur zeitlichen Bearbeitung der Module“ direkt zu Kursbeginn frei geschaltet:



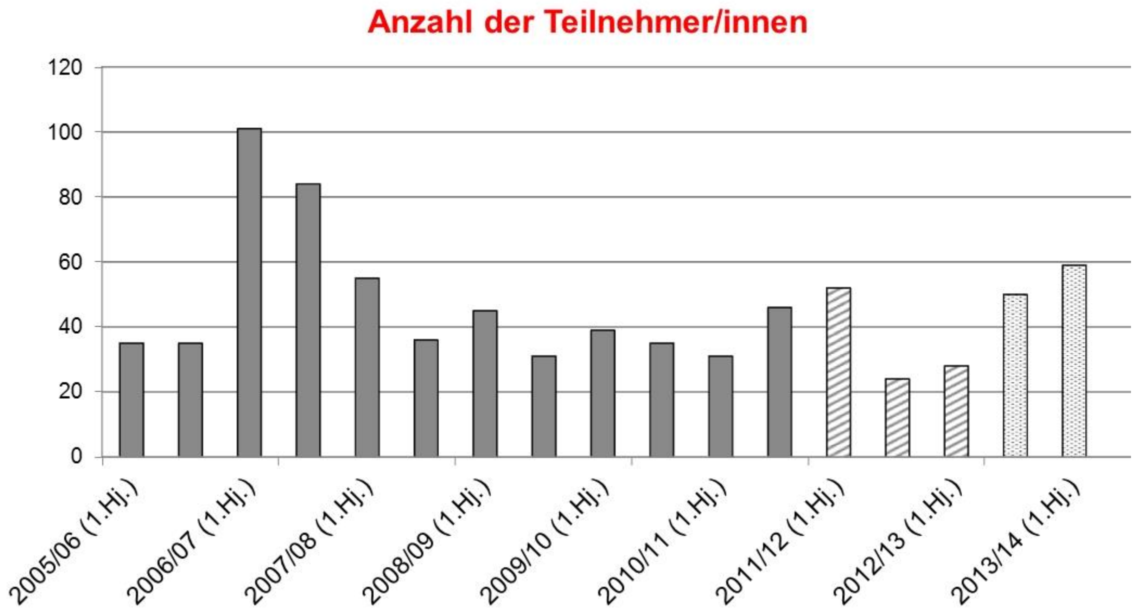
Fast alle Module enthalten jeweils die drei Gestaltungselemente *Input*, *Modulaufgabe* und *Forum* - in einzelnen Kursen werden auch ein oder zwei moderierte *Online-Chat-Termine* angeboten.

Teilnehmerstatistik

In der folgenden Abbildung stellen die voll dargestellten Säulen den Zeitraum dar, in dem in Hessen die Pflicht zum Erwerb von Fortbildungspunkten bestand. Die Vergabe von Punkten wurde seit dem Schuljahr 20011/12 wieder abgeschafft (schraffiert). Seit einem Jahr werden die Kurse mit Unterstützung durch das DZLM auch bundesweit angeboten (gepunktet).

Die Teilnehmer/innen unterrichten in vielen unterschiedlichen Schulformen (überwiegend Gymnasium und Gesamtschule), zeigen ein großes Spektrum der Zweitfächer, sind überwiegend jünger als 50 Jahre, haben meistens weniger als 10 Jahre Berufserfahrung und etwa die Hälfte hat eine leitende, bzw. koordinierende Funktion inne, z.B. Fachsprecher, Fachbereichsleiter (Datenbasis: Befragungsteilnehmer/innen der letzten beiden Kurse).

Es gibt also nicht *den typischen Online-Fortbildungsteilnehmer*, sondern ein *sehr breites Teilnehmerspektrum*, was *differenzierte Angebote* sowie eine *individuelle Betreuung* unbedingt erforderlich macht.



Studien-Ergebnisse (Szymanski & Bruder 2012**)**

In den vier Halbjahrskursen der Jahre 2011 und 2012 wurde von Roman Szymanski und Regina Bruder eine Studie mit dem Titel „Lehrerprofessionalisierung im Online-Zeitalter - Konzeption und Evaluation von Online-Fortbildungskursen für Mathematiklehrkräfte“ durchgeführt. Mit Hilfe eines neu entwickelten Fragebogens wurden die folgenden, den „vier Ebenen der Evaluation“ (Kirkpatrick & Kirkpatrick 2006) entsprechenden Aspekte untersucht:

- die *Akzeptanz* des Kursangebots
- der *Lernzuwachs* (subjektive Einschätzung der Lehrkräfte),
- der *Transfer* (Erprobung der Kursinhalte im Unterricht? Fester Bestandteil des eigenen Unterrichts? Besteht das Vorhaben, die Kursinhalte auch weiterhin in den eigenen Unterricht zu integrieren?) und
- die *Nachhaltigkeit* der Kurse.

Die ersten beiden Ebenen erfassen die *Einstellungsakzeptanz*, die beiden letzteren eine *Verhaltensakzeptanz*.

Von den Teilnehmer/innen wurde das Kursangebot insgesamt mit der Durchschnittsnote 1,99 (im Mittel aller Kurse, Notenskala von 1 bis 6) bewertet. Als besonders relevant für eine gute Gesamtbewertung erwiesen sich dabei hohe Zustimmungswerte auf den Skalen „Struktur & Didaktik“ und „Online“. Die geringste Voraussagekraft auf die Gesamtnote hatten die Skalen (eigene) „Beteiligung“ und „Interaktion“ („Ich hätte mir mehr Austausch mit den anderen Kursteilnehmern gewünscht.“). Außerdem ergeben sich jeweils hohe Korrelationen zwischen einer *positiven Einschätzung des* *eigenen Lernzuwachses* und der *erfolgten Erprobung der Kursinhalte* im eigenen Unterricht, bzw. der Angabe, dass die *vermittelten Konzepte inzwischen fester Bestandteil des eigenen Unterrichts* geworden seien und auch dem Vorhaben, die *Kursinhalte weiterhin in den eigenen Unterricht zu integrieren*.

Besonders gefallen haben den Teilnehmer/innen die *zeitliche, inhaltliche und örtliche Flexibilität*, die *Verzahnung von Theorie und der praktischen Erprobung*, das *individuelle Feedback*, das *zur Verfügung gestellte Material* und dass sich die Online-Fortbildung über einen *längeren Zeitraum* (als z.B. eine Präsenzveranstaltung) erstreckt hat.

Bei den negativen Rückmeldungen wurden z.B. die *manchmal nicht gute Passung zur individuellen Unterrichtssituation* (Klassenstufe, Inhalt), die für eine intensive Mitarbeit häufig *fehlende Zeit* und *Probleme beim Übertragen der Inhalte von der Theorie in die Praxis* genannt und es wurden *noch mehr Praxisanteile* gewünscht.

Zu den offenen Fragestellungen zur Kursweiterentwicklung gehören:

- Wie können die praktischen Anteile weiter gefördert und ausgebaut werden?
- Wie kann die Kommunikation zwischen den Kursteilnehmern verstärkt werden?
- Welche Personengruppen sprechen die Online-Fortbildungskurse an?
- Wie kann man mögliche Interessenten erreichen?
- Wie kann weiter unterstützt werden, dass die Kursinhalte auch nach Kursabschluss dauerhaft im Unterricht eingesetzt werden?

Literatur

Doppler, et al (2002). Unternehmenswandel gegen Widerstände. Frankfurt: Campus

Kirkpatrick, D. L. & Kirkpatrick, J. D. (2006). Evaluating Training Programs: The Four Levels (3rd ed.). San Francisco: Berrett-Koehler.

Krüger, W. (2002). Excellence in Change. Wege zur strategischen Erneuerung. Wiesbaden: Gabler.

Lipowsky, F. (2010). Lernen im Beruf. Empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildung. In Müller, F., Eichenberger, A., Lüders, M. & Mayr, J. (Hrsg.), Lehrerinnen und Lehrer lernen. Konzepte und Befunde zur Lehrerfortbildung (S.51-72). Münster: Waxmann

Szymanski, R. & Bruder, R. (2012). Lehrerprofessionalisierung im Online-Zeitalter – Konzeption und Evaluation von Online-Fortbildungskursen für Mathematiklehrkräfte. In M. Kobarg, I. M. Dalehefte, C. Fischer, F. Trepke & M. Menk (Hrsg.), Maßnahmen zur Lehrerprofessionalisierung wissenschaftlich begleiten – verschiedene Strategien nutzen. Münster: Waxmann.

Esther BRUNNER, Kreuzlingen

Ein Prozessmodell des schulischen Beweisens

Beweisen als zentrale Kompetenz

Mathematisches Argumentieren gewinnt im Zusammenhang mit Kompetenzmodellen und Bildungsstandards (EDK, 2011; KMK, 2005) auch im deutschsprachigen Raum an Bedeutung und wird als dialogisch konzipierte, soziale Aktivität verstanden. Während in der Mathematik ein neuer Beweis von der Community validiert wird und damit die Fachgemeinschaft als zentrale Evaluationsinstanz gilt, kann im schulischen Beweisdiskurs nicht von gleich kompetenten Diskursteilnehmenden ausgegangen werden.

Nach wie vor ungeklärt ist, wie sich die in diesem Zusammenhang in der Literatur und den Bildungsstandards verwendeten Begriffe des Argumentierens, Begründen und Beweisen zueinander verhalten. Die Kontroverse bezieht sich dabei insbesondere auf die Beziehung zwischen Argumentieren und Beweisen. Für die einen (z.B. Pedemonte, 2007) sind diese beiden Tätigkeiten sehr eng miteinander verbunden und folgen mehr oder weniger ähnlichen Gesetzmässigkeiten, während sie sich in den Augen anderer (z.B. Balacheff, 1991) deutlich unterscheiden.

In Anlehnung an Duval (1991) wird „Begründen" im Rahmen dieses Beitrags als Oberbegriff verwendet, der ein konzeptuelles Spektrum zwischen alltagsnahem Argumentieren einerseits und formal-deduktivem Beweisen andererseits umfasst. In diesem Begründungsspektrum lassen sich auch die drei von Wittmann und Müller (1988) beschriebenen Typen von Beweisen verorten. Die beiden Autoren unterscheiden den experimentellen, den operativen oder inhaltlich-anschaulichen und den formal-deduktiven Beweis.

Unterschiedliche Beweistypen

Beim experimentellen „Beweis" werden Beispiele erzeugt oder Gegenbeispiele gesucht. Es geht dabei um das Falsifizieren oder Verifizieren einer Behauptung, über deren Gültigkeit man sich nicht im Klaren ist Allerdings kann man durch einen experimentellen „Beweis" nie Gewissheit bezüglich der Allgemeingültigkeit der untersuchten Behauptung erlangen, sondern immer nur mit konkretem Bezug auf die unmittelbar geprüften Beispiele.

Ein operativer Beweis hingegen erzeugt eine subjektive Gewissheit hinsichtlich der Allgemeingültigkeit einer Aussage, denn in einem operativen Beweis werden die Struktur bzw. die mathematischen Zusammenhänge erkannt. Diese Beziehungen werden mittels einer Operation offengelegt und werden dadurch „ablesbar" (vgl. Duncker, 1935). Auf diese Weise entsteht

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 269–272). Münster: WTM-Verlag.

Einsicht (Wertheimer, 1964) in die Struktur. Diese Einsicht ist aber eine vorerst subjektive, weil die Ablesbarkeit der offengelegten Beziehungen anderen durch entsprechende Elaboration zunächst zugänglich gemacht und kommuniziert werden muss.

Beim formal-deduktiven Beweis schliesslich wird der erkannte Zusammenhang nicht nur formal-symbolisch festgehalten, sondern es erfolgt auch formal-logisches Schliessen. Der dargestellte Zusammenhang klärt nicht nur die Allgemeingültigkeit einer Aussage, sondern wird darüber hinaus auch von allen, welche die formal-symbolische Sprache beherrschen, ohne weitere Elaboration verstanden.

Prozessmodell des schulischen Beweisens

Diese drei Beweistypen lassen sich in einem kognitionspsychologisch geprägten Modell des schulischen Beweisens fassen (Details vgl. Brunner, 2014). Dieses Modell (vgl. Abbildung 1) unterscheidet grundsätzlich zwei Ebenen: die soziale Ebene des Diskurses und die psychologische Ebene des denkenden Individuums. Der individuelle Denkprozess spielt sich dabei innerhalb eines sozialen Rahmens in einer diskursiven Situation ab. Ausgangspunkt des psychologischen Vorgangs ist ein spezifischer kognitiver Konflikt, nämlich eine Unsicherheit bezüglich der Gültigkeit einer Behauptung und damit fehlende Gewissheit, die im Idealfall ein Beweisbedürfnis erzeugt. Dieses Beweisbedürfnis kann mittels unterschiedlicher Denkprozesse auf unterschiedliche Weise befriedigt werden. So kann das Experimentieren mit Beispielen zu einem experimentellen „Beweis" führen und eine empirische Gewissheit bezüglich der geprüften Beispiele erzeugen. Die Struktur kann aber auch vom Experimentieren ausgehend durch eine Operation grundlegend durchschaut werden, was zu inhaltlicher Einsicht und subjektiver Gewissheit führen kann. Dies ist dann der Fall, wenn ein mathematischer Zusammenhang durchdrungen wurde und mit einer Operation gezeigt werden konnte, dass etwas zwingenderweise immer so sein muss. Die Operation als kreatives Element und zündende Idee muss aber im sozialen Kontext elaboriert werden, weil sie nicht auf Anhieb für alle anderen nachvollziehbar ist. Möglich ist nun weiter, dass der verstandene Zusammenhang in formal-symbolische Sprache übertragen wird und so ein formal-deduktiver Beweis formuliert werden kann. In diesem Fall liegt objektive Gewissheit bezüglich der Allgemeingültigkeit des aufgedeckten Zusammenhangs vor, die auch von anderen sofort und direkt nachvollzogen werden kann, sofern sie die formal-symbolische Sprache beherrschen.

Vollständiges genetisches Beweisen beschreibt somit den Denkprozess ausgehend von einem experimentellen Zugang über eine operativ erzeugte

Einsicht bis hin zum formal-deduktiven Nachvollzug. Der fundamentale Schritt im Erkenntnisgewinn zeigt sich dabei beim operativen Beweis. Denn in diesem Stadium wird die mathematische Struktur inhaltlich in ihrem Beziehungsreichtum verstanden und erfasst.

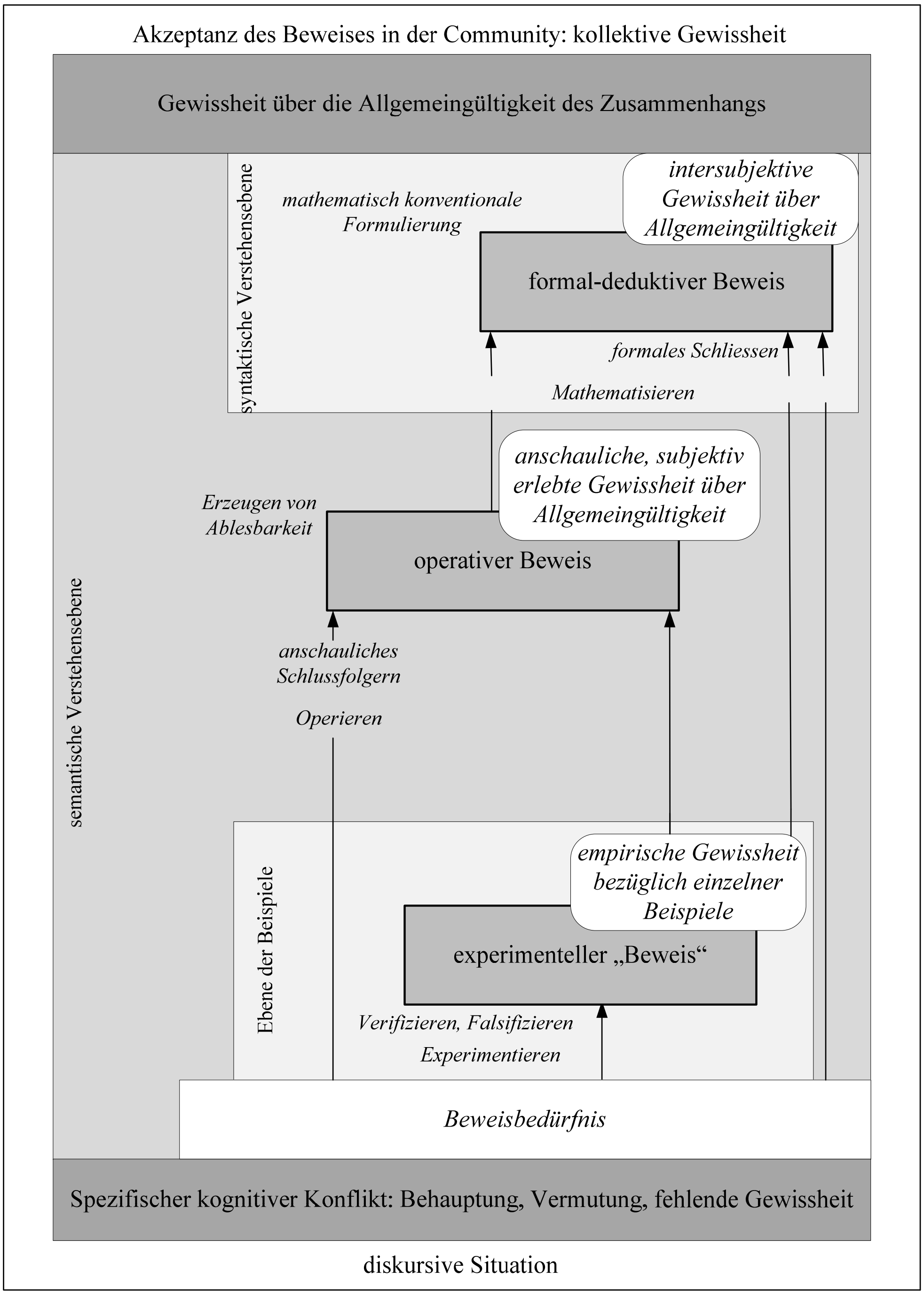


Abbildung 1: Prozessmodell des schulischen Beweisens (Brunner, 2014, S. 72; hier vereinfacht)

Implikationen für die Schule

Das in Abbildung 1 dargestellte Modell macht deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler beim schulischen Beweisen auf zwei unterschiedlichen

Ebenen unterstützt werden können: auf der psychologischen Ebene des Denkprozesses sowie auf der Ebene des Diskurses. Auf der ersten Ebene kann der Denkprozess durch das Modellieren einzelner Denk- und Arbeitsschritte, durch das Verfügbarmachen von unterschiedlichen Repräsentationsformen des Denkens (enaktiv, ikonisch, sprachlich-symbolisch und formal-symbolisch), durch das Anregen und Nutzen unterschiedlicher Beweistypen und ein genetisches Vorgehen unterstützt werden. Auf der Ebene des Diskurses erfolgt die Unterstützung in Abhängigkeit vom durchgeführten Beweistyp: Wird beispielsweise ein formal-deduktiver Zugang gewählt, was einen hohen Grad an Abstraktion und Formalisierung verlangt, so dürfte die Partizipation der Lernenden geringer ausfallen, als wenn experimentell an Beispielen gearbeitet wird.

Darüber hinaus kann das Modell auch gezielt genutzt werden, um Beweisen zu lehren und zu lernen (Details vgl. Brunner, 2014). Damit liegt ein Modell vor, das sowohl didaktisches Potenzial aufweist, als auch einen bislang erst im Zusammenhang mit Expertinnen und Experten beschriebenen Prozess, nämlich den fachlichen Diskurs in der Community (Boero, 1999), kognitionspsychologisch und sozial zu fassen versucht.

Literatur

Balacheff, N. (1991). Benefits and limits of social interaction: The case of teaching mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. Van Dormolen (Hrsg.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (S. 175–192). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7/8.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Heidelberg: Springer.

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin: Springer.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductive et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (3), 233–261.

KMK. (2005). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung.* München: Luchterhand.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66* (1), 23–41.

Wertheimer, M. (1964). *Produktives Denken* (2. Aufl.). Frankfurt a.M.: Kramer.

Wittmann, E.C. & Müller, N.G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.

Esther BRUNNER, Annelies KREIS, Kreuzlingen, Fritz C. STAUB, Zürich, Monika SCHOY-LUTZ, Carmen KOSOROK LABHART, Kreuzlingen

Qualitätssteigerung von Mathematikunterricht angehender Lehrpersonen durch Fachspezifisches Unterrichtscoaching

Theoretischer Hintergrund

Die Studiengänge für angehende Primarlehrpersonen in der Schweiz sehen während des BA-Studiums ca. 50 ECTS für die berufspraktische Ausbildung vor. Dies ist nicht nur ein beachtlicher Anteil Zeit, der für berufspraktisches Lernen der Studierenden zur Verfügung steht, sondern darüber hinaus ein von ihnen sehr positiv bewerteter (z.B. Baer et al., 2007). In den Schulpraktika werden die Studierenden von erfahrenen Lehrpersonen (Praxislehrpersonen) unterstützt. In der Regel erfolgt diese Unterstützung entlang üblicher Mentoringkonzepte auf einer eher allgemein-didaktischen Basis. Fokussiert man den Fachunterricht, sind fachspezifische Coachingansätze aber möglicherweise leistungsfähiger, um die Qualität des fachspezifischen (oder -didaktischen) Unterrichtshandelns von Studierenden zu fördern. Ein solcher Ansatz ist das Fachspezifische Unterrichtscoaching (West & Staub, 2003). Dieses sieht vor, dass sich Coach und Coachee insbesondere in der Phase der Unterrichtsplanung dialogisch über zentrale fachdidaktische Anliegen verständigen und dabei auch entsprechende Qualitätsmerkmale fokussieren. Der Unterricht wird gemeinsam von Coach und Coachee geplant und verantwortet (Staub & Kreis, 2013).

In der vorliegenden Studie wird geprüft, ob es gelingt, mit Fachspezifischem Unterrichtscoaching im Praktikum die Qualität des Mathematikunterrichts von Studierenden zu steigern. Es interessiert, ob und inwiefern sich Merkmale von Unterrichtsqualität in Mathematikstunden einer Interventions- und Kontrollgruppe unterscheiden. Untersucht wurde dies an der Pädagogischen Hochschule Thurgau im Rahmen einer Interventionsstudie (Kreis, 2012; Kreis & Staub, 2011).

Methode

In einer Intervention wurden 16 Praxislehrpersonen gezielt zu zwei Bereichen weitergebildet: 1) zum Fachspezifischen Unterrichtscoaching (West & Staub, 2003) und 2) in Mathematikdidaktik. Ziel der Weiterbildung, die ca. 50 Kursstunden und 70 Stunden Selbststudium umfasste, war es, die Praxislehrpersonen zu befähigen, Studierende während eines Praktikums in ihrer Klasse gezielt hinsichtlich der Erweiterung ihrer fachdidaktischen Kompetenzen zum Unterrichten von Mathematik zu unterstützen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 273–276). Münster: WTM-Verlag

Bei den 16 Praxislehrpersonen der Interventionsgruppe handelt es sich um erfahrene Lehrpersonen, die freiwillig an der intensiven Weiterbildung teilnahmen. Damit die Kontrollgruppe mit der Interventionsgruppe vergleichbar ist, wurden auf der Basis von Empfehlungen der Verantwortlichen für berufspraktische Studien gezielt engagierte Praxislehrpersonen für die Kontrollgruppe angefragt. Die 16 Praxislehrpersonen der Kontrollgruppe nahmen nicht an der Weiterbildung zum Fachspezifischen Unterrichtscoaching und zu Mathematikdidaktik teil, sondern einzig an den regulären Veranstaltungen und Weiterbildungen für Praxislehrpersonen der Ausbildungsinstitution.

Die Studierenden wurden zufällig der Interventions- bzw. Kontrollgruppe zugeteilt, und es wurden Dyaden mit jeweils einer Praxislehrperson und einer Studentin bzw. einem Studenten gebildet (je 16 Dyaden für die Interventions- und Kontrollgruppe). Bei jeder Studentin, jedem Studenten der Dyaden wurde am Ende eines siebenwöchigen Praktikums mit respektive ohne Fachspezifischem Unterrichtscoaching 45 Minuten Mathematikunterricht videografiert. Die Qualität des gefilmten Unterrichts wurde anschließend von einer Expertin für Mathematikdidaktik, die nicht an der Intervention beteiligt und nicht über die Gruppenzugehörigkeiten informiert war, eingeschätzt. Dafür wurde ein hochinferentes Ratinginstrument von Ditton und Merz (2000) mit 18 Qualitätsmerkmalen adaptiert und um sechs fachdidaktische Qualitätsmerkmale ergänzt (siehe Brunner, Kreis, Staub, Schoy-Lutz, & Kosorok Labhart, in Vorb.). Die Qualitätsmerkmale wurden auf einer Skala von 1-10 eingeschätzt. Zehn zufällig bestimmte Mathematikstunden wurden nach einem Training parallel von einer zweiten Forscherin geratet. Die Interraterübereinstimmung ist für die 24 Qualitätsmerkmale akzeptabel bis hoch (Spearman's rho: von .496 bis .757, $p < .05$; Caspar & Wirtz, 2002).

Die Daten der 24 Items sowie einer aus diesen gebildeten Gesamtskala ($\alpha = .90$) wurden deskriptiv analysiert. Unterschiede zwischen der Interventions- und der Kontrollgruppe wurden für die Einzelitems mit dem Mann-Whitney U-Test, für die Gesamtskala mit dem T-Test geprüft.

Ergebnisse

Die Einschätzung der Unterrichtsqualität fällt in beiden Gruppen deutlich positiv aus. Für die Gesamtskala zur Unterrichtsqualität zeigt sich ein signifikanter Unterschied zugunsten der Experimentalgruppe ($M_{IG} = 8.1$, $SD_{IG} = 0.8$; $M_{KG} = 7.1$, $SD_{KG} = 1.4$; T-Test, 1-seitig: $df = 30$, $t = 2.67$, $p = .012$). Die Qualität des Unterrichts der Studierenden, die das Praktikum bei einer Praxislehrperson aus der Interventionsgruppe absolvierten, wurde somit insgesamt signifikant höher eingeschätzt als der Unterricht von Studierenden bei Praxislehrpersonen der Kontrollgruppe.

Für fünf der 24 Qualitätsmerkmale ist dieser Unterschied auch auf Ebene des Einzelitems signifikant (vgl. Tabelle 1): fachliche Verständlichkeit, Interessantheit des Unterrichts, inhaltliche Strukturiertheit (z.B. fachlich kohärenter und logischer Aufbau), formal-kognitive Strukturiertheit (z.B. Verknüpfung mit weiteren mathematischen Themen) und motivierende Unterstützung der Lernenden (Brunner et al., in Vorb.).

Tabelle 1: Expertinnenrating der Unterrichtsqualität für die Interventions- ($N_{IG} = 16$) und Kontrollgruppe ($N_{KG} = 16$) in den fünf Merkmalen mit signifikanten Unterschieden.

Qualitätsmerkmal	Range $_{IG}$	Md $_{IG}$	Range $_{KG}$	Md $_{KG}$	p (U-Test)
Verständlichkeit	6-10	10	3-10	8	.006**
Interessantheit des Unterrichts	1-10	9	1-10	5	.019*
Inhaltliche Strukturiertheit	3-10	8	1-10	4.5	.029*
Formal-kognitive Strukturiertheit	4-10	8	1-8	6	.026*
motivierende Unterstützung	3-10	10	3-10	8	.039*

Studierenden, die das Praktikum bei einer Praxislehrperson aus der Interventionsgruppe absolvieren, gelingt es demnach besser, fachliche Konzepte verständlich zu präsentieren, den Mathematikunterricht fachlich interessant zu gestalten, den Stoff sowohl inhaltlich kohärent wie formal-kognitiv zu strukturieren und die Schülerinnen und Schüler motivierend zu unterstützen, als dies bei den anderen Studierenden der Fall ist.

Diskussion

Im Rahmen der vorliegenden Interventionsstudie konnte gezeigt werden, dass eine intensive Weiterbildung zu Fachspezifischem Unterrichtscoaching und Mathematikdidaktik für Praxislehrpersonen Wirkung zeigt. Studierende, die ein Praktikum bei einer Praxislehrperson aus der Interventionsgruppe absolvieren und somit Fachspezifisches Unterrichtscoaching in der Vorbereitung des gemeinsam verantworteten Unterrichts erhalten, realisieren in verschiedenen relevanten Merkmalen eine höhere Unterrichtsqualität als ihre Mitstudierenden. Die höheren Qualitätswerte in den fünf Merkmalen deuten darauf hin, dass Praxislehrpersonen die in der Weiterbildung fokussierten mathematischen Grundfragen in der Coaching-situation intensiver thematisieren und bearbeiten. In diese Richtung weist auch ein Vergleich der Besprechungsdauer, die in der Interventionsgruppe vor allem für die Vorbesprechung signifikant höher ausfällt als bei der Kontrollgruppe (Kreis & Staub, 2011, S. 71). Dass sich durch eine Weiterbildung von Praxislehrpersonen die Qualität des Mathematikunterrichts von Studierenden steigern lässt, ist in verschiedener Hinsicht erfreulich: Erstens zeigt dieser Befund, dass es sich lohnt, Praxislehrpersonen als zentrale Akteure der berufspraktischen Ausbildung gezielt und fachspezifisch weiterzubilden. Zweitens wird deutlich, dass Fachspezifisches Unterrichtscoaching offenbar die Bearbeitung zentraler fachspezifischer Anliegen im Dialog zwischen Praxislehrpersonen und Studierenden anzuregen vermag. Drittens ist zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler von der höheren fachlichen Unterrichtsqualität im Unterricht von Studierenden profitieren, was insbesondere in längeren Praktika auch für die Bereitschaft der Schulen bedeutsam sein dürfte, Praktikumsplätze anzubieten.

Literatur

Baer, M., Dörr, G., Fraefel, U., Kocher, M., Küster, O., Larcher, S., Müller, P. Sempert, W. & Wyss, C. (2007). Werden angehende Lehrpersonen durch das Studium kompetenter? - Kompetenzaufbau und Standarderreichung in der berufswissenschaftlichen Ausbildung an drei Pädagogischen Hochschulen in der Schweiz und in Deutschland. *Unterrichtswissenschaft*, *35*(1), 15–47.

Brunner, E., Kreis, A., Staub, F. C., Schoy-Lutz, M., & Kosorok Labhart, C. (in Vorb.). *Qualität von Mathematikunterricht im Praktikum: Ergebnisse einer Interventionsstudie zu Fachspezifischem Unterrichtscoaching.*

Caspar, M. & Wirtz, F. (2002). *Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität: Methoden zur Bestimmung und Verbesserung der Zuverlässigkeit von Einschätzungen mittels Kategoriensystemen und Ratingskalen.* Göttingen: Hogrefe.

Ditton, H., & Merz, D. (2000). *Qualität von Schule und Unterricht. Kurzbericht über erste Ergebnisse einer Untersuchung an bayrischen Schulen*. Osnabrück: Katholische Universität Eichstätt / Universität Osnabrück. Abgerufen von http://www.quassu.net/Bericht1.pdf.

Kreis, A. (2012). *Produktive Unterrichtsbesprechungen: lernen im Dialog zwischen Mentoren und angehenden Lehrpersonen*. Bern: Haupt.

Kreis, A., & Staub, F. C. (2011). Fachspezifisches Unterrichtscoaching im Praktikum – eine quasi-experimentelle Interventionsstudie. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *14*(1), 61–83.

Staub, F.C. & Kreis, A. (2013). Fachspezifisches Unterrichtscoaching in der Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen. *Journal für Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 13*(1), 8-13.

West, L., & Staub, F. C. (2003). *Content-focused coaching™: transforming mathematics lessons*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Julia BRUNS, Lars EICHEN, Berlin

Adaptive mathematische Förderung im Elementarbereich - Empirische Ergebnisse zum didaktischen Handeln von Erzieherinnen

Frühkindliche Bildung als Mittel zur Erhöhung der Chancengerechtigkeit ist ein zentrales Thema in der Elementarpädagogik. Ziel ist es, dass Kinder aus allen sozialen Schichten und unterschiedlichen Kulturen ihre Fähigkeiten und Interessen entfalten können (Roßbach und Weinert 2008). Tietze und Meischner (1998) untersuchten bereits in den 1990er Jahren die globale Prozessqualität deutscher Kindertagesstätten und stellten fest, dass nur ein Drittel der Einrichtungen über eine gute Qualität bezüglich der Art der Interaktionen sowie der Aktivitäten und Erfahrungsmöglichkeiten verfügen (Tietze und Meischner 1998). Eine aktuelle Messung im Rahmen der BiKS-Studie zeigt Schwächen der Prozessqualität vor allem auch in Bezug auf bereichsspezifische Förderung und dies in erhöhtem Maße bei Gruppen mit hohem Anteil an Kindern mit Migrationshintergrund (Kuger et al. 2008).

Die qualitativen Analysen im Rahmen der EPPE-Studie zeigen, dass der Form der sozialen Interaktion (als zentrales Werkzeug der individuellen Unterstützung) sowie der Binnendifferenzierung und der individuellen Anpassung der kognitiven Herausforderung eine bedeutende Rolle zukommt: Je besser die pädagogische Einrichtung in diesen Bereichen guter pädagogischer Praxis ist, desto effektiver ist sie bei der Unterstützung der kognitiven Entwicklung der Kinder (Siraj-Blatchford 2002). Angemessene adaptive Förderleistungen können somit als starker Indikator für eine hohe Gesamtqualität der pädagogischen Arbeit bezeichnet werden.

Mathematik im Elementarbereich hat in den letzten Jahren insbesondere durch die Erkenntnisse verschiedener Langzeitstudien zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten vom Kindergarten bis in die Schulzeit an Bedeutung gewonnen (Krajewski und Schneider 2006; Moser Opitz et al. 2010). Empirisch lässt sich weiterhin ein Zusammenhang zwischen dem mathematischen Input durch die pädagogischen Fachpersonen und der mathematischen Entwicklung der Kinder ausmachen (Klibanoff et al. 2006). Allerdings liegen bisher nur ungenügende Erkenntnisse zur Wirkung einzelner Förderansätze vor: Studien belegen sowohl den Erfolg von Trainingsprogrammen wie auch von alltagsintegrierter mathematischer Förderung und von Maßnahmen auf der Ebene der Fachpersonen (Peter-Koop und Grüßing 2008; Krajewski et al. 2008; Rechsteiner et al. 2012; Gasteiger 2010).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 277–280). Münster: WTM-Verlag

Vor dem Hintergrund dieser Erkenntnisse entstand die vorliegende Studie. Ziel der Studie war es, Alltagspraxen zur adaptiven Unterstützung zu erfassen und Zusammenhänge zwischen adaptiver Förderleistung und anderer Komponenten der elementarpädagogischen Arbeit aufzudecken. Im Zentrum steht die Frage: Wie lassen sich Profile unterschiedlicher adaptiver Förderleistung im Fachbereich Mathematik charakterisieren?

Untersuchungsanlage

Bei der vorgestellten Studie handelt es sich um eine quasi-experimentelle Querschnittsuntersuchung ohne Kontrollgruppe. Es werden verschiedene Methoden auf Kinder- und Fachpersonenebene im Sinne eines multimethodischen Designs miteinander verknüpft. In der ersten Phase der Untersuchung werden mit Hilfe eines Fragebogens die berufsbezogenen Überzeugungen zum Lehren und Lernen im Kindergarten sowie Angaben zum Beobachtungsverhalten erfasst. Anschließend steigen die elementarpädagogischen Fachpersonen in die Arbeit mit dem Kinderdiagnosetool KiDiT® (Walter-Laager et al. 2013) ein. Ab diesem Zeitpunkt wird das Dokumentationsverhalten der Fachpersonen digital aufgezeichnet. Nachdem die Fachpersonen circa drei Monate mit dem Tool gearbeitet haben, werden sechs Kinder mit dem mathematischen Testinstrument ‚zahlenstark‘ (Moser und Berweger 2007) untersucht und ihre Zone der nächsten Entwicklung bestimmt. Im dritten Schritt werden mit Hilfe von standardisierten Beobachtungsbögen die adaptive Unterstützungsleistung der elementarpädagogischen Fachpersonen sowie die Nutzung der mathematischen Lernangebote von zwei ausgewählten Kindern dokumentiert. Dazu wurden die elementarpädagogischen Fachpersonen im Vorfeld aufgefordert, eine 30-60 minütige Sequenz zu den Vorläuferfähigkeiten Mathematik im Bereich Mengen und Zahlen zu planen, die für alle Kinder Lernmöglichkeiten enthält. Im Anschluss an die Beobachtung wird ein standardisiertes Interview mit der Fachperson durchgeführt.

Alle Daten wurden zunächst deskriptiv quantitativ beziehungsweise qualitativ ausgewertet und im Anschluss im Zusammenhang betrachtet. Anschließend sind aufgrund von theoretischen Überlegungen die Fachpersonen hinsichtlich ihrer adaptiven Förderleistung in fünf Gruppen aufgeteilt und die Unterschiede zwischen den Gruppen betrachtet worden. Aufgrund der verzerrten, kleinen Stichprobe wurden in allen Phasen nicht-parametrische Methoden bevorzugt.

Ergebnisse und mögliche Schlussfolgerungen

Die Ergebnisse zeigen, dass keiner Fachperson eine angemessene Förderung zweier Kinder im Fachbereich Mathematik gelingt. Die elementarpädagogischen Fachpersonen stellen häufig allgemeine mathematische Angebote zur Verfügung und haben selten das individuelle Kind im Blick. Da ein großer Teil der Angebote wenig herausfordernd ist, gelingt es häufiger, die Kinder auf niedrigeren mathematischen Lern- und Entwicklungsstufen zu unterstützen. Viele der Fachpersonen verlieren jedoch die Kinder auf den höheren Lern- und Entwicklungsstufen aus dem Blick. Die Ergebnisse legen weiter nahe, dass die Fachpersonen Schwierigkeiten haben, den Lern- und Entwicklungsstand der Kinder im Bereich Mathematik korrekt zu erfassen und darauf aufbauend angemessene mathematische Aktivitäten anzubieten.

Bedeutsam für die Qualität der Förderleistung elementarpädagogischer Fachpersonen sind die Kernbereiche diagnostische Fähigkeiten, das Lern- und Entwicklungsniveau der Kinder sowie die Adaptivität der Planung. Diese Ergebnisse weisen darauf hin, dass die Fachpersonen einerseits Unterstützung in der Gestaltung von mathematischen Lernumgebungen mit Herausforderungen für Kinder auf unterschiedlichem Niveau und andererseits hinsichtlich der festgestellten Kernbereiche adaptiver Förderleistung benötigen.

Literaturverzeichnis

Gasteiger, Hedwig (2010): Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes. Univ., Diss.--München, 2010. Münster: Waxmann (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 3).

Klibanoff, Raquel S.; Levine, Susan C.; Huttenlocher, Janellen; Vasilyeva, Marina; Hedges, Larry V. (2006): Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "math talk.". In: *Developmental Psychology* 42 (1), S. 59–69.

Krajewski, Kristin; Nieding, Gerhild; Schneider, Wolfgang (2008): Kurz- und langfristige Effekte mathematischer Frühförderung im Kindergarten durch das Programm "Mengen, zählen, Zahlen". In: *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und pädagogische Psychologie* 40 (3), S. 135–146.

Krajewski, Kristin; Schneider, Wolfgang (2006): Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht* 53 (4), S. 246–262.

Kuger, Susanne; Kluczniok, Katharina; Roßbach, Hans-Günther; Blossfeld, Hans-Peter (2008): Prozessqualität im Kindergarten - Konzept, Umsetzung und Befunde. In: Hans-Günther Roßbach und Hans-Peter Blossfeld (Hg.):

Frühpädagogische Förderung in Institutionen. Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften (Zeitschrift für Erziehungswissenschaft. Sonderheft. 11), S. 159–178.

Moser, Urs; Berweger, Simone (2007): wortgewandt & zahlenstark. Lern- und Entwicklungsstand bei 4- bis 6-Jährigen. St. Gallen: Kantonaler Lehrmittelverlag St. Gallen.

Moser Opitz, Elisabeth; Ruggiero, Deborah; Wüest, Patricia (2010): Verbale Zählkompetenzen und Mehrsprachigkeit: Eine Studie mit Kindergartenkindern. In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht* 57 (3), S. 161–174.

Peter-Koop, Andrea; Grüßing, Meike (2008): Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten. Befunde zur vorschulischen Identifizierung und Förderung von potenziellen Risikokindern in Bezug auf das schulische Mathematiklernen. In: *Empirische Pädagogik* 22 (2), S. 209–224.

Rechsteiner, Karin; Hauser, Bernhard; Vogt, Franziska (2012): Förderung der mathematischen Vorläuferfertigkeiten im Kindergarten: Spiel oder Training? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012 Digital. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik. Online verfügbar unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0246_Rechsteiner.pdf, zuletzt geprüft am 28.11.2013.

Roßbach, Hans-Günther; Weinert, Sabine (2008): Kindliche Kompetenzen im Elementarbereich. Förderbarkeit, Bedeutung und Messung. Bonn (Bildung - Ideen zünden! Bildungsforschung. 24). Online verfügbar unter http://www.bmbf.de/pub/bildungsforschung_band_vierundzwanzig.pdf, zuletzt geprüft am 28.11.2013.

Siraj-Blatchford, Iram (2002): Researching effective pedagogy in the early years. Nottingham: Dept. for Education and Skills.

Tietze, Wolfgang; Meischner, Tatjana (1998): Wie gut sind unsere Kindergärten? Eine Untersuchung zur pädagogischen Qualität in deutschen Kindergärten. Neuwied: Luchterhand.

Walter-Laager, Catherine; Pfiffner, Manfred; Schwarz, Jürg (2013): KiDiT. Kinder Diagnose Tool: Institut für Elementar- und Schulpädagogik IESP GmbH. Online verfügbar unter ww.kidit.ch; www.kidit.de.

Nils BUCHHOLTZ, Hamburg

Multiperspektivische Ansätze zur Messung des Lehrerprofessionswissens in der Mathematiklehramtsausbildung

Anhaltend hohe Abbrecherquoten im Mathematiklehramtsstudium zeigen, dass aktuell immer noch eine Diskrepanz zwischen Studieninhalten und beruflichen Anforderungen zukünftiger Lehrkräfte besteht. Unterschiedliche Fördermaßnahmen im Bereich der Hochschuldidaktik versuchen zwar, dieser Entwicklung entgegenzuwirken, es besteht aber Forschungsbedarf hinsichtlich der Frage, wie Maßnahmen im Bereich der Lehramtsausbildung wirken und, wie sich die Entwicklung des Lehrerprofessionswissens der Lehramtsstudierenden im Laufe ihres Studiums gestaltet und vor dem Hintergrund kontextueller Rahmenbedingungen einzuschätzen ist. Ausgehend von den Ergebnissen der internationalen Vergleichsstudien Mathematics Teaching in the 21st Century (MT21; Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2008) und Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M 2008; Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2010) im Bereich der Lehrerbildung wurden die über diesen Forschungsbereich vorliegenden Erkenntnisse durch Buchholtz (2014) systematisch durch neue Ansätze zur psychometrischen Erfassung von Lehrerprofessionswissen längsschnittlich und international-vergleichend vertieft. Dazu wurden die Forschungsergebnisse dreier unterschiedlicher Teilstudien herangezogen, die durch aktuelle hochschulpolitische und hochschuldidaktische Diskussionen angeregt wurden und unter verschiedenen Perspektiven jeweils differenzierte Fragestellungen zur Vertiefung der Ergebnisse von TEDS-M 2008 verfolgten.

In einer international-vergleichenden Kooperationsstudie zwischen Deutschland, Hongkong, China und Südkorea wurde das Lehrerprofessionswissen von 345 Mathematiklehramtsstudierenden im Bereich Elementarmathematik vom höheren Standpunkt untersucht. Dabei wurden kulturspezifische Ergebnisse von TEDS-M 2008 aufgegriffen und ein Instrument zur differenzierten Erhebung von speziellem mathematischem Fachwissen entwickelt (vgl. Buchholtz et al. 2013a).

In der längsschnittlichen Evaluationsstudie Teacher Education Development Study – Telekom (TEDS-Telekom) wurde die Kompetenzentwicklung von 167 Gymnasiallehramtsstudierenden und Nicht-Lehramtsstudierenden unter den Bedingungen einer Neuorientierung des Mathematiklehramtsstudiums an beruflichen Anforderungen analysiert. Dabei wurde an verschiedenen Hochschulen mittels einer längsschnittlichen Erhebung über drei Messzeitpunkte im ersten, zweiten

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 281–284). Münster: WTM-Verlag

und vierten Semester die Entwicklung des Lehrerprofessionswissens von Studierenden u.a. in den Bereichen mathematisches Fachwissen und Mathematikdidaktik untersucht. Auf diese Weise konnten einerseits strukturelle Aussagen über die Zusammenhänge verschiedener Facetten der professionellen Kompetenz der Lehramtsstudierenden untersucht werden sowie andererseits der Einfluss der Neuorientierung des Mathematiklehramtsstudiums analysiert werden (vgl. Buchholtz & Kaiser, 2013a).

In der interdisziplinären Studie Teacher Education Development Study – Learning to Teach (TEDS-LT) wurde die Wissensentwicklung von Mathematiklehramtsstudierenden aus der Perspektive eines interdisziplinär-fachdidaktischen Vergleichs mit Deutsch- und Englischlehramtsstudierenden verglichen. Die längsschnittlich angelegte Studie untersuchte dabei zu zwei Messzeitpunkten das fachliche und fachdidaktische Wissen von 500 resp. 641 Lehramtsstudierenden in den veränderten Studienstrukturen des Bachelor- bzw. Masterstudiums im Fach Mathematik. Insbesondere im Bereich des fachdidaktischen Wissens konnten dabei alternative Konzeptualisierungen eines unterrichtsdidaktischen Wissens „jenseits“ der Stoffdidaktik vorgenommen werden, die differenzierte Analysen unterschiedlicher fachdidaktischer Profilierungen von Gymnasial- bzw. Sekundarstufen I-Lehramtsstudierenden ermöglichten (Buchholtz & Kaiser, 2013b).

Alle drei Studien verfolgen auf diese Weise die Ergebnisse von TEDS-M 2008 in unterschiedliche Richtungen weiter (vgl. Abb.1).

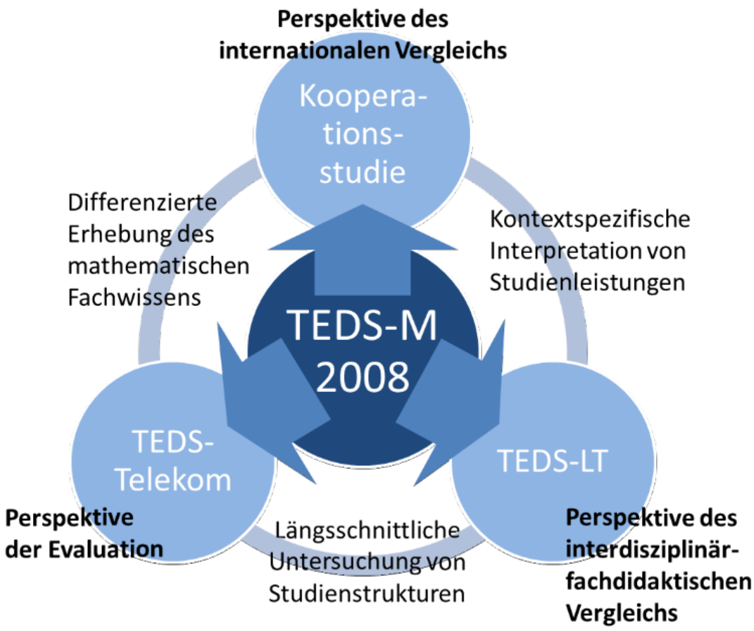


Abb.1: Zusammenhang der verschiedenen Teilstudien

Es ergaben sich in allen drei Studien für den Bereich des Fachwissens und des fachdidaktischen Wissens kohärente Befunde, so unter anderem, dass sich die fachliche Wissensentwicklung von Mathematiklehramtsstudierenden deutlich von ihrer fachdidaktischen Wissensentwicklung unterscheidet. Das fachdidaktische Wissen der Studierenden steigerte sich zwar im Sinne zunehmender didaktischer Reflexion über den ganzen Studienverlauf hinweg signifikant, im Bereich des fachlichen Wissens konnten allerdings keine durchgängigen Steigerungen nachgewiesen werden – ein Umstand, der eher darauf hindeutet, dass sich die fachliche Wissensentwicklung im Studienverlauf möglicherweise kurzfristiger und weniger nachhaltig vollzieht.

Es ließen sich ferner im fachlichen Wissenserwerb systematische Unterschiede zwischen Gymnasial- und Sekundarstufen I-Lehramtsstudierenden sowie Fachstudierenden identifizieren. Fachstudierende erreichten die deutlich besten Leistungen in den Studien, aber auch der internationale Vergleich der fachlichen Leistungen der Lehramtsstudierenden offenbarte Defizite im Bereich des schulrelevanten Wissens über Elementarmathematik vom höheren Standpunkt, da sowohl chinesische als auch koreanische Lehramtsstudierende signifikant bessere Leistungen zeigten. Analysen der Antworten der deutschen Studierenden innerhalb der internationalen Kooperationsstudie ergaben, dass oft bereits Probleme im elementaren Schulwissen in Mathematik bestehen und die universitäre Hintergrundtheorie nicht ausreichend beherrscht wird.

Auch im fachdidaktischen Wissenserwerb ließen sich Unterschiede zwischen Gymnasial- und Sekundarstufen I-Lehramtsstudierenden identifizieren, die allerdings im Sinne von fachdidaktischen Profilbildungen während des Studiums interpretiert werden können. In diesem Zusammenhang spielt die Einbindung einer alternativen Konzeptualisierung der fachdidaktischen Wissensdomäne in den Leistungstests der TEDS-LT Studie eine entscheidende Rolle. Eine differenzierte konzeptuelle und inhaltliche Unterscheidung zwischen „Stoffdidaktik" und „unterrichtsbezogener Mathematikdidaktik" wurde durch eine stärkere Einbindung unterrichtsdidaktischer Fragestellungen und die Vermeidung von fachdidaktischen Einkleidungen mathematischer Fragestellungen auf der Ebene der Operationalisierung des untersuchten Konstrukts erreicht und ermöglichte eine differenzierte Diagnose des fachdidaktischen Wissens. Zentrale Erkenntnisse in diesem Bereich waren u.a., dass angenommene Leistungsunterschiede im fachdidaktischen Wissen zwischen Gymansial- und Sekundarstufen I-Lehramtsstudierenden relativiert werden, wenn das fachdidaktische Wissen weniger stoffnah konzeptualisiert wird.

Methodische Weiterentwicklungen der Instrumente zur Messung von Lehrerprofessionswissen konnten im Bereich der differenzierten Messung des mathematischen und des mathematikdidaktischen Wissens realisiert werden, die eine zuverlässigere und validere Diagnostik im Bereich der lehramtsbezogenen Kompetenzmessung im Hochschulbereich erlaubten. So wurde in der Kooperationsstudie ein Instrument zur Erhebung von elementarmathematischem Fachwissen vom höheren Standpunkt entwickelt, die TEDS-Telekom Studie erbrachte eine Neuentwicklung von Instrumenten zur Messung universitären Fachwissens im Bereich Analysis und Lineare Algebra und die Studie TEDS-LT ein Instrument zur differenzierten Erhebung mathematikdidaktischen Wissens.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.). (2008). Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und –referendare. Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann R. (Hrsg.) (2010): TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Buchholtz, N. (2014). Multiperspektivische Ansätze zur Messung des Lehrerprofessionswissens in der Mathematiklehramtsausbildung [Elektronische Ressource]. Dissertation. Hamburg: Universität Hamburg. Abrufbar unter URN: urn:nbn:de:gbv:18-65839. URL: http://ediss.sub.uni-hamburg.de/volltexte/2014/6583/. Letzter Zugriff 04.02.2014.

Buchholtz, N., Leung, F.K.S., Ding, L., Kaiser, G., Park, K. & Schwarz, B. (2013). Future mathematics teachers' professional knowledge of elementary mathematics from an advanced standpoint. ZDM – The International Journal on Mathematics Education (ehem. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), 45(1), 107-120.

Buchholtz, N. & Kaiser, G. (2013a): Improving mathematics teacher education in Germany: Empirical results from a longitudinal evaluation of innovative programs. In: International Journal for Science and Mathematics Education.

Buchholtz, N. & Kaiser, G. (2013b). Professionelles Wissen im Studienverlauf: Lehramt Mathematik. In S. Blömeke, A. Bremerich-Vos, G. Kaiser, G. Nold & K. Schwippert (Hrsg.), Kompetenzen im Studienverlauf: Weitere Ergebnisse zur Deutsch-, Englisch- und Mathematiklehrerausbildung aus TEDS-LT (S. 107-143). Münster: Waxmann.

Andreas BUSSE, Hamburg, Gabriele KAISER, Hamburg, Johannes KÖNIG, Köln, Martina DÖHRMANN, Vechta, Jessica BENTHIEN, Vechta, Sigrid BLÖMEKE, Berlin

Zusammenhang von mathematikdidaktischem und erziehungswissenschaftlichem Wissen - Detailanalysen aus der TEDS-FU-Studie

Einleitung

Mathematikdidaktisches Wissen und pädagogisches Wissen sind – neben dem mathematischen Wissen – nach Shulman (1987) zwei zentrale Säulen des Professionswissens von Mathematiklehrkräften. Es ist eine weitgehend ungeklärte Frage, in welchem qualitativen Verhältnis diese beiden Wissensdomänen zueinander stehen. Die Klärung dieser Frage hängt auch davon ab, welche Wissensebenen man betrachtet: Orientiert man sich am akademisch kodifizierten Wissen oder am praxisnahen Handlungswissen (vgl. Neuweg 2011, S. 452)? Antworten auf diese Fragen sollen u. a. mittels Detailanalysen der Daten der Studie Teacher Education Development Study in Mathematics – Follow Up (TEDS-FU) gegeben werden (für erste Ergebnisse bezogen auf die aggregierten Daten siehe König et al. 2014).

Die Studie TEDS-FU

Die web- und videobasierte Studie TEDS-FU als Follow-Up der Studie TEDS-M (Teacher Education Development Study in Mathematics) erweitert die Konzeption von TEDS-M (Blömeke, Kaiser & Lehmann 2010) um situative Aspekte sowie um den Bereich des raschen Erkennens typischer Schülerfehler. TEDS-FU umfasst neben einer Befragung zu Beliefs, Berufszufriedenheit, Schulerfahrungen etc. auch videobasierte Tests zu situativem mathematikdidaktischen und pädagogischen Wissen sowie einen Test zur zeitlimitierten Erkennung von Schülerfehlern. Die in TEDS-M als Papier-und-Bleistift-Tests durchgeführten Befragungen zum mathematischen, mathematikdidaktischen und pädagogischen Wissen wurden in einer zum Teil verkürzten Version ebenfalls webbasiert durchgeführt (im Folgenden als digitale Papier-und-Bleistift-Tests bezeichnet). TEDS-FU wurde strukturgleich sowohl für Lehrkräfte der Primarstufe als auch für solche der Sekundarstufe I durchgeführt. Dabei wurden die einzelnen Testteile der jeweiligen Schulstufe angepasst. Der vorliegende Artikel beschränkt sich auf die Sekundarstufenstudie.

Die videobasierten Tests basieren auf drei Videovignetten (Dauer 2,5 Minuten bis 4 Minuten), die unterschiedliche drehbuchbasierte Sequenzen aus

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 285–288). Münster: WTM-Verlag

dem Mathematikunterricht der Klassen 8 bis 10 verschiedener Schulformen der Sekundarstufe I zeigen. Vor dem Ansehen der Vignette werden den Probandinnen und Probanden Kontextinformationen zur Klasse und zum mathematischen Inhalt gegeben. Nach dem Ansehen werden den Versuchspersonen offene und geschlossene Fragen aus den Bereichen der Pädagogik und der Mathematikdidaktik gestellt. Die Anforderungen in diesen Fragen beziehen sich auf Wahrnehmung und Analyse von Unterrichtssituationen sowie auf die Formulierung von Handlungsoptionen. Abbildung 1 zeigt als Beispiel eine offene Aufgabe aus dem pädagogischen Wissenstest.

(b) PÄDAGOGISCHE PERSPEKTIVE
Beschreiben Sie kontrastierend für jedes der drei Paare das WESENTLICHE DER ART UND WEISE in der die beiden jeweiligen Jugendlichen ihre ZUSAMMENARBEIT gestaltet haben (in Stichworten).

Abb. 1: Offene Aufgabe aus dem pädagogischen Videotest

In Abbildung 2 ist eine offene Aufgabe aus dem nicht-videobasierten digitalen Papier-und-Bleistift-Test in der Domäne Mathematikdidaktik dargestellt. In dem hier nicht dargestellten Aufgabenteil a) sollen die beiden Mathematikaufgaben gelöst werden, im Aufgabenteil b) wird eine fachdidaktische Analyse gefordert.

Die folgenden Aufgaben stammen aus einem Mathematikschulbuch für die Sekundarstufe I.

1. Peter, David und Jonathan spielen mit Murmeln. Zusammen haben sie 198 Murmeln. Peter hat 6-mal so viele Murmeln wie David und Jonathan hat 2-mal so viele Murmeln wie David. Wie viele Murmeln hat jeder der Jungen?

2. Die drei Kinder Anna, Philipp und Lukas besitzen zusammen 198 €. Anna hat 6-mal so viel Geld wie Philipp und 3-mal so viel wie Lukas. Wie viele Euro hat jedes Kind?

(b) Üblicherweise bereitet die zweite Aufgabe Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I größere Probleme als die erste. Nennen Sie einen Grund, der für den unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad verantwortlich sein könnte.

Abb. 2: Offene Aufgabe aus dem mathematikdidaktischen digitalen Papier-und-Bleistift-Test

Die Studie TEDS-FU erfasst in einem längsschnittlichen Design diejenigen Lehrerinnen und Lehrer, die am Ende ihres Referendariats an der Vorgängerstudie TEDS-M teilgenommen und sich zur Mitwirkung an der Folgestudie (TEDS-FU) bereit erklärt hatten. Die 171 Versuchspersonen der Sekundarstufenstudie verfügten bei der der Teilnahme an TEDS-FU in der Regel über drei bis vier Jahre Berufserfahrung.

Methodisches Vorgehen

Im Folgenden werden drei der oben genannten Untertests für die Sekundarstufenlehrkräfte genauer betrachtet. Im Einzelnen handelt es sich um

- den videobasierten Test in der Domäne Mathematikdidaktik,
- den videobasierten Test in der Domäne Pädagogik sowie
- den digitalen Papier-und-Bleistift-Test in der Domäne Mathematikdidaktik (identisch zum entsprechenden Test in TEDS-M).

Mithilfe eines Mediansplits (Mitchell & Jolley 2013, S. 252) werden die bezogen auf den Gesamtscore des betreffenden Tests jeweils leistungsstärkeren Hälften von Versuchspersonen in den drei Teiltests identifiziert. In diesen drei testspezifisch leistungsstärkeren Gruppen werden also die für den jeweiligen Test charakteristischen Anforderungen in besonderer Weise erfüllt. Da nur Versuchspersonen berücksichtigt werden, die alle drei Teiltests absolviert haben, reduziert sich der Stichprobenumfang. Jede Teilgruppe umfasst ca. 60 Personen. Diese drei Gruppen werden bezüglich ihrer Leistungen auf Aufgabenebene paarweise miteinander verglichen. Dadurch können Aufgaben identifiziert werden, die leistungsmäßig sehr ähnlich (als „verbindende Aufgaben" bezeichnet) und solche, die leistungsmäßig sehr verschieden (als „trennende Aufgaben" bezeichnet) bearbeitet wurden, d. h. es wurden Aufgaben mit ähnlichen und Aufgaben mit unterschiedlichen Leistungsanforderungen identifiziert**.** Die auf diese Weise ausgewählten Aufgaben werden bezüglich der in ihnen gestellten *inhaltlichen* Anforderungen analysiert. Aufgaben, die in keine dieser Kategorien fallen, oder solche, bei denen sich Decken- oder Bodeneffekte zeigen, werden bei den Analysen nicht berücksichtigt. Ziel der Analysen ist, die interne Struktur der untersuchten Domänen Mathematikdidaktik und Pädagogik in ihren Unterschieden bzw. Zusammenhängen zu untersuchen.

Ergebnisse

Beim *domänenübergreifenden* Vergleich des mathematikdidaktischen mit dem pädagogischen Videotests zeigt sich ein hoher Anteil verbindender Aufgaben und nur ein kleiner Anteil trennender Aufgaben. Ein Beispiel einer verbindenden Aufgabe aus dem pädagogischen Videotest ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Anforderungen, die dieser pädagogisch akzentuierten Aufgabe zugrunde liegen, beziehen sich auf eine genaue kategoriale Wahrnehmung, bei der Wesentliches von Unwesentlichem unterschieden wird.

Ein ganz anderes Bild zeigt sich, wenn man *domänenintern* die beiden mathematikdidaktischen Tests miteinander vergleicht. Hier ist der Anteil verbindender Aufgaben gering, der Anteil trennender Aufgaben hingegen groß. Ein Beispiel für eine trennende Aufgabe ist die in Abbildung 2 dargestellte Aufgabe aus dem mathematikdidaktischen Test im digitalen Papier-und-Bleistift-Format. Diese Testaufgabe stellt offensichtlich stoffdidaktische Analyseanforderungen.

Diskussion

Den beiden Videotests liegen neben dem Domänenbezug auch situative Anforderungen u. a. im Bereich der kategorialen Wahrnehmung sowie der Wahrnehmungsgenauigkeit zugrunde. Obwohl sich diese Anforderungen im Einzelnen der jeweiligen Domäne zuordnen lassen, zeigt sich doch im situationsnahen Kontext der Videovignetten eine gewisse Verwandtschaft der zur Bearbeitung notwendigen Kompetenzen. Dadurch spiegelt sich der Facettenreichtum der Unterrichtswirklichkeit wider, in der mathematikdidaktische und pädagogische Anforderungen in enger Verbundenheit auftreten.

Das Konstrukt *mathematikdidaktisches Wissen* zeigt in jedem der beiden mathematikdidaktischen Tests eine andere Facette: eine mathematiknah-stoffdidaktische einerseits und eine situativ-wahrnehmungsorientierte andererseits. Dadurch erklärt sich der eher hohe Anteil trennender Aufgaben beim Vergleich dieser beiden Tests. Erst die gemeinsame Nutzung der den beiden Tests zugrunde liegenden Zugänge vermag das Konstrukt *mathematikdidaktisches Wissen* valide zu erfassen.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010). *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

König, J.; Blömeke, S.; Klein, P.; Suhl, U.; Busse, A. & Kaiser G. (2014). Is teachers' general pedagogical knowledge a premise for noticing and interpreting classroom situations? A video-based assessment approach. In: *Teaching and Teacher Education*, 38, 76-88.

Mitchell, M. L. & Jolley, J. M. (2013). *Research Design Explained.* Belmont: Wadsworth.

Neuweg, G. H. (2011). Das Wissen der Wissensvermittler. Problemstellungen, Befunde und Perspektiven der Forschung zum Lehrerwissen. In: Terhart, E.; Bennewitz, H. & Rothland, M. (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf*. Münster: Waxmann, 451-477.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. In: *Harvard Educational Review*, 57, 1, 1-21.

Dorothea BUSSMANN, Elisabeth RATHGEB-SCHNIERER, Weingarten

Lernentwicklungen von Kindern mit geringem mathematischem Vorwissen beim Erwerb des Zahlbegriffs in unterschiedlichen Settings zur mathematischen Frühförderung

Kurze Projektbeschreibung

Im Rahmen des Projektes werden Lernentwicklungen von Kindern mit geringem mathematischem Vorwissen im letzten Kindergartenhalbjahr untersucht. Die ausgewählten Kinder besuchen Kindergärten, in denen die mathematische Frühförderung auf unterschiedliche Art und Weise umgesetzt wird. Folgenden Forschungsfragen wird nachgegangen:

- Wie lässt sich das mathematische Vorwissen von Kindergartenkindern erfassen?
- Wie können Lernentwicklungen von Kindern beim Erwerb des Zahlbegriffs im Vorschulalter sichtbar gemacht werden?
- Welche Lernentwicklungen zeigen Kinder mit geringem mathematischem Vorwissen im Vorschulalter in Abhängigkeit von unterschiedlichen Settings zur mathematischen Frühförderung?
- Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede zeigen sich bezüglich der Entwicklungen in den unterschiedlichen Settings?

Theoretischer Rahmen

Nicht zuletzt durch die Ergebnisse internationaler Schulleistungsstudien wie TIMSS und PISA wurde der frühkindlichen Bildung zu Beginn des 21. Jahrhunderts wieder mehr Aufmerksamkeit geschenkt (z.B. Royar, 2007; Wittmann, 2004, 2006). Damit kam auch dem bislang eher vernachlässigten Bereich der mathematischen Bildung verstärkt Bedeutung zu (Roux, 2008), insbesondere dem Erwerb des Zahlbegriffs (Krajewski, 2003). Eine auf Zahl- und Zählfähigkeiten basierende Förderung scheint besonders bei Kindern angezeigt, die im letzten Kindergartenjahr Schwierigkeiten bei der Entwicklung ihres mengen- und zahlbezogenen Wissens zeigen, da diese sehr wahrscheinlich Probleme beim schulischen Mathematiklernen entwickeln (z.B. Hasselhorn & Schneider, 2011; Krajewski, 2005; Peter-Koop, Grüßing & Schmitman gen. Pothmann, 2008). Erfahrungen, die bereits bei jungen Kindern angeregt werden sollten, beziehen sich auf „das Vergleichen von Mengen, das Aufsagen der Zahlwortreihe, das Abzählen von Dingen, das simultane oder quasi-simultane Erfassen von Anzahlen in Würfel- oder anderen Zahlbildern, das Zerlegen von Mengen von Dingen,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 289–292). Münster: WTM-Verlag

das Bestimmen von Vorgänger und Nachfolger, das Zuordnen der Zahl zu einer Menge und erstes Rechnen“ (Rathgeb-Schnierer, 2012, S. 58). Diese Fähigkeiten sind Vorläufer schulischer Lernprozesse (Faust-Siehl, 2001). Mathematiklernen beginnt demnach nicht erst mit Eintritt in die Schule – der Grundstein für späteres Lernen wird vielmehr bereits im frühen Kindesalter gelegt. Daher kommt den Kindergärten eine bedeutende Rolle im Anregen mathematischer Bildungsprozesse zu (Heinze & Grüßing, 2009). Vor diesem Hintergrund wurden in den letzten Jahren zahlreiche Materialien und Konzeptionen entwickelt (Hellmich, 2008). Schuler (2013) fasst diese in drei Ansätzen zusammen: Lehrgänge oder (Förder-)Pro-gramme, punktuell einsetzbare Materialien und integrative Konzeptionen.

Materialien sind ein zentrales Gestaltungselement mathematischer Bildung im Kindergarten und stellen den Ausgangspunkt aller Settings dar. Sie werden von den Erzieherinnen ausgewählt und den Kindern auf unterschiedliche Art und Weise dargeboten (Schuler, 2013).

Aktueller Forschungsstand

Die generelle Wirksamkeit der Förderung mittels lehrgangsartiger Förderprogramme konnte bereits nachgewiesen werden (Friedrich & Munz, 2006; Krajewski, Renner, Nieding & Schneider, 2009; Sinner, 2011), ebenso Effekte einer spielorientierten Förderung (Gasteiger, 2013; Rechsteiner & Hauser, 2012). Das Projekt SpiF (Spielintegrierte Förderung) zeigte beispielsweise, dass eine spielorientierte Förderung allen Kindern (unabhängig vom Lernstand) zugutekommt, während Kinder mit geringem mathematischem Vorwissen vor allem vom Programm „Mengen, zählen, Zahlen“ (MzZ; Krajewski, Nieding & Schneider, 2007) profitierten (Rechsteiner & Hauser, 2012). An der Wirksamkeit verschiedener Förderkonzepte bestehen keine Zweifel mehr, auch ist man sich über die Notwendigkeit früher Förderung weitgehend einig (z.B. Gasteiger, 2010; Hasselhorn & Schneider, 2011). Es besteht jedoch „wenig Konsens darüber, wie, wann und wo frühe Förderung an- und umgesetzt werden sollte. Angesichts der eher bescheidenen empirischen Basis besteht noch massiver Forschungsbedarf zur Frage, welche Ziele bei welchen Kindern mit welchen Fördermaßnahmen erreichbar sind“ (Hasselhorn & Schneider, 2011, S. 6). An dieser Stelle knüpft das vorliegende Projekt an: der Fokus soll auf die Entwicklungen von Kindern mit geringem mathematischem Vorwissen im Bereich des Zahlbegriffserwerbs gerichtet werden, welche durch den unterschiedlichen Einsatz verschiedener Materialien und Konzeptionen zur frühen mathematischen Bildung angeregt werden.

Design der Untersuchung

Es wurden Kindergärten rekrutiert, welche unterschiedliche Konzepte zur frühen mathematischen Förderung ihrer Vorschulkinder einsetzen. Da die Lernentwicklungen der Kinder in Abhängigkeit von verschiedenen Settings zur mathematischen Frühförderung untersucht werden sollen, wurden vorab Gespräche mit den Erzieherinnen geführt. So konnte sichergestellt werden, dass die ausgewählten Kindergärten die frühe mathematische Bildung in ihren Kindergärten unterschiedlich gestalten. Aus diesen Kindergärten wurden anschließend Kinder ausgewählt, die über geringes mathematisches Vorwissen verfügen. Bei dieser Auswahl waren Gespräche mit den Erzieherinnen sowie die Ergebnisse des durchgeführten standardisierten Tests MARKO-D (Ricken, Fritz & Balzer, 2013) leitend.

Die Lernentwicklungen der ausgewählten Kinder sollen sichtbar gemacht werden, indem ihr Lernstand in regelmäßigen Abständen von etwa zwei Monaten erfasst wird. Dafür werden drei halbstandardisierte Interviews im Laufe des letzten Kindergartenhalbjahres und ein Interview nach dem ersten Schulhalbjahr durchgeführt (Überblick siehe Abb. 1). Grundlage für die Interviews ist die von Moser Opitz und Schmassmann (2007) entwickelte Lernstandserfassung mit dem Goldstückspiel. Diese spielerische Form ist für den vorschulischen Bereich sehr geeignet, da ein Großteil der Interviewaufgaben in den Spielverlauf integriert ist und somit eine implizite Lernstandserfassung möglich ist. Zudem wird zu jedem Interview-Item gezielt Material des Goldstückspiels als Artikulationshilfe angeboten, sodass den Kindern handlungsgestützte Artikulationsformen ermöglicht werden. Durch den handelnden Umgang mit den Spielmaterialien wird so „das bislang mangelhafte Vermögen der Kinder, ihre Gedankengänge zu verbalisieren“ (Selter & Spiegel, 1997, S. 101) angemessen berücksichtigt. „Einschränkungen in der sprachlichen Entwicklung wirken sich somit nicht zwingend auf die mathematische Performanz aus“ (Peter-Koop & Grüßing, 2006, S. 104). Während einer Durchführungszeit von ca. 45 Minuten werden pränumerische und numerische Vorkenntnisse der Kinder anhand unterschiedlicher Aufgabenstellungen erfasst. Die Interviews werden videotechnisch aufgezeichnet, was besonders bei Kindern, die sich am unteren Rand der Performanzskala bewegen, zweckmäßig erscheint. So können neben verbalen Lösungsmitteilungen auch nonverbale Ausdrucksweisen der Kinder erfasst und eine Reduktion auf verbale Äußerungen vermieden werden (Lamnek, 2010). Damit liegt für die Auswertung ein Datenmaterial vor, bei dem nonverbale Äußerungen zur relativierenden, bestätigenden oder korrigierenden Interpretation der verbalen Mitteilungen herangezogen werden können (Lamnek, 2010).

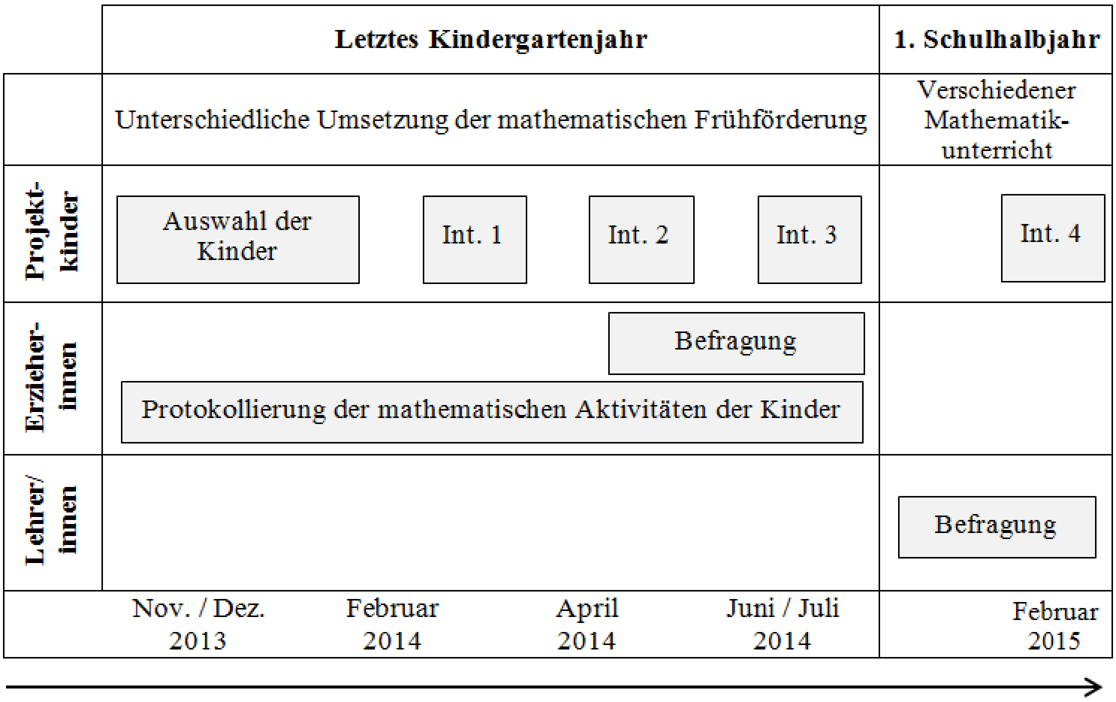


Abb. 1: Datenerhebung im Überblick

Um die Settings zur mathematischen Frühförderung in den einzelnen Kindergärten detailliert beschreiben zu können, findet eine Befragung mit den Erzieherinnen der teilnehmenden Kindergartengruppen statt. Zudem protokollieren die Erzieherinnen während des letzten Kindergartenhalbjahres die mathematischen Aktivitäten der Kinder, welche diese während des Projektzeitraumes durchführen. Hierzu gehören sowohl durch die Erzieherinnen gezielt initiierte Angebote oder Projekte, an welchen die Kinder teilnehmen, als auch Aktivitäten der Kinder, die von den Erzieherinnen während des Freispiels beobachtet werden. Auf diese Weise sollen umfassende Einsichten in die den Entwicklungsverläufen zugrunde liegenden Bedingungen gewonnen werden. Analog dazu wird auch eine Befragung mit den Mathematiklehrkräften der Kinder im ersten Schuljahr durchgeführt, um nachvollziehen zu können, was für einen Mathematikunterricht die Kinder im ersten Schulhalbjahr – bis zum Interview im Februar 2015 – erlebt haben.

Literatur

Die Liste mit der im Text angeführten Literatur kann bei den Autorinnen per Email angefordert werden: bussmann@ph-weingarten.de, rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de

Jenny Christine CRAMER, Bremen

„In der Mitte sind die Zwei und die Fünf" – Logisches Argumentieren im Kontext von Spielen

Mathematisches Argumentieren ist ein wesentliches Ziel von Mathematikunterricht. Krummheuer (1992) sieht zudem die Partizipation an Argumentationsprozessen als eine Voraussetzung für schulisches Lernen. Längst nicht geklärt ist jedoch, wie für alle Schülerinnen und Schüler, insbesondere für benachteiligte Lernende, Möglichkeiten zur Partizipation an kollektiven Argumentationen im Unterricht geschaffen werden können (vgl. Cramer, 2013). Die Dreifachperspektive der Habermas'schen Diskursethik beschreibt Voraussetzungen für die Teilhabe an Argumentationen im Hinblick auf Prozesse, Prozeduren und Produkte. Im Folgenden illustriere ich anhand einer logischen Spielsituation, wie mit diesem Ansatz Hürden für die Partizipation an mathematischer Argumentation identifiziert und erklärt werden können.

Wie entsteht Argumentation? Eine diskursethische Betrachtung.

Im Rahmen seiner Theorie kommunikativen Handelns beleuchtet Habermas (1983) Entstehungsbedingungen von Argumentationen aus drei Perspektiven: Einer rhetorischen Sicht auf Argumentieren als Prozess, einer dialektischen Sicht auf Argumentieren als Prozedur, und einer logischen Sicht auf die Produkte von Argumentationen. Für alle drei Bereiche stellt er Diskursregeln auf, welche normative Idealvoraussetzungen für die Partizipation an Argumentationen beschreiben. Dabei bezieht er sich auf Argumentationen in alltäglichen Kontexten, also freiwillige und spontane Argumentationen. Dennoch sind diese Regeln auch für den Mathematikunterricht, gerade auch für die Beschreibung und Erklärung von Partizipationsbedingungen in diesem, interessant. Zwecks besserer Anwendbarkeit habe ich die Regeln verdichtet und auf den unterrichtlichen Kontext angepasst. Alle Regeln sind aus Habermas Diskursethik (1983, S. 97ff) übernommen. Für die Partizipation an Argumentationsprozessen gelten aus Sicht der Rhetorik folgende Regeln:

- R1: Jeder und jede darf sich an Argumentation beteiligen.
- R2: Diskussionsinhalte werden unter Beteiligung aller festgelegt.
- R3: Die Kommunikation findet gleichberechtigt und befreit von Zwängen statt.

Folgende Bedingungen gelten für die Prozedur des Argumentierens:

- D1: Jeder Sprecher darf nur das behaupten, was er selbst glaubt.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 293–296). Münster: WTM-Verlag

- D2: Geteiltes Wissen darf nicht grundlos angefochten werden.

Schließlich sind die Voraussetzungen für die Produkte:

- L1: Kein Sprecher darf sich widersprechen.
- L2: Wer in einer Situation eine Schlussregel anwendet, muss bereit sein, diese in allen analogen Situationen zu verwenden.
- L3: Begriffe haben eine gemeinsam festgelegte Bedeutung.

Habermas gibt die aufgeführten Regeln als notwendige Voraussetzungen für die Partizipation an Argumentationsprozessen an. Er betont jedoch, dass nicht die faktische sondern die subjektiv empfundene Erfüllung der Bedingungen entscheidend ist. Objektiv können die der Diskursethik entsprechenden Ausgangsbedingungen durch die unterschiedliche Position von Lehrenden und Lernenden im schulischen Kontext kaum oder gar nicht erreicht werden. Dennoch eröffnet die Analyse von Unterrichtssituationen bezüglich der Bedingungen für Argumentation als Prozess, Prozedur und Produkt eine interessante Perspektive auf Partizipationsmöglichkeiten. Ich werde im Folgenden an Daten aus meinem Dissertationsprojekt darlegen, warum logische Spiele geeignet sein können für die Schaffung günstiger Ausgangsbedingungen für mathematisches Argumentieren.

Mathematisches Argumentieren am Beispiel „Da Vinci Code“

In meinem Dissertationsprojekt beschäftige ich mich mit der Identifikation von Hürden für das mathematische Argumentieren. Von September 2012 bis Juni 2013 gab ich einmal wöchentlich Unterricht in einer Gruppe von fünf Neuntklässlerinnen nichtdeutscher Erstsprache aus unterschiedlichen Schulformen. Jede Unterrichtsstunde begann mit einem Argumentationsanalass zu einem mathematischen Sachverhalt. In den meisten Situationen hatten die Schülerinnen große Schwierigkeiten, diese Argumentationsbasis aufzugreifen und in einen Argumentationsprozess einzutreten. Vielfältige mathematische Argumentationsanlässe wurden von mir geschaffen, doch immer wieder konnten Barrieren für die Partizipation an Argumentation beobachtet werden. Dies stellte sich unerwartet in einer Spielsituation völlig anders dar. In der vorgestellten Episode aus dem März 2013 führte ich das Logikspiel „Da Vinci Code“ ein, es waren drei Mädchen anwesend. Nach zwei Spielrunden wurde das Spiel eingepackt und eine fiktive Spielsituation (Abb. 1) vorgelegt, in der die verdeckten Steine identifiziert werden sollten. Die Spielregeln lauten: (I) Es gibt jede Zahl von 0-11 genau einmal in schwarz und einmal in weiß, und alle 24 Steine sind jederzeit im Spiel. (II) Vor den Spielern werden die Zahlen aufsteigend angeordnet. (III) Hat ein Spieler eine Zahl in beiden Farben, so steht die schwarze Zahl links.

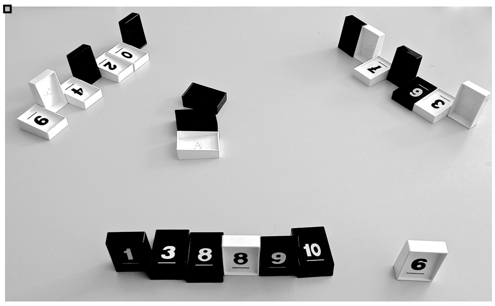


Abbildung 2: Die fiktive Spielsituation.

Der Transkriptausschnitt (s.u.) entstammt dem Beginn der Aufgabenbearbeitung. Die Argumentation ist ein Ausschnitt des Arguments, dass die verdeckten schwarzen Steine in der Mitte Zwei und Fünf sein müssen. Die von den Schülerinnen hervorgebrachte Argumentationsstruktur (Abb. 2) wurde mit dem Toulmin-Schema (1958) analysiert. Das Argument ist deduktiv aufgebaut und nahezu vollständig. Implizit bleiben neben den Spielregeln (I) bis (III), die als Schlussregel dienen, nur die Information (*), dass die schwarze 2 nicht beim vorderen Spieler liegt.

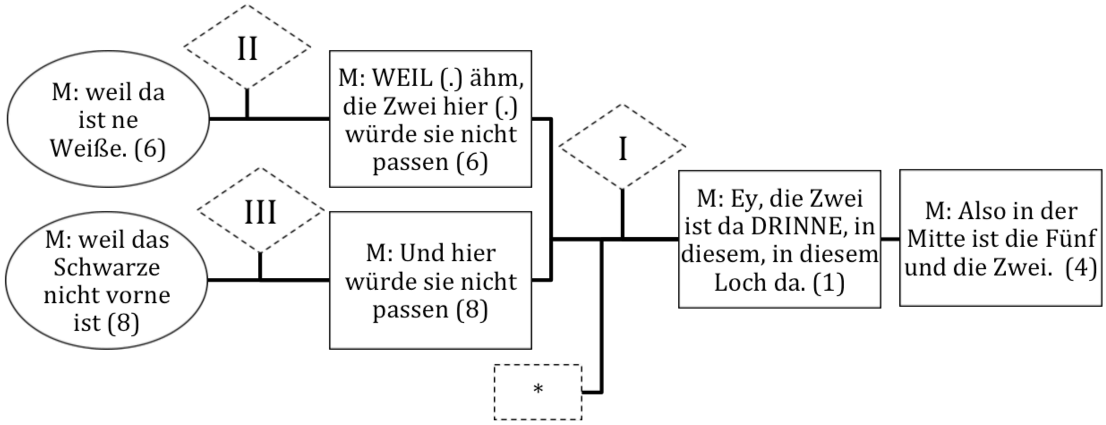


Abbildung 1: Analyse der Argumentationsstruktur

1	M: Ey, die Zwei ist da DRINNE, in diesem, in diesem Loch da.
2	A: Mhm (bejahend)
3	(27 Sek) I: (steht auf) Sagt mal ruhig den anderen, wenn ihr schon schon eine Zahl herausgefunden habt.
4	M: Also in der Mitte ist die Fünf und die Zwei.
5	I: Mhm (fragend). Woher willst du das wissen'? (kommt dazu)
6	M: WEIL (.) ähm, die Zwei hier (zeigt auf rechten Gegenspieler) würde sie nicht passen, weil da ist ne Weiße.
7	I: Mhm (bejahend)
8	M: (4 Sek) Und hier (zeigt auf linken Gegenspieler) würde sie nicht passen, weil das Schwarze nicht vorne ist.

Logische Spiele – eine Möglichkeit, Argumentieren zu fördern

Anders als in allen vorausggangenen Unterrichtsstunden, in denen das Hervorbringen einer mathematischen Argumentation den Schülerinnen meist nicht oder nur sehr eingeschränkt gelang, zeigen sie bei diesem Logikspiel eine überraschende Affinität zu Argumentation und logischem Schließen. Dies ist angesichts der zuvor beobachteten immensen Schwierigkeiten bezüglich der Partizipation an Argumentation erklärungsbedürftig.

Anders als in den vorausgegangenen Unterrichtsstunden sind in der vorliegenden Spielsituation die Bedingungen der Diskursethik in allen drei Bereichen erfüllt. Die aktiven Spielrunden, die der Aufgabe vorausgingen, erforderten eine aktive Beteiligung von allen Spielenden und etablierten einen gleichberechtigten Status aller Spielerinnen (R1, R3). Diese Beteiligung scheint sich auf die fiktive Aufgabe im Anschluss an die Spielrunden übertragen zu haben. Zudem ist der Diskussionsinhalt durch das Bild gegeben, die Spielregeln legen Begriffe klar fest. Darüber hinaus besteht das zur Lösung der Aufgabe erforderliche Wissen ausschließlich aus den Spielregeln und wird damit von allen geteilt (R2, D2, L3). Im Spiel ist es zielführend, dass jeder Spieler nur das behauptet, was seiner Überzeugung entspricht, denn dies erhöht die Gewinnchance. Auch in der fiktiven Situation ist dies günstig (D1). Die festgelegte Situation begünstigt Widerspruchsfreiheit (L1), und die Spielregeln erleichtern die Identifikation analoger Situationen (L2).

Logische Spiele scheinen aus Sicht der Diskursethik Möglichkeiten zur Partizipation an Argumentationen gerade auch für Schülerinnen zu schaffen, denen in klassischen mathematischen Lernsituationen ansonsten eine Partizipation an Argumentation nur schwer gelingt. Hypothetisch-deduktives Schließen kann von ihnen aufgrund der klaren Spielregeln hier geübt werden. Die Partizipation an Argumentation wird diesen Lernenden zusätzlich durch die gemeinsame Wissensbasis ermöglicht, die allein auf den vorgegebenen Spielregeln beruht.

Literatur

Cramer, J. C. (2013). Possible language barriers in processes of mathematical reasoning. Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8), Ankara, ERME, 116-125.

Habermas, J. (1983). Diskursethik-Notizen zu einem Begründungsprogramm. In Moralbewusstsein und kommunikatives Handeln (pp. 53-126). Frankfurt: Suhrkamp.

Krummheuer, G. (1992). Lernen mit" Format": Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie; diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Toulmin, S. (1958). The Uses of Argument. Cambridge: Cambridge University Press.

Miriam DIMARTINO, Saarbrücken

Strategiewechsel – Weg vom Zählen hin zum Denken

Die derzeit angebotenen Arbeits- und Veranschaulichungsmittel beeinflussen die kindlichen Rechenstrategien trotz ihrer Strukturierung nur mit mäßigem Erfolg. Viele Kinder verharren im zählenden Rechnen. Dies führt in Folge oftmals dazu, dass der Rechenlernprozess zunehmend gehemmt und behindert wird.

> *„Im Sinne der Förderung der mathematischen Lernprozesse der uns anvertrauten Kinder wäre es jedoch notwendig und hilfreich, wieder einmal intensiver über die Rolle von Materialien beim Mathematiklernen zu reflektieren.“*
> *(Wilhelm Schipper, 2003, S. 221)*

Um binnen kürzester Zeit Grundvorstellungen und Operationsverständnis als solides Fundament in den Köpfen der Kinder zu verankern, muss Mathematik auf einem strukturierten Arbeitsmaterial fußen.

1. Von der Sicht zur Einsicht

Im Bereich Zahlen und Operationen sollen laut KMK die Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstanden und gekonnt werden. Dabei sollen die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrscht, deren Umkehrungen sicher abgeleitet und die Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größere Zahlenräume übertragen werden. Auch sollen Strukturen und Gesetzmäßigkeiten in arithmetischen Mustern erkenn-, beschreib- und darstellbar sein (KMK, 2004).

Es ist festzustellen, dass einem Großteil der Schülerschaft dies am Ende des ersten Schuljahres nicht gelingt. Sie bleiben bereits im ZR bis 10 entweder als Zähler oder mit gravierenden Defiziten zurück (Gaidoschik, 2010). Der Umstand des Zählens stellt für Kinder einerseits den natürlichen Zugang zu Zahlen und zum Rechnen dar, andererseits hemmt er den Aufbau mentaler Zahlvorstellungen. Um die Kinder bei der Ablösung zu unterstützen und den Strategiewechsel und den Rechenlernprozess nachhaltig zu fördern, ist geeignetes Arbeitsmaterial auszuwählen.

Radatz/Schipper/Dröge/Ebeling (1996) klassifizieren drei Arten von Arbeitsmitteln, die Handlungen erlauben. Unstrukturierte (lose) Arbeitsmaterialien (z. B. Wendeplättchen, Steckwürfel), strukturierte Arbeitsmaterialien (z. B. Rechenstäbe, Cuisenaire–Stäbe), sowie eine Mischform beider Typen (z. B. Rechenschiffe, Rechenrahmen, Rechenkette).

Im Folgenden werden mittels der Aufgabe „2+7 =__“ die Vorzüge und Unzulänglichkeiten der verschiedenen Materialien verdeutlicht.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 297–300). Münster: WTM-Verlag

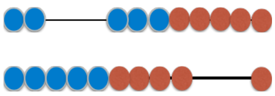
Wendeplättchen sind durch ihre Strukturlosigkeit flexibel einsetzbar. Kleinere Anzahlen bis vier können dabei simultan erfasst und dargestellt, größere Mengen müssen indes abgezählt werden. Entsprechend muss hier sowohl der größere Summand als auch die Summe mittels Alles– oder Weiterzählen ermittelt werden. Daher sind Wendeplättchen als zentrales Arbeitsmittel im ZR ≤ 5 ungeeignet, denn der Umgang verfestigt das zählende Rechnen (Radatz/Schipper/Dröge/Ebeling, 1996).

Wendeplättchen

Während die Kinder an unstrukturiertem Material ausschließlich mit Einzelelementen hantieren, arbeiten sie an strukturiertem Material mit Ganzheiten. Die Rechenstäbe ermöglichen den Kindern Mengen simultan und quasi–simultan (mittels „Kraft der Fünf“ (Krauthausen, 1995)) zu erfassen und darzustellen. Dabei können die beiden Teilmengen „en bloc“ erfasst und zusammengelegt werden. Als nachteilig erweist sich, dass die Summe auch hier mittels Alles– oder Weiterzählen ermittelt werden muss.

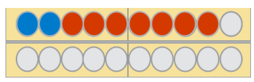
Rechenstäbe

Der Rechenrahmen und die Rechenkette besitzen durch die Zusammensetzung einzelner Perlen zu einer strukturierten Ganzheit den Vorteil, dass auch hier mittels „Kraft der Fünf“ Anzahlen simultan und quasi–simultan erfasst und „en bloc“ dargestellt werden können. Wie die obige Aufgabe zeigt, trifft dies im ZR 10 nicht immer zu. Bei Aufgaben, deren zweiter Summand größer als der erste Summand und deren Summe kleiner 9 ist, wird bereits durch simultane Erfassung und Darstellung der ersten Teilmenge die Fünferstruktur des Materials zerstört. Die größere Menge kann bei nicht automatisierter Zahlzerlegung nur durch Schieben der Einzelelemente, also zählend erfasst werden. Das sukzessive Schieben und Zählen der Einzelelemente lässt sich durch Anwendung der Tauschaufgabe (7+2) reduzieren. Die deutliche Fünferstruktur erlaubt einerseits die quasi–simultane Erfassung der Gesamtanzahl (5+4), andererseits zerstört sie die Struktur der Grundaufgabe (2+7).



Mischtyp: Rechenrahmen

Beim Handeln an Rechenschiffen können die Kinder mit Einzelelementen (Wendeplättchen) und Ganzheiten (Fünferschiffen) hantieren. Bei der Darstellung der Aufgabe „2+7=__“ zeigen sich aber bekannte Unzulänglichkeiten. Nach Darstellung der kleineren Teilmenge (2), ist auch hier die Fünferstruktur zerstört. Hantieren die Kinder mit den Einzelelementen, kann die größere Teilmenge (7) nicht quasi–simultan erfasst werden, sodass die Kinder auf ein Zählkonzept zurückgreifen müssen. Die quasi–



Mischtyp: Rechenschiffe

simultane Erfassung der Menge (7) mittels Ganzheit und Einzelelementen hilft ihnen nur dann weiter, wenn der zweite Summand unter Bezugnahme der Zahlzerlegung (3+4) richtig zerlegt und dann in einem weiteren Schritt zur Teilmenge (2) ergänzt wird. Wird die Zerlegung nicht beherrscht, ist das Lösen der Aufgabe nur durch Weiterzählen möglich. Die Fünferstruktur erlaubt auch hier die quasi–simultane Erfassung der Gesamtanzahl. Dabei bleibt die Grundstruktur der Aufgabe (2+7) erhalten. Das sukzessive Hineinlegen der Einzelelemente lässt sich allerdings nicht durch Anwenden der Tauschaufgabe vermeiden.

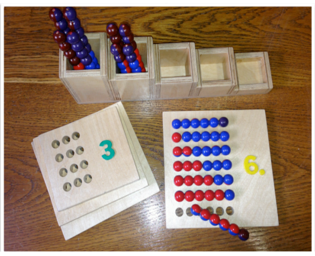
Nach der exemplarischen Materialanalyse muss festgestellt werden, dass die Kinder am Material zählen, um nicht handlungsunfähig zu werden. Durch den spezifischen Aufbau der unterschiedlichen Materialien ist einerseits zu unterscheiden, inwieweit das Zählen fokussiert wird, andererseits inwieweit die Kinder auf gefestigte Vorstellungen zurückgreifen müssen, um am Material nicht zählend handlungsfähig zu bleiben.

> *„Abzählen an konkreten oder vorgestellten Materialien verhindert auf Dauer die Entwicklung operativer Strategien. Deshalb werden strukturierte Materialien benötigt.“ (Wilhelm Schipper, 2011, S. 83)*

Durch Kombination der unterschiedlichen Vorzüge der Materialien wurden Wendestäbchen und Bezugsrahmen konzipiert, die den fachdidaktischen Forderungen und Überlegungen theoretisch Rechnung tragen könnten.

2. Strategiewechsel – Aufbau mentaler Vorstellungsbilder mit Wendestäbchen und Bezugsrahmen

Das Material betont wie bereits die Rechenstäbe den Kardinalzahlaspekt.



Dabei können kleinere Anzahlen bis vier simultan, größere Anzahlen zwischen 6 und 10 durch die deutliche Fünferstrukturierung mit farbig überschreitendem Rest (abgedunkelter Blau– bzw. Rotton) quasi–simultan erfasst werden. Zudem sind die Rechenstäbe (wie Wendeplättchen) durch ihre Wendigkeit charakterisiert. Operationen werden an einem farbig strukturierten Zwanzigerfeld durchgeführt. Hinsichtlich der Aufgabe „2+7=___“ lassen sich die Wendestäbe „en bloc“ erfassen und im Zwanzigerfeld positionieren. Die Gesamtanzahl ist dabei ebenfalls quasi–simultan erfassbar. Durch die Materialstruktur müssen die Kinder nicht durch sukzessives Hineinlegen von Einzelelementen auf Zählstrategien zurückgreifen. Dies führt zu einer Entlastung des Arbeitsgedächtnisses (vgl. cognitive load theory (Sweller/Chandler, 1991)). Zentrale Idee bei der Materialkonzeption war zudem die nicht zählende Handhabbarmachung der Zahlzerlegung. Dazu wurden Bezugsrahmen gefertigt, die den Zerlegungshäusern auf enaktiver Ebene entsprechen. Die Ergebniszahl wurde nicht als Dachzahl angeordnet, sondern, um den Transfer zur symbolischen Ebene zu erleichtern, rechtsseitig platziert. Mit dem Spiel „Plättchenwerfen" können die Kinder selbstständig alle Zerlegungen finden, legen und notieren. Aber auch bildlich oder symbolisch vorgegebene Muster können nachgelegt und notiert werden. Mit Hilfe des Materials können also Zerlegungen auf vielfältige Weise produktiv geübt und nicht zählend automatisiert werden.

Es ist anzunehmen, dass der Einsatz von Wendestäbchen und Bezugsrahmen die Kinder handlungsfähig macht und den Aufbau des mentalen, nicht zählenden und flexiblen Zahlverständnisses fördert. Somit wird der Rechenlernprozess nachhaltig unterstützt. Dabei ist das Material keine Zählhilfe, sondern echtes Lern– und Kommunikationsmittel (Wartha/Schulz, 2012), an dem sich Grundvorstellungen zur Zahl, zu Strategien und zu Operationen (Wartha/Schulz, 2012) sowie vielfältige individuelle Lösungswege für Rechenaufgaben entwickeln lassen (Radatz/Schipper/Dröge/Ebeling, 1996). Ein Rückgriff und Umlernen auf andere Materialien ist nicht nötig (Radatz/Schipper/Dröge/Ebeling, 1996), denn es kann durch strukturgleiche Fortsetzung – auch hinsichtlich des Übertrags auf den Inhalt der Multiplikation – im ZR 100 genutzt werden.

Literatur

Chandler, P. & Sweller J. (1991). Cognitive Load Theory and the Format of Instruction. Cognition and Instruction, S. 293-332.

Gaidoschik, M. (2010). Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres. Dissertation. http://othes.univie.ac.at/9155/1/2010-01-18_8302038.pdf [01.03.2014]

Kultusministerkonferenz (2004). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. Luchterhand.

Krauthausen, G. (1995). Die „Kraft der Fünf" und das denkende Rechnen. In: Müller, G. & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.): Mit Kindern rechnen. Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband – e.V. Frankfurt am Main, S. 87-108.

Schipper, W. (2003). Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Baum, M. / Wielpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, S. 221-237.

Schipper, W. (2011). Vom Calculieren zum Kalkulieren – Materialien als Lösung- und als Lernhilfe. In: Steinweg, A. S. (Hrsg.): Mathematikdidaktik Grundschule. Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM. Bamberg, S.71-85.

Radatz, H. /Schipper, W./Dröge, R. & Ebeling A. (1996). Handbuch für den Mathematikunterricht - 1. Schuljahr. Hannover. Schroedel.

Wartha, S., Schulz, A. (2012). Rechenproblemen vorbeugen. Berlin: Cornelsen.

Christian DOHRMANN, Halle, Ana KUZLE, Paderborn

Auf der Suche nach Grundvorstellungen zum Winkel

Winkelmessung und Trigonometrie spielen eine wichtige Rolle im Geometrieunterricht der Sekundarstufe und im Alltag. Untersuchungen zur Entwicklung und Ausbildung des Winkelbegriffs zeigen, dass Schüler Schwierigkeiten beim Verständnis von Winkeln und im Denken haben. SchülerInnen besitzen keine adäquaten Vorstellungen zu Winkelgrößen und Winkelkonzepten (Krainer, 1989; Mitchelmore & White 2000). In einer eigenen Studie wurden ca. 300 SchülerInnen der Klassenstufen 5 bis 10 hinsichtlich ihrer allgemeinen Grundkenntnisse zum Thema Winkel und speziell zur ihren individuellen mathematischen Vorstellungen zur Winkelgröße 1° untersucht. Dabei konnten fundamentale Probleme auf Verständnis- und Vorstellungsebene identifiziert werden.

Über Vorstellungen und Begriffsbildung zum Winkel

Die systematische Begriffsentwicklung zum Winkel erfolgt in Deutschland nach dem Grundschulübergang. In der Grundschule lernen die SchülerInnen den rechten Winkel kennen, zu zeichnen, zu markieren und zu identifizieren. Ausgehend von 5 Schuljahren nach Grundschulübergang, in denen die Entwicklung von Grundkenntnissen und Grundverständnis stattfindet, sollten SchülerInnen ein solides Wissen und Konzeptverständnis zum Winkelbegriff besitzen. Dazu gehört das Identifizieren, Markieren, Vergleichen, Bezeichnen, Schätzen, Messen, Zeichnen von Winkeln und Winkelgrößen in der Ebene, Kenntnis über Winkelarten mit entsprechend ausgebildeter Fähigkeit, Winkel der Ebene korrekt zu klassifizieren. Ein interessanter Zusammenhang lies sich in unserer Untersuchung zum Identifizieren und Markieren von Winkeln feststellen. So konnten wir häufiger beobachten, dass SchülerInnen einen für sie plausiblen Zusammenhang zwischen der Existenz eines Winkels und der Winkelmarkierung sehen. Die SchülerInnen sind es gewohnt, dass Winkelmarkierungen durch einen Kreisbogen repräsentiert werden. In ihrer Vorstellung begrenzt der Kreisbogen den Winkel zwischen den beiden Schenkeln. Auf die Nachfrage, wo die SchülerInnen anhand dieser Darstellung den eingeschlossenen Winkel erkennen würden, deuteten nicht wenige auf den „vorderen, spitzen“ Abschnitt.

Dieses Beispiel macht bereits deutlich, dass hier ein Problem zwischen einem mathematischen Konzept und der verwendeten Repräsentation existiert. Ein wesentlicher Grund für diese Art von Problemen besteht durch den Fakt, dass mathematische Konzepte und Symbole von SchülerInnen häufig mit einer anderen Bedeutung bzw. Vorstellung verknüpft werden

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 301–304). Münster: WTM-Verlag

und diese sich fundamental von der normativen Bedeutung unterscheidet. Das Verständnis bzw. die Vorstellung der SchülerInnen weicht von dem vom Lehrer zu vermittelnden Verständnis ab (vom Hofe, 1998).

Um diesem Problem entgegenzuwirken, soll es den SchülerInnen ermöglicht werden, zu bestimmten mathematischen Konzepten passende „mentale Modelle“ zu entwickeln. Diese Modelle bzw. Grundvorstellungen können interpretiert werden als „Elemente des Übergangs zwischen mathematischer und individueller Welt des Denkens “ (vom Hofe, 1998, S. 320). Grundvorstellungen können nicht direkt beobachtet werden. Sie Entwickeln sich in einem konstruktiven, individuellen Prozess, der sich aus drei Aspekten konstituiert; dem *normativen* Aspekt (Grundidee), dem *deskriptiven* Aspekt (individuelle Vorstellung) und dem *konstruktiven* Aspekt (Brücke zwischen Grundidee und individueller Vorstellung).

Die *normativen Ideen* repräsentieren den mathematischen Kern. Beispielsweise kann eine Grundidee von einem 1° Winkel als „Öffnungsweite“ zwischen zwei Strahlen aufgefasst werden, welche dem 360. Teil des Kreisumfangs eines Vollkreises entspricht. Die Öffnungsweite eines 1° Winkels ist dabei so klein, dass sich die beiden Strahlen auf Papier nur sehr schwer voneinander unterscheiden lassen. Erst in einiger Entfernung vom Scheitelpunkt wird der Unterschied erkennbar. Aus Elemente der Mathematik, 2007 (G8): Der Winkel α (Abb. 1) hat die Größe 34°. Das bedeutet: Der Winkel α ist so groß, wie 34 Winkel von 1° zusammen ergeben. 34° ist ein Maß für die Öffnungsweite des Winkels.

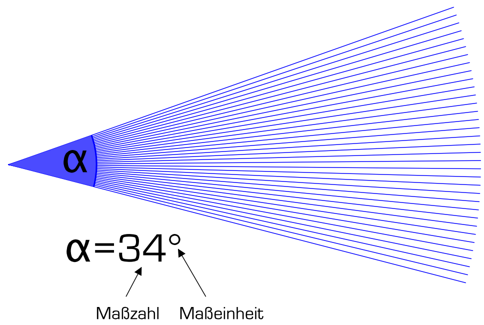


Abbildung 1: Winkel als Öffnungsweite

Der *deskriptive* Aspekt setzt den Fokus darauf, die aktuellen mathematischen Ideen und Vorstellungen der SchülerInnen zu beschreiben, welche mehr oder weniger von den zu vermittelnden mathematischen Ideen abweichen. Deshalb ist es im Lehr-Lern Kontext wichtig, dass der Lehrer eine adäquate Grundidee (normativ) vom 1° Winkel vermitteln kann und die SchülerInnen keine von der Grundidee losgelöste Vorstellung entwickeln, wie die, den 1° Winkel als Abstand (im euklidischen Sinne) zwischen zwei Strahlen zu verstehen, oder ihn lediglich durch „Spitze“ und „Winkelmarkierung“ zu identifizieren, wie eingangs dargestellt.

Die dritte Perspektive (*konstruktiver* Aspekt) setzt den Fokus auf die Weiterentwicklung bereits vorhandener Schülervorstellungen, indem die SchülerInnen mit neuen Lernsituationen konfrontiert werden, die es ihnen erlauben, ihre individuellen Vorstellungen zu ändern, neu aufzubauen und zu verfeinern.

Untersuchung zu Schülervorstellungen zur Winkelgröße 1°

Unsere Untersuchung wurde an einem Montessori-Gymnasium in Sachsen durchgeführt. Für den ersten Teil der Untersuchung kam ein schriftliches Testinstrument für ca. 300 SchülerInnen der Klassenstufen 5 bis 10 zum Einsatz. Die Testitems wurden in Anlehnung an den sächsischen Lehrplan entwickelt. Der Fokus lag dabei auf zwei Aspekten: (1) Abfrage von innermathematischem Wissen zu stufenspezifischen, als auch stufenübergreifenden Winkel-Inhalten, sowie (2) Denkmustern und Vorstellungen zu Winkelkonzepten. Zudem nutzten wir mit dem „Anna-Brief" (basierend auf einer Idee von von Prof. Dr. Thomas Jahnke) ein spezielles Item, um auf qualitativer Ebene Einsichten in die individuellen Denkmuster und Vorstellungen der SchülerInnen zur Winkelgröße 1° zu gewinnen.

Die Analyse der Anna-Brief Antworten zeigte ein sehr breites Spektrum an Vorstellungen zur Winkelgröße 1°. Zur Kategorisierung der Vorstellungen nutzten wir induktive und deduktive Methoden. Die „Abstands-Vorstellung" konnten wir so ca. 10% der SchülerInnen (über allen untersuchten Klassenstufen hinweg) zuordnen. Diese Vorstellung wurde immer dann zugewiesen, wenn in den verbalen Beschreibungen das Wort „Abstand" im Zusammenhang mit der euklidischen Abstandsmessung verwendet wurde (Beispiel: „1° = 1mm", oder „1° entspricht dem Abstand zwischen zwei Strahlen"). Um diese Erklärungen zu bestätigen und ein besseres Verständnis für die individuelle Abstands-Vorstellung zu gewinnen, wurden 9 SchülerInnen zusätzlich zum Test interviewt (zweiter Teil der Untersuchung). Im Interview wurden die SchülerInnen aufgefordert, den Anna-Brief zunächst verbal ohne Vorlage ihrer Lösung noch einmal zu beantworten. Anschließend wurde ein Anna-Video vorgeführt, in dem ein junges Mädchen (Anna, ca. 13 Jahre alt) beim Messen eines 1° Winkels beobachtet werden konnte.

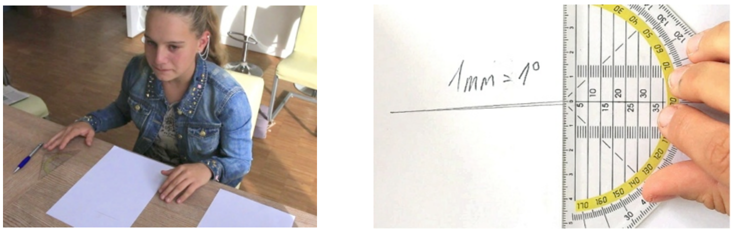


Abbildung 2: Anna-Video

Im Video benutzt Anna eine Messmethode, bei der der Abstand mit Hilfe der beiden Schenkelenden zunächst mit dem Lineal am Geodreieck bestimmt und anschließend als Winkel gedeutet wird („1mm Abstand bedeutet 1°“). Den SchülerInnen wurde vor dem Abspielen des Videos gesagt, dass Anna diese Methode aufgrund ihrer Anna-Brief Antwort angewendet hat. Sie wurden anschließend dazu aufgefordert, das Gesehene zu kommentieren. Uns interessierte dabei, wie die SchülerInnen damit umgehen, wenn sie mit der Idee von Anna konfrontiert werden, welche implizit ihre eigene Idee aufgreift. Die Analyse der Interview-Antworten und Anna-Video Reaktionen wurde mit Hilfe der Conceptual Change Theorie (Posner et al., 1982) durchgeführt. Dabei konnte herausgestellt werden, ob die SchülerInnen das Gezeigte bspw. grundsätzlich ablehnen, oder es mit ihrem Verständnis übereinbringen und für plausibel oder als mathematisch korrekte Möglichkeit erachten. Interessanterweise lehnten nur 3 der 9 SchülerInnen die gezeigte Methode grundsätzlich ab. 2 SchülerInnen nahmen die Methode widerstandslos als korrekt an, 4 betrachteten sie als alternative Methode, da ihnen keine mathematische Gegenargumentation möglich war. Darüber hinaus konnten bereits durch den Test identifizierte kritische Schülervorstellungen weiter bestätigt werden, wie die Identifikation des Winkels durch Fixierung auf die Winkelmarkierung, oder die Bestimmung der Winkelgröße durch Fixierung auf den Abstands-Begriff.

Fazit

Die hier dargestellten Ergebnisse zeigen, dass die SchülerInnen heterogene und vom normativen Verständnis kritisch abweichende Vorstellungen zu Winkelgröße- und -konzepten besitzen. Die Begriffsentwicklung von Klasse 5 bis 10 zum Thema Winkel erzeugt nach wie vor große Schwierigkeiten im Denken. Als Konsequenz ist es den SchülerInnen nicht möglich, die Bedeutung eines 1° Winkels zu begreifen, sowie ihn mathematisch korrekt zu beschreiben und zu identifizieren. Verschiedene Fehlvorstellungen behindern den Aufbau adäquater Begriffsvorstellungen.

Literatur

Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie: Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes*. Frankfurt a.M: Peter Lang.

Mitchelmore, M. C. & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 209–238.

Posner, G., Strike, K.,. Hewson, P., & Gertzog, W. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education, 66*(2), 211–227.

vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: Normative, descriptive and constructive aspects. In J. Kilpatrick and A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (Vol. 2, pp. 317 – 331). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Ana DONEVSKA-TODOROVA, Berlin

Three Modes of Description and Thinking of Linear Algebra Concepts at Upper Secondary Education

Many researchers point out that appropriate combinations of concept's representations lead to improved students' learning outcomes and translations between different representations support conceptional understanding (Ainsworth et al., 1997; Panasuk & Beyranevand, 2010). Multiple representations are important for acquiring deeper knowledge about a domain (van der Meij & de Jong, 2006). It is well known that quick and correct calculations or apparently fluent procedural skills are not necessarily proceeded by conceptual understanding. Previous research reports that one of the indicators of conceptual understanding is "the capability for recognizing structurally the same connections posed via multiple representations" (Panasuk & Beyranevand, 2010, p. 2). How can translations across more representations of linear algebra concepts be supported to maximize students' learning outcomes and effectiveness of multiple-representational learning environments? The phenomenon of dynamic multiple representations in computer based learning environments in comparison with single static representations, single dynamic representations and multiple static representations offers the most opportunities and challenges (van der Meij & de Jong, 2006). Let us first explain multiple modes of descriptions, representations and thinking in linear algebra more in details.

1. Three Modes of Description and Thinking

The theoretical framework on multiple modes incloses three modes of description: geometric, algebraic and abstract (Hillel, 2000) and three modes of thinking: synthetic-geometric, arithmetic and analytic-structural (Sierpinska, 2000) of linear algebra concepts. The three modes of thoughts in linear algebra (Dreyfus, Hillel & Sierpinska, 1998, p. 209) are as follows:

- The geometric language/ synthetic-geometric mode of thought refers to 2- and 3- space (points, lines, planes, directed line segments and geometric transformations).
- The arithmetic language/ analytic-arithmetic mode of thought refers to n-tuples, matrices, rank, solutions of systems of equations, etc.
- The algebraic language/ analytic-structural mode of thought refers to the general theory (vector spaces, subspaces, dimension, operators, kernels, etc.)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 305–308). Münster: WTM-Verlag

2. Exemplification of Multiple Modes of Description and Thinking of Vectors, Dot Product of Vectors and Determinants

This section offers examples of three modes of description and thinking of the concepts: vectors, dot product of vectors and determinants.

Example 1. Vectors.

- *Geometric language/ synthetic-geometric mode of thought:* Vectors are classes of parallel, same directed and equal in length arrows.
- *Arithmetic language/ analytic-arithmetic mode of thought:* Vectors are n-tuples.
- *Algebraic language/ analytic-structural mode of thought:* Vectors are elements of vector spaces.

Example 2. Dot Product of Vectors.

- *Geometric language/ synthetic-geometric mode of thought:* Dot product of vectors is the product of vectors' magnitudes and the co-sine of the angle between them.

  $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|cos\varphi$ or $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot(\pm|\vec{v}_{\vec{u}}|)=(\pm|\vec{u}_{\vec{v}}|)\cdot|\vec{v}|$
- *Arithmetic language/ analytic-arithmetic mode of thought:* Dot product of vectors is the sum of the products of corresponding vec-tors' components.

  $$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1 v_1+u_2 v_2+\ldots+u_n v_n=\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$
- *Algebraic language/ analytic-structural mode of thought:* Dot product of vectors is defined by three axioms for: bilinearity (addit-ive and homogeneity), symmetry and positivity.

Example 3. Determinants.

- *Geometric language/ synthetic-geometric mode of thought:* Determ-inants are oriented volumes (areas) of parallelepiped (parallelo-grams) spanned by vectors.
- *Arithmetic language/ analytic-arithmetic mode of thought:* Determin-ants are sums of permutations:

  $$A=(a_{ij})_{i,j}\in K^{n\times n}, det(A)=\sum_{\pi\in\sigma_n} sgn\pi\cdot\alpha_{\pi(1),1}\cdot\ldots\cdot\alpha_{\pi(n),n}$$

- *Algebraic language/ analytic-structural mode of thought:* Determinants are functions satisfying three axioms: multilinearity, norm and two equal rows in a matrix, give zero value to its determinant.

As a note, it is worth mentioning that another choice of the axioms in the last mode is possible, but is equivalent to the offered one.

The growth in cognition required for students' absorbing particular mode of description and thinking is in close relation to the appropriate level of education. This development is illustrated in the following Table 1.

Level of education	*Vectors*	*Dot product of vectors*	*Determinants*	*Modes of description/ thinking*
Lower secondary	Vector quantities	/	/	Geometric/ Synthetic-geometric
Upper secondary	Classes of arrows	•Vectors' magnitudes and angle's cosine •Vectors' projections	Oriented areas of parallelograms/ volumes of parallelepiped	Geometric/ Synthetic-geometric
	n-tuples (ordered pairs/ triples)	Vectors' components	Arithmetic calculations	Algebraic/ Arithmetic
University and further	Elements of vector spaces	Axioms	Axioms	Abstract/ Analytic-structural

Table 1. Three Modes of Description and Thinking of Linear Algebra Concepts through the Levels of Education

The above Table 1 shows that each stage in the growth in cognition does not replace previous modes of description and thinking, but aims to integrate the existing modes with the new, through establishing connections. This process is not trivial as it may seem on the first appearance. On the contrary, it deserves a lot of attention. The primary aim at upper secondary level of education is to support the recognition, translation and utilization of multiple modes of reasoning in linear algebra and analytic geometry.

3. Proposal for Supporting Multiple Modes of Description and Thinking in a Dynamic Geometry Environment (DGE)

The question that arises now is, whether the analytic-structural mode of description and though can be brought into context closer to upper high school students and how can the gap in transition be overcome. This article suggests that it can be done to a certain extent with the aid of DGE. Such proposals are offered in (Filler, Donevska-Todorova, 2012) for the concepts of vectors and in (Donevksa-Todorova, 2012a; 2012b) for the concepts of determinants. These proposals support connections between geometric and algebraic modes of description, and moreover give exemplary dynamic applets for teaching and learning of properties which construct concepts' axiomatic definitions. Students' performance (investigations, conjectures and proves) and competences for translating among all three modes of description and thinking in such designed DGE could be analyzed through the instrumental orchestration interpretative theoretical framework (Drijvers et al., 2010).

References

Donevska-Todorova, A. (2012a). Connections between Secondary and Tertiary Curricula for Linear Algebra and Analytic Geometry with Focus on the Concept of a Determinant – Proposal with Technology Support. *Vernetzungen und Adwendungen im Geometrieunterricht, Ziele und Visionen 2020*. Franzbecker, 109-120.

Donevska-Todorova, A. (2012b). Developing the Concept of Determinants using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics & Technology, 6*(1).

Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1998). Cabri-based linear algebra: transformations. *European Research in Mathematics Education I*, 209-221.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 213-234.

Filler, A., Donevska-Todorova, A. (2012). Der Vektorbegriff. Verschiedene Wege zu seiner Einführung. In: *Mathematik Lehren* 172, 6, S. 47-51.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Springer Netherlands.

Panasuk, R. M., & Beyranevand, M. L. (2010). ALGEBRA STUDENTS'ABILITY TO RECOGNIZE MULTIPLE REPRESENTATIONS AND ACHIEVEMENT. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer Netherlands.

Van Der Meij, J., & De Jong, T. (2006). Progression in Multiple Representations: Supporting students' learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. In *Proceedings of the EARLI SIG meeting on Comprehension of Texts and Graphics*.

Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Der Umgang mit Repräsentationen im Mathematik-unterricht – kriterienbasiertes Noticing und Sichtweisen von Lehrkräften

Noticing (vgl. van Es & Sherin, 2002) umfasst neben dem Bemerken von bestimmten Geschehnissen im Mathematikunterricht auch das Beurteilen und Reflektieren dieser unter Rückgriff auf entsprechende professionelle Wissenskomponenten und Sichtweisen. Schoenfeld (2011) hat in seinem Meta-Artikel über Studien zu „Mathematics Teacher Noticing" deshalb dazu aufgefordert, Zusammenhänge zwischen Noticing einerseits und Sichtweisen und Wissen von Mathematiklehrkräften andererseits zu untersuchen. Diese Studie fokussiert dementsprechend auf so genanntes fachdidaktisch-kriterienbasiertes Noticing und untersucht außerdem Zusammenhänge mit entsprechenden Sichtweisen von Lehrkräften. Als fachdidaktischer Bezugsrahmen für dieses Noticing wurde der Umgang mit vielfältigen Repräsentationen gewählt, denn diese sind nicht nur zentral für das Gestalten von Lerngelegenheiten (vgl. Kuntze et al., 2011), sondern sie spielen eine Doppelrolle für das Lernen von Mathematik: Einerseits ist der flexible Umgang mit verschiedenen Repräsentationen für ein mathematisches Objekt entscheidend für mathematischen Kompetenzaufbau (z.B. Lesh, Post & Behr 1987; Acevedo Nistal et al 2009), andererseits können aber Repräsentationswechsel auch das Verständnis von Lernenden behindern, vor allem, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht dabei unterstützt werden, Zusammenhänge zwischen diesen Repräsentationen herzustellen (Ainsworth 2006; Renkl et al 2013; Duval, 2006). Am Beispiel des Inhaltsbereichs „Brüche", auf den sich die inhalts- und situationsspezifischen Erhebungsteile der Studie konzentrieren, wurde vor diesem Hintergrund untersucht, inwiefern Lehrkräfte in situationsbezogenem Noticing fachdidaktische Analysekriterien bezüglich des Umgangs mit Repräsentationen nutzten. Da Noticing häufig als eine Charakteristik von Experten-Lehrkräften beschrieben wird (z.B. Berliner 1994), nimmt diese Studie sowohl angehende als auch praktizierende Lehrkräfte in den Blick, um fachdidaktisch-kriterienbasiertes Noticing und Zusammenhänge mit Sichtweisen auch in Bezug auf spezifische Unterschiede zwischen Experten und Novizen zu untersuchen.

Die Studie konzentriert sich daher auf die folgenden Forschungsfragen:

- Erkennen angehende und praktizierende Lehrkräfte die potentiell hinderliche Rolle von inhaltlich nicht notwendigen Repräsentations-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 309–312). Münster: WTM-Verlag

wechseln für das Verständnis von Lernenden in spezifischen Unterrichtssituationen?

- Können Zusammenhänge zwischen solchem fachdidaktisch-kriterienbasierten Noticing und Sichtweisen bezüglich des Nutzens vielfältiger Repräsentationen festgestellt werden?

Untersuchungsdesign und Stichprobe

Das fachdidaktisch-kriterienbasierte Noticing wurde mit Hilfe eines vignettenbasierten Designs erhoben. Den teilnehmenden Mathematiklehrkräften (67 angehende und 77 praktizierende Gymnasiallehrkräfte aus Baden-Württemberg) wurden Transkripte von fiktiven Unterrichtssituationen zum Thema Brüche vorgelegt, in denen jeweils ein aus fachdidaktischer Sicht für das Verständnis der Lernenden potentiell hinderlicher und inhaltlich nicht notwendiger Darstellungswechsel durchgeführt wird. Es wurde jeweils dazu aufgefordert den Umgang mit Repräsentationen mit Blick auf das Verständnis der Lernenden begründet zu beurteilen. Die Antworten wurden von zwei Ratern mit hoher Inter-Rater-Reliabilität im Hinblick auf fachdidaktisch-kriterienbasiertes Noticing nach einem Top-Down-Verfahren kodiert: Dabei wurde zum einen kodiert, ob der Darstellungswechsel als solcher erkannt wurde und zum anderen, ob dieser kritisch reflektiert wurde. Traf beides zu, so wurde in Bezug auf die jeweilige Vignette spezifisches Noticing bescheinigt. Auf dieser Basis wurde über den gesamten Testteil hinweg ein entsprechender Score berechnet.

Sichtweisen zur Rolle von vielfältigen Repräsentationen für mathematisches Lernen wurden sowohl global im Sinne von Gründen für das Nutzen verschiedener Repräsentationen als auch inhaltsbereichsspezifisch im Hinblick auf den Bruchrechenunterricht mithilfe eines bereits bestehenden Fragebogeninstruments im Multiple-Choice-Format erhoben (vgl. Dreher, Nowinska & Kuntze, 2013; Dreher & Kuntze 2013). Zusammenhänge entsprechend der zweiten Forschungsfrage wurden zum einen mit Blick auf Korrelationen zwischen Skalen zu Sichtweisen und dem Score für kriterienbasiertes Noticing untersucht, zum anderen aber auch durch qualitative Analysen aus Antworten der Lehrkräfte extrahiert, um explorativ zu analysieren, auf welches professionelle Wissen bzw. Sichtweisen die Lehrkräfte bei ihrem Noticing zurückgriffen.

Ausgewählte Ergebnisse

Abbildung 1 zeigt die Mittelwerte und deren Standardfehler für den Score für fachdidaktisch-kriterienbasiertes Noticing für die angehenden und die praktizierenden Lehrkräfte im Vergleich. Dabei zeigt sich einerseits, dass die potentiell hinderliche Rolle von Repräsentationswechseln in spezifischen Unterrichtssituationen relativ selten erkannt wurde. Andererseits konnte solches fachdidaktisch-kriterienbasiertes Noticing signifikant häufiger bei praktizierenden als bei angehenden Lehrkräften festgestellt werden.

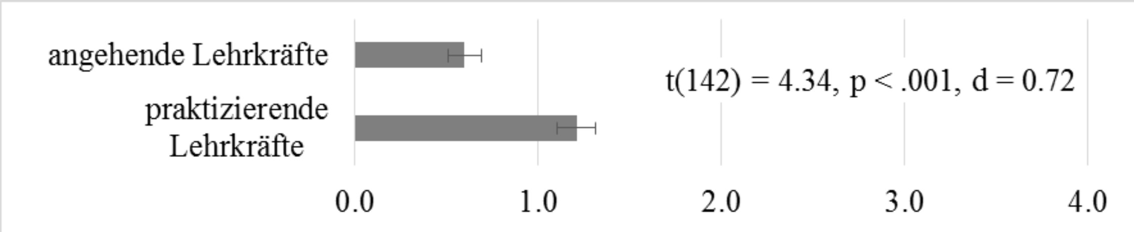


Abbildung 1: Durchschnittliche Anzahl der Antworten (von vier), die fachdidaktisch kriterienbasiertes Noticing erkennen lassen.

Für die praktizierenden Lehrkräfte zeigte sich außerdem eine signifikant positive Korrelation von fachdidaktisch-kriterienbasiertem Noticing mit der Bedeutung, die dem Fördern von Darstellungswechseln für die Entwicklung mathematischen Verständnisses im Allgemeinen beigemessen wurde ($r = .32$, $p < .01$), während kein solcher Zusammenhang für die angehenden Lehrkräfte festzustellen war.

Die ergänzende qualitative Analyse von Antworten im Hinblick Zusammenhänge von kriterienbasiertem Noticing und Komponenten von professionellem Wissen und Sichtweisen ergab insbesondere, dass der Rückgriff auf solche Komponenten auf dem vollen Spektrum verschiedener Globalitätsebenen bei solchem Noticing genutzt werden konnte (Dreher & Kuntze, eingereicht).

Diskussion

Der Befund, dass bei den praktizierenden Lehrkräften erfolgreiches fachdidaktisch-kriterienbasiertes Noticing ca. doppelt so häufig war wie bei den angehenden Lehrkräften kann als eine quantitative Bestätigung für die Relevanz von Noticing für die Charakterisierung von Expertenlehrkräften angesehen werden. Stärkere Zusammenhänge zwischen spezifischem Noticing und Sichtweisen bei den untersuchten praktizierenden Lehrkräften sprechen für eine höhere Kohärenz in deren professionellem Wissen.

Die Tatsache, dass die beobachteten Zusammenhänge nicht besonders stark ausgrprägt sind, lässt sich vor dem Hintergrund der Ergebnisse der qualitativen Analyse dahingehend deuten, dass es keinen einfachen Zusammenhang zwischen erfolgreichem fachdidaktisch-kriterienbasiertes Noticing und einer einzigen Komponente professionellen Wissens gibt, sondern dass verschiedene solche Komponenten solches Noticing unterstützen können.

Inwiefern diese Beobachtungen zu fachdidaktisch-kriterienbasiertem Noticing angesichts der Komplexität realer Unterrichtssituationen auch in videobasierten Untersuchungsformaten bestätigt werden können, sollte in diesbezüglichen Folgestudien ausgelotet werden.

Literatur

Acevedo Nistal, A., van Dooren, W., Clareboot, G., Elen, J. & Verschaffel, L. (2009). Con-ceptualising, Investigating and Stimulating Representational Flexibility in Mathematical Problem Solving and Learning: a Critical Review. In: ZDM the international journal on mathematics education, 41(5), 627-636.

Ainsworth, S. (2006). A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16, 183-198.

Berliner, D.C. (1994). Expertise: The wonder of exemplary performances. In J.M. Mangier & C. C. Block (Hrsg.*), Creating powerful thinking in teachers and students: Diverse perspectives* (161–186). Fort Worth, Texas: Holt, Rinehart & Winston.

Dreher, A. & Kuntze, S. (2013). Pre-service and in-service teachers' views on the learning potential of tasks – Does specific content knowledge matter? Proceedings of CERME 8, Antalya, Turkey.

Dreher, A., Nowinska, E. & Kuntze, S. (2013). Awareness of dealing with multiple representations in the mathematics classroom – a study with teachers in Poland and Germany. In: A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg), Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2. Kiel, Germany: PME, 249-256.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61, 103–131.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H.-S. Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics – An empirical study with pre-service teachers. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Hrsg.), Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 2717-2726. Rzeszow, Poland: University

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 33–40. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Renkl, A., Berthold, K., Große, C. S., & Schwonke, R. (2013). Making better use of multiple representations: How fostering metacognition can help. In R. Azevedo & V. Aleven (Hrsg.), International handbook of metacognition and learning technologies. New York, NY: Springer.

Schoenfeld, A. H. (2011). Noticing matters. A lot. Now what? In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Hrsg.), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes, 223–238. New York: Routledge.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. Journal of Technology and Teacher Education, 10(4), 571-596.

Christina DRÜKE-NOE, Kassel

Empirische Untersuchungen zur Aufgabenkultur in Klassenarbeiten neunter und zehnter Klassen im Fach Mathematik

Klassenarbeiten sind ein zentrales Instrument der schulinternen Leistungsüberprüfung (u.a. Ingenkamp & Lissmann, 2008), mit dem u.a. die fachliche Leistung sowie die Erreichung von Unterrichtszielen erfasst werden sollen. Angesichts der anerkannten Wechselwirkung zwischen Unterricht und Klassenarbeiten (u.a. Jordan et al., 2006) – Sacher (2009) spricht Klassenarbeiten sogar einen Abbildcharakter zu – überrascht es, dass es bislang kaum Literatur zu Klassenarbeiten gibt – speziell zu deren Konzeption.

Zu den Einflussgrößen auf die Aufgabenauswahl für Klassenarbeiten gehören der Lehrplan sowie schulrechtlichen Vorgaben und insbesondere das Schulbuch (u.a. Sträßer, 2008). Ebenfalls Einfluss nehmen „die Inhalte der letzten sechs Wochen“, Unterrichtsziele, lerntheoretische Orientierungen der Lehrkräfte (u.a. Neubrand, 2002) sowie Aufgaben zentral gestellter Abschlussprüfungen (u.a. Kühn, 2010).

1. Aufgabenkultur im Unterricht und in Klassenarbeiten

In der fachdidaktischen Literatur wird die Aufgabenkultur des Mathematikunterrichts weitgehend übereinstimmend eingeschätzt: Die eingesetzten Aufgaben sind kognitiv anregungsarm (u.a. Kunter & Baumert, 2011) und Routineaufgaben dominieren. Es sind vorwiegend Kalküle, speziell in der Algebra, abzuarbeiten (u.a. Schupp, 2002) und ein syntaktisches Operieren mit Termen überlagert den semantischen Umgang mit diesen (u.a. Hefendehl-Hebeker, 2004). In ähnlicher Weise werden Klassenarbeitsaufgaben charakterisiert, deren Bearbeitung ebenfalls nahezu nur formale Rechnungen verlangt (u.a. Kunter et al., 2006) und auf mechanisch lernbaren Kenntnissen aufbaut (u.a. Leuders, 2006). Gleichzeitig wird bei Klassenarbeitsaufgaben das Fehlen von Anwendungsbezügen sowie das Fehlen von Begründungen sowie von Reflexionen beklagt (Bruder & Weigand, 2001; Schupp, 2002). Insgesamt wird aus theoretischer Perspektive für Unterrichts- wie für Klassenarbeitsaufgaben gleichermaßen ein zu großer Stellenwert von Kalkülen kritisiert, wenngleich festzuhalten ist, dass empirische Belege für diese Einschätzung nicht durchweg gegeben sind.

Vor dem Hintergrund kaum vorhandener empirischer Untersuchungen und der gleichzeitig deutlichen Kritik an der Aufgabenkultur in Klassenarbeiten stellen sich verschiedene Fragen, von denen die Autorin u.a. die folgenden in ihrer Dissertation untersucht hat (vgl. Drüke-Noe, 2014):

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 313–316). Münster: WTM-Verlag

- Welche mathematischen Tätigkeiten sind auf welchen kognitiven Anspruchsniveaus bei der Bearbeitung von Klassenarbeitsaufgaben neunter und zehnter Klassen erforderlich?
- Welche Schulformspezifika lassen sich dabei auf Aufgaben- und auf Klassenebene identifizieren, speziell in der Bedeutung des Umgehens mit Kalkülen?

2. Datengrundlage und Methoden

Grundlage der hier dargestellten Ergebnisse sind die Klassenarbeitsaufgaben des für Deutschland repräsentativen COACTIV-Datensatzes, die in den Jahren 2003 und 2004 erhoben wurden (Klasse 9: 14744 Aufgaben, davon ca. 25 % gym; 259 Klassen, davon ca. 34 % gym; Klasse 10: 10863 Aufgaben, davon ca. 36 % gym; 202 Klassen, davon ca. 41 % gym).

Im Projekt COACTIV wurde jede Klassenarbeitsaufgabe – Analyseeinheit ist jeweils eine Teilaufgabe – anhand eines Klassifikationsschemas (vgl. Jordan et al., 2006) u.a. nach vier potentiell zur Bearbeitung erforderlichen Tätigkeiten klassifiziert: Außer- und Innermathematisches Modellieren, Mathematisches Argumentieren, Gebrauch von Darstellungen. Dabei wurde für jede Tätigkeit erfasst, ob diese nicht, auf niedrigem, auf mittlerem oder auf hohem kognitivem Anspruchsniveau erforderlich ist. Ergänzend wurde Technisches Arbeiten als diejenige Tätigkeit operationalisiert, die niveauspezifisch auf ebenfalls vier Niveaus das Umgehen mit unterschiedlich komplexen Kalkülen erfasst (vgl. Drüke-Noe, 2012 & 2014).

Für die Analysen auf Klassenebene wurden alle Klassenarbeitsaufgaben, die eine Klasse im Verlauf eines Schuljahres geschrieben hat, zu einer sog. Jahresklassenarbeit zusammengefasst, die für diese Untersuchungen die Analyseeinheit bildet (vgl. Drüke-Noe, 2011 & 2014).

3. Ergebnisse

Jahrgangsstufe/ Schulform	*Außermath. Modellieren*	*Innermath. Modellieren*	*Mathematisches Argumentieren*	*Gebrauch von Darstellungen*	*Technisches Arbeiten*
9 gym	8,3 %	34,1 %	9,2 %	18,5 %	93,5 %
9 nicht-gym	17,6 %	18,5 %	1,7 %	20,1 %	96,7 %
10 gym	20,8 %	28,3 %	6,5 %	21,5 %	97,5 %
10 nicht-gym	23,8 %	25,3 %	2,4 %	30,9 %	98,2 %

Die Ergebnisse auf Aufgabenebene zeigen, dass in beiden Schulformen in beiden Jahrgangsstufen nur (sehr) geringe Anteile von Aufgaben Außer- bzw. Innermathematisches Modellieren, Argumentieren sowie den Gebrauch von Darstellungen überhaupt erfordern (vgl. Tabelle). Der kognitive Anspruch beschränkt sich dabei meist auf Standardaktivitäten (niedriges Niveau). Hingegen ist kaum eine Aufgabe ohne Technisches Arbeiten, d.h. ohne ein Umgehen mit unterschiedlich komplexen Kalkülen, zu lösen.

In beiden Jahrgangsstufen zeigen sich erwartungskonforme Schulformunterschiede: Aufgaben gymnasialer Klassen verlangen im Vergleich zu Aufgaben nicht-gymnasialer Klassen anteilig häufiger Inner- als Außermathematisches Modellieren. Aufgaben, die Argumentationen erfordern, werden in beiden Schulformen nur (sehr) selten gestellt und in gymnasialen Klassen geringfügig häufiger als in nicht-gymnasialen Klassen. Der Gebrauch von Darstellungen ist in Aufgaben beider Schulformen erkennbar häufig erforderlich (in gymnasialen Klassen anteilig etwas häufiger). Nahezu übereinstimmend erweist sich jedoch in beiden Schulformen Technisches Arbeiten als *die* zentrale Tätigkeit.

Auch die Untersuchungsergebnisse auf Klassenebene belegen für beide Schulformen die hohe Bedeutung des Umgehens mit Kalkülen. Speziell in Jahresklassenarbeiten mit insgesamt nur (sehr) niedrigem kognitivem Anspruch definiert dieser sich sogar nahezu ausschließlich über das Technische Arbeiten. Erst mit zunehmendem kognitivem Anspruch sind auch weitere Tätigkeiten erforderlich, deren Anspruch sich allerdings weitgehend auf Standardaktivitäten beschränkt. Lediglich die – nur relativ gesehen – anspruchsvollsten Jahresklassenklassenarbeiten dieses Datensatzes verlangen zu geringen Anteilen Tätigkeiten auf mittlerem Niveau und somit mehrschrittige Aktivitäten; komplexe Aktivitäten oder gar Reflexionen fehlen auch hier. Bei insgesamt nur geringen Schulformunterschieden auf Klassenebene erweist sich der Anspruch an das Umgehen mit unterschiedlich komplexen Kalkülen als zentraler Schulformunterschied.

4. Ausblick

Diese Befunde belegen die in der Literatur beschriebene Dominanz von Kalkülen; sie werfen aber auch die Frage auf, inwieweit ein solches Spektrum von Aufgaben geeignet ist, fachliche Leistungen umfassend zu erheben und die Erreichung von Unterrichtszielen – deren umfassende Realisierung im Unterricht vorausgesetzt – zu überprüfen. Zudem stellt sich die Frage nach Gründen für eine derartige Aufgabenkultur, deren Untersuchung Gegenstand weiterer Forschung sein sollte.

Literatur

Bruder, R. & Weigand, H.-G. (2001). Leistungen bewerten - natürlich! Aber wie? mathematik lehren, 107, 4-8.

Drüke-Noe, C. (2011). Alle sechs Wochen eine andere Klassenarbeit - oder doch nicht? Beiträge zum Mathematikunterricht, 1, 211-214.

Drüke-Noe, C. (2012). Wer Kalküle kann, schafft eine Klassenarbeit. Stimmt das? Beiträge zum Mathematikunterricht, 1, 213-216.

Drüke-Noe, C. (2014). Aufgabenkultur in Klassenarbeiten im Fach Mathematik. Empirische Untersuchungen in neunten und zehnten Klassen Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Hefendehl-Hebeker, L. (2004). Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. Duisburg: Universität Duisburg-Essen.

Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2008). Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik (6. Aufl.). Weinheim: Beltz Verlag.

Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M. & Kunter, M. (2006). Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Kühn, S. M. (2010). Steuerung und Innovation durch Abschlussprüfungen? . Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Kunter, M., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Löwen, K., Neubrand, M. & Tsai, Y.-M. (2006). Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In P.-K. Deutschland (Hrsg.), PISA 2003. Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres (S. 161-194). Münster: Waxmann.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Münster: Waxmann.

Leuders, T. (2006). "Erläutere an einem Beispiel ..." Mathematische Kompetenzen erkennen und fördern - mit offenen Aufgaben. Friedrich Jahresheft 2006, 78-83.

Neubrand, J. (2002). Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Sacher, W. (2009). Leistungen entwickeln, überprüfen und beurteilen. Bewährte und neue Wege für die Primar- und Sekundarstufe (5. Aufl.). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Schupp, H. (2002). Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Sträßer, R. (2008). Das Mathematikbuch als Instrument des Lehrens. Beiträge zum Mathematikunterricht, 225-228.

Simone DUNEKACKE, Lars JENßEN, Marianne GRASSMANN, Sigrid BLÖMEKE, Berlin

Prognostische Validität mathematikdidaktischen Wissens angehender Erzieher/-innen – Studiendesign und Datengrundlage

Erzieher/-innen sollen auch Lernprozesse im Bereich der Mathematik begleiten (van Oers, 2009), da diese von Bedeutung für das aktuelle und spätere Mathematiklernen der Kinder sind (Krajewski & Schneider, 2009). Welche Kompetenzen die Erzieher/-innen hierfür benötigen, ob sie diese im Rahmen ihrer Ausbildung erwerben und wie sich diese entwickeln ist bislang kaum Gegenstand der Forschung (Fried & Roux, 2009; National Advisory Panel, 2008). An dieser Stelle setzt das Projekt KomMa[1] an, das vom BMBF im Rahmen der Förderinitiative KoKoHs[2] gefördert wird und Kompetenzstruktur, -niveau und -entwicklung angehender frühpädagogischer Fachkräfte untersucht.

1. Validität eines Leistungstest zur Erfassung des mathematikdidaktischen Wissens

Im Rahmen des Projekts KomMa wurde ein Leistungstest entwickelt, welcher u.a. das mathematikdidaktische Wissen angehender frühpädagogischer Fachkräfte erfassen soll (Dunekacke et al., 2013). Dem Test liegt ein Kompetenzstrukturmodell zu Grunde, welches auf den Überlegungen von Shulman (1986) beruht, wonach professionelles Wissen von Lehrkräften sich aus deren Fach-, fachdidaktischem - und allgemeinpädagogischem Wissen zusammensetzt und welches auch für frühpädagogische Fachkräfte angenommen wird (Anders, 2012). Der Test besteht aus 36 Items die im Multiple Choice bzw. offenem Format gestellt sind.

Neben anderen Gütekriterien wie der Objektivität oder der Reliabilität kommt dem Nachweis der Validität besondere Bedeutung zu, da ohne diese nicht sichergestellt werden kann, dass der Test tatsächlich das erfasst, was er erfassen soll (Hartig, Frey & Jude, 2012, S. 136).

Im Rahmen eines Expertenratings wurde bereits die Inhaltsvalidität des Tests nachgewiesen (Jenßen, Dunekacke & Blömeke, under revision). Teil

[1] KomMa – Struktur, Niveau und Entwicklung professioneller Kompetenz von Erzieher/-innen im Bereich Mathematik (FKZ: 01PK11002A)

[2] KoKoHs – Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 317–320). Münster: WTM-Verlag

des hier nur in Auszügen beschriebenen Promotionsvorhabens ist es, Belege für die Kriteriumsvalidität des Tests zu finden. Mit der Kriteriumsvalidität wird belegt, inwieweit die Testwerte mit Kriterien außerhalb der Testsituation, wie beispielsweise den Fähigkeiten oder dem Verhalten zusammenhängen (Hartig, Frey & Jude, 2012, S. 155). Dabei sind zwischen der Übereinstimmungs- und der prognostischen Validität zu unterscheiden (ebd., S. 157). Die hier vorgestellte Studie kann dabei der prognostischen Validität zugeordnet werden. Bei der prognostischen Validität liegt das Außenkriterium zum Nachweis der Validität in der Zukunft (ebd.).

2. Auswahl und Erhebung des Außenkriteriums zum Nachweis der Validität

Als Außenkriterium wird hier die Fähigkeit der angehenden Erzieher/-innen zur Handlungsplanung eingesetzt. Handlungsplanung wird in verschiedenen Handlungsmodellen als bedeutsame Vorstufe der eigentlichen Handlung gesehen (Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann & Pietsch, 2011, S. 17; Widulle, 2009, S. 19; Wild & Krapp, 2001, S. 519). Der Prozess der Handlungsplanung ist einer nachträglichen Rekonstruktion durch die Akteure zugänglich (Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann & Pietsch, 2011, S. 18).

Das Außenkriterium wird mit einem videobasierten Fragebogen erhoben. Die Videos zeigen reale Situationen einer Kindertagesstätte und wurden durch eine Expertenbefragung ausgewählt (Dunekacke, under revision). Dabei bearbeiten die Teilnehmer/-innen zu jedem Video vier offene Items, bei denen Sie beschreiben sollen, wie sie in dieser Situation handeln würden, bzw. wie sie das Thema auch in den nächsten Tagen aufgreifen würden. Neben der Handlungsplanung wird mit dem Fragebogen auch noch die mathematikbezogene Situationswahrnehmung (Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann & Pietsch, 2011, S. 18) erfasst, bei dem die Teilnehmer/-innen drei mathematikdidaktisch relevante Merkmale der Situation wiedergeben sollen.

3. Forschungsfragen

Der entwickelte Leistungstest kann als prognostisch valide gelten, wenn er einen Effekt, möglicherweise auch einen indirekten Effekt, auf das Außenkriterium hat (Cronbach & Meehl, 1955). Deswegen werden in der Studie zwei Modelle miteinander verglichen. Im ersten wird sowohl ein direkter Effekt des mathematikdidaktischen Wissens auf die Handlungsplanung als auch ein indirekter Effekt, vermittelt über die Situationswahrnehmung angenommen (Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann & Pietsch, 2011, S. 17). Im zweiten Modell wird nur der indirekter Effekt des mathematikdidaktischen Wissens auf die Handlungsplanung angenommen (Thonhauser, 2007).

3. Forschungsdesign und Stichprobe

Grundlage für die Analysen sind Daten von n=354 angehenden Erzieher/-innen aus Berlin und Niedersachsen. Die Daten wurden in 16 Klassen an 5 Fachschulen erhoben. Insgesamt gehören zu der Untersuchung drei Messzeitpunkte an denen unterschiedliche Instrumente eingesetzt wurden. Der Leistungstest zur Mathematikdidaktik wurde am zweiten und der videogestützte Fragebogen am dritten Messzeitpunkt eingesetzt.

83% der Teilnehmer/-innen sind weiblich und 17% männlich. Die Teilnehmer/-innen sind in unterschiedlichen Ausbildungsjahren (1. Jahr: 41,5%, 2. Jahr: 33,0%, 3. und 4. Jahr: 25,5%). Die Teilnehmer/-innen sind zwischen 17 und 46 Jahren alt (M=22,94; SD=4,12).

4. Ausblick

Erste Ergebnisse deuten daraufhin, dass die Skala zum mathematikdidaktischen Wissen als prognostisch valide angesehen werden kann (Dunekacke, Jenßen & Blömeke, under revision), hier sind jedoch noch weitere Analysen erforderlich.

Literatur

Anders, Y. (2012). *Modelle professioneller Kompetenzen für frühpädagogische Fachkräfte. Aktueller Stand und ihr Bezug zur Professionalisierung. Expertise zum Gutachten „Professionalisierung in der Frühpädagogik“.* Aktionsrat Bildung.

Blömeke, S. & Zlatkin-Troitschanskaia, O. (Eds.) (2013). *The German funding initiative “Modeling and Measuring Competencies in Higher Education”: 23 research projects on engineering, economics and social sciences, education and generic skills of higher education students. (KoKoHs Working Papers, 3).* Berlin & Mainz: Humboldt University & Johannes Gutenberg University.

Cronbach, L. J. & Meehl, P. E. (1955). Construct validity in psychological tests. *Psychological Bulletin*, 52, 281–302.

Dunekacke, S. (under revision). Erfassung mathematikdidaktischer Kompetenz von angehenden Erzieher/-innen – Theoretische Überlegungen und methodisches Vorgehen. Soll erscheinen in *Tagungsband: Berliner und Brandenburger Beiträge zur Bildungsforschung*.

Dunekacke, S., Jenßen, L. & Blömeke, S. (under revision). Validierung eines Leistungstests zur Erfassung mathematikdidaktischer Kompetenz angehender frühpädagogischer Fachkräfte durch die videogestützte Erhebung von Performanz. *Zeitschrift für Pädagogik – Beiheft 2015: Kompetenzen von Studierenden.*

Dunekacke, S., Jenßen, L., Baack, W., Tengler, M., Wedekind, H., Grassmann, M. & Blömeke, S. (2013). Was zeichnet eine kompetente pädagogische Fachkraft im Bereich Mathematik aus? Modellierung professioneller Kompetenz für den Elementarbereich. In Greefrath, G., Käpnick, F. & Stein, M. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (280-283). WTM: Münster.

Fried, L. & Roux, S. (2009). Zur Pädagogik der frühen Kindheit im 21. Jahrhundert - Desiderata. In Fried, L. & Roux, S. (Hrsg.), *Pädagogik der frühen Kindheit. Handbuch und Nachschlagewerk* (S. 378-382). Berlin: Cornelsen.

Fröhlich-Gildhoff, K., Nentwig-Gesemann, I. & Pietsch, S. (2011). *Kompetenzorientierung in der Qualifizierung frühpädagogischer Fachkräfte. Eine Expertise der Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte (WiFF).* Deutsches Jugendinsitut e.V. München

Hartig, J., Frey, A. & Jude, N. (2012). Validität. In Moosbrugger, H. & Kelava, A. (Hrsg.), *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion 2. Auflage* (S. 135-163). Heidelberg: Springer.

Jenßen, L., Dunekacke, S. & Blömeke, S. (under revision). Qualitätssicherung in der Kompetenzforschung: Standards für den Nachweis von Validität in Testentwicklung und Veröffentlichungspraxis. *Zeitschrift für Pädagogik – Beiheft 2015: Kompetenzen von Studierenden.*

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, 19, 513-526.

National Advisory Panel (2008). *The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. U.S. Department of Education.

Shulmann, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15, 2, 4-14.

Thonhauser, J. (2007). Lehrer/-innen handeln situationsspezifisch. In Gastager, A., Hascher, T. & Schwetz, H. (Hrsg.). *Pädagogisches Handeln: Balancing zwischen Theorie und Praxis. Beiträge zur Wirksamkeitsforschung in pädagogisch-psychologischem Kontext* (S. 47-60). Erziehungswissenschaft, Band 24. Landau: VEP-Verlag.

van Oers, B. (2009). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 1, 23-37.

Widulle, W. (2009). *Handlungsorientiert Lernen im Studium*. Arbeitsbuch für soziale und pädagogische Berufe. Heidelberg: Springer

Wild, K.-P. & Krapp, A. (2001). Pädagogisch-psychologische Diagnostik. In Krapp, A. & Weidenmann, B. (Hrsg). *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch. 4. vollständig überarbeitete Auflage* (513-563). Weinheim: Beltz.

Edda EICH-SOELLNER, Rainer FISCHER, Kathrin WOLF, München

Aktivierung und Feedback - Der Einsatz von Just-in-Time Teaching und Peer Instruction in einer Analysis-Veranstaltung

Die lernerzentrierten Methoden Just-in-Time Teaching und Peer Instruction wurden im Rahmen des Projekts HD MINT[1] an der Hochschule München in einer Analysis-Veranstaltung eingesetzt: Ziel ist es, Studierende aktiv an der Vorlesung zu beteiligen und sowohl dem Dozenten als auch den Studierenden jederzeit Feedback zum Leistungsstand und dem Grad des Verstehens zu ermöglichen.

Methoden Just-in-Time Teaching und Peer Instruction

Der Kerngedanke der Methode Just-in-Time Teaching (kurz: „JiTT"; Novak, Patterson, Gavrin & Christian 1999) ist, die Präsenzzeit effektiv zu nutzen und sie den fachlichen Bedürfnissen der Studierenden anzupassen. Die Studierenden bereiten den Stoff zu Hause vor, indem sie angegebene Seiten im Skript oder in einem Lehrbuch durcharbeiten (alternativ auch ein Video ansehen) und dazu bereitgestellte Aufgaben in einer Lernplattform beantworten. Außerdem richten sie bis spätestens einen Tag vor der Veranstaltung Fragen an die Lehrperson, die ausgehend von diesen Rückmeldungen die Präsenzveranstaltung gestalten kann. In dieser interaktiven Veranstaltung ist es nun möglich, Fehlvorstellungen zu thematisieren und offene Fragen zu klären.

Dazu eignet sich besonders die von Mazur entwickelte Methode Peer Instruction (kurz: „PI"; Mazur 1997). Sie dient dazu, die Studierenden in der Veranstaltung zu aktivieren, das Verständnis zu fördern, Fehlvorstellungen aufzudecken und sowohl den Studierenden als auch dem Dozenten Rückmeldung über den aktuellen Leistungsstand zu geben. Eine Peer-Instruction-Einheit umfasst ungefähr 5-10 Minuten: Die Lehrperson stellt eine verständnisorientierte Multiple-Choice-Frage, die mögliche Fehlkonzepte der Studierenden aufzeigen soll. Die Studierenden denken alleine über die Frage nach und stimmen anschließend für die Antwort ab, die ihnen richtig erscheint. Die Fragen sollten so gestaltet sein, dass 30%-70% der Studierenden für die richtige Antwort stimmen. Die Studierenden dis-

1 Dieses Vorhaben wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01PL12023F gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 321–324). Münster: WTM-Verlag

kutieren dann mit ihren Sitznachbarn über die Frage und ihre Wahl der Lösung. Im Anschluss findet eine weitere Abstimmung statt, in der sich das Ergebnis meist deutlich zur richtigen Antwort hin verschiebt. Wichtig ist eine abschließende Auflösung der Frage, um keine offenen Punkte im Raum stehen zu lassen. Erzielt die richtige Antwort bei der ersten Abstimmung weniger als 30%, entfällt die zweite Abstimmung und es sind von Seiten der Lehrperson zusätzliche Erklärungen notwendig. Wenn sich bereits bei der ersten Abstimmung mehr als 70% für die richtige Antwort entschieden haben, empfiehlt sich eine direkte Auflösung; die Diskussion untereinander und die zweite Abstimmung entfallen also in diesem Fall.

Umsetzung

JiTT und PI wurden in drei parallelen Analysis-Veranstaltungen für Studierende des ersten Semesters in den Bachelor-Studiengängen *Informatik, Scientific Computing* und *Geotelematik und Navigation* erprobt. Die Veranstaltungen bestanden aus wöchentlich zwei Doppelstunden. In der Regel gab es einen JiTT-Auftrag pro Woche, bestehend aus dem Skript als Lesematerial und Begleitfragen in der Lernplattform Moodle, wobei die Bearbeitungszeit 3-6 Tage betrug. Nach dem Durcharbeiten des Skripts sollten die Studierenden insgesamt 7 Fragen in Moodle bearbeiten. Diese bestanden zum einen aus einfachen Lesekontrollfragen, zum anderen aus Verständnisfragen, die prüften, ob die Studierenden den Text in der angestrebten Tiefe verstanden hatten. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel einer Lesekontrollfrage zum Thema „Ableitung“. Um den Korrekturaufwand gering zu halten, wurden meist Multiple-Choice-Fragen, z.T. aber auch Freitextfragen verwendet. Ergänzend zu den Lesekontroll- und Verständnisfragen wurden die Lernenden in einem Freitextfeld aufgefordert Verständnisprobleme zurückzumelden. Abgabetermin für die Beantwortung der Fragen war meist 1-2 Tage vor der nächsten Vorlesung. Auf der Basis der Moodle-Ergebnisse konnten die Dozenten dann Fragen, häufige Fehler und konzeptuelle Fehlvorstellungen identifizieren, um genau auf diese in der nächsten Veranstal-

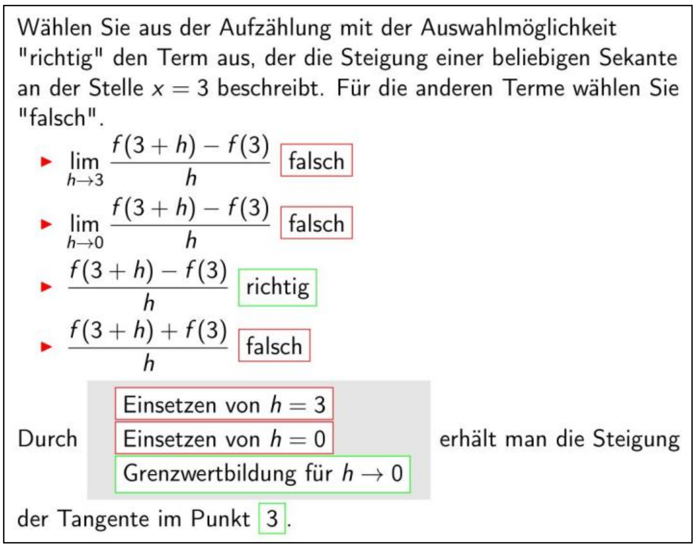


Abbildung 1: Beispiel einer Lesekontrollfrage zum Thema „Ableitung“.

tung durch Erklärungen und gezielte PI-Fragen einzugehen (siehe Abb. 2). In den Abstimmungsergebnissen war meist deutlich der Verständniszuwachs durch die Diskussion innerhalb von PI zu sehen.

PI wurde darüber hinaus auch zur Aktivierung der Studierenden und zum Feedback unabhängig von den JiTT-Themen eingesetzt.

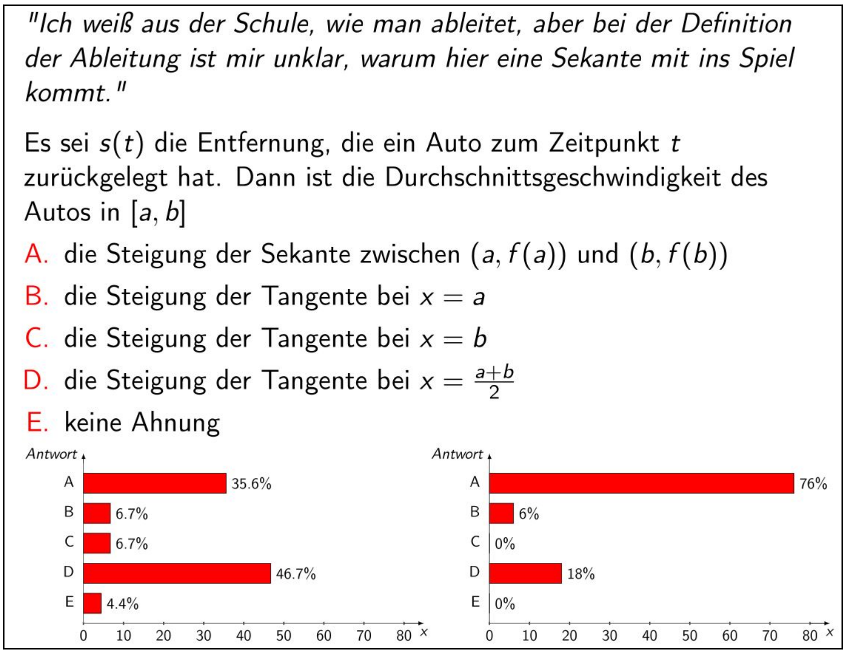


Abbildung 2: Rückmeldung eines Studierenden in Moodle, darauf aufbauende PI-Frage sowie die Abstimmungsergebnisse der ersten Abstimmung (links) bzw. der zweiten Abstimmung nach der Diskussionsphase (rechts).

Erfahrungen

Die Erfahrungen mit JiTT und PI im Rahmen der Analysis-Vorlesungen waren durchweg positiv. Umfragen bei Studierenden am Semesterende und Beobachtungen der Dozenten ergaben, dass beide Methoden die überwiegende Mehrzahl der Studierenden erreichten. Bei PI lag die Beteiligung unter den Anwesenden zwischen 90 und 95 Prozent, was wohl auch an der anonymen Durchführung mit Hilfe von elektronischen Handabstimmungsgeräten, sogenannten „Clickern“, lag. Bei der zeitaufwändigen JiTT-Vorbereitung wurde anfangs eine Beteiligung von etwa 80 Prozent aller im Moodle-Kurs eingeschriebenen Teilnehmer erzielt, mit fallender Tendenz zum Semesterende hin. Diese Werte wurden erreicht, ohne dass es einen Anreiz in Form von möglicher Notenverbesserung oder als Zulassungsvoraussetzung zur Prüfung gegeben hätte. Zunächst bedeutete die wöchentliche Vorbereitung für die Studierenden einen zeitlichen Mehraufwand, dessen Sinn ihnen von Anfang an klar kommuniziert wurde. Dadurch konnte die Vorlesungszeit sehr effizient genutzt werden: Die Studierenden waren aufgrund der Vorbereitung bereits teilweise mit den Inhalten vertraut und beteiligten sich dadurch viel aktiver als in der gleichen, traditionell durchgeführten Veranstaltung im Semester zuvor. Insbesondere Studierende mit geringer ausgeprägtem fachlichem Grundwissen hatten so die Möglichkeit, bereits im Vorfeld Defizite zu erkennen und gezielt an diesen zu arbeiten. Insgesamt wurde über das Semester betrachtet ein kontinuierlicherer Lernfortschritt bei den Studierenden beobachtet als bisher.

Die aktive Beteiligung der Studierenden wurde durch PI zusätzlich unterstützt. Die Rückmeldungen der Studierenden am Semesterende zeigten, dass das gemeinsame Diskutieren untereinander über die Fragen und die zugrunde liegenden Konzepte ihnen nicht nur mehr Spaß machte, sondern auch zu Lernfortschritten führte. Das gezielte Aufdecken von konzeptuellen Fehlvorstellungen resultierte in einem tieferen qualitativen Verständnis wesentlicher Konzepte der Veranstaltung über das schematische Lösen von Rechenaufgaben hinaus. Außerdem konnten die Studierenden ihre Fähigkeiten, fachlich zu argumentieren, verbessern. Bei der Evaluation der Veranstaltung war die Zustimmung zu beiden Methoden sehr hoch: Die Studierenden würden eine Veranstaltung mit PI und JiTT mehrheitlich einer traditionellen Veranstaltung vorziehen.

Aus der Sicht der Dozenten ist der Aufwand bei der erstmaligen Durchführung einer Veranstaltung mit den beiden Lehrmethoden erheblich, insbesondere durch das Aufbereiten des Lesestoffs und das Erstellen der PI-Fragen. Für künftige Semester ist hier jedoch eine deutliche Reduktion zu erwarten, da auf bereits entwickelten Fragen aufgebaut werden kann. Mit den beiden Lehrmethoden konnte ungefähr dieselbe Menge an Stoff behandelt werden wie bisher. Die Zeit, die man in der Veranstaltung durch das „Auslagern" der Inhalte in die Selbstlernzeit der Studierenden sparte, wurde in das Vertiefen des Stoffes im Rahmen von PI investiert.

Zusammenfassung

Die aktivierenden Methoden JiTT und PI führten im Rahmen der Analysis-Veranstaltung nicht nur zu mehr Spaß und Aktivität der Studierenden während der Präsenzzeit, sondern auch zu einem passgenaueren Zuschnitt dieser Zeit auf die Bedürfnisse der Studierenden. Die beiden Methoden sollen daher in weiteren Veranstaltungen des Grundstudiums eingesetzt werden.

Literatur

Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: A User's Manual.* Upper Saddle River: Prentice Hall.

Novak, G.M., Patterson E.T., Gavrin, A.D. & Christian, W. (1999). *Just-in-time teaching: Blending active learning with web technology.* Upper Saddle River: Prentice Hall.

Klaus-Peter EICHLER, Elena KLIMOVA, Schwäbisch Gmünd

Erwerb allgemeiner mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe vom Fach aus

1. Problemlage und Zielsetzung

Ziel des Mathematikunterrichtes ist die Einheit von formaler und materialer Bildung. Bildungsstandards der KMK beschreiben die zu erwerbenden inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen. Laut der aktuellen PISA-Ergebnisse hat sich das Leistungsniveau in Deutschland zwar insgesamt verbessert, jedoch sind die Anteile der Spitzengruppen nicht in gleichem Maß gewachsen. Die Abbildung 1 zeigt die Stagnation in Bezug auf die Leistungsspitze.

Es ist altbekannt und bewährt, dass ein Hauptmittel zur Realisierung der Bildungsziele im Mathematikunterricht ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben ist (vgl. Weber 1987, Fanghänel 2000, Eichler 2010). Hinsichtlich des höchsten Kompetenzniveaus gibt es vergleichsweise wenig Forschungsbefunde, die aufzeigen, wie Kinder zu entsprechenden Leistungen geführt werden können. Ziel unserer Arbeit ist deshalb die Analyse, Charakterisierung, Konzeption und wissenschaftliche Begründung eines solchen Arbeitens mit Aufgaben, mit dem inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen auf höchster Niveaustufe entwickelt werden können.

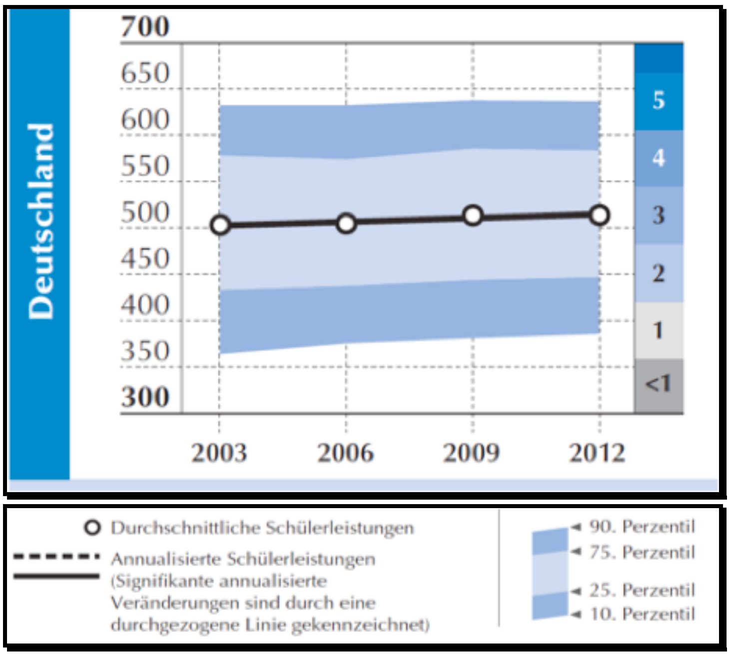


Abb. 1: PISA über die Jahre hinweg (OECD 2013, S. 446).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 325–328). Münster: WTM-Verlag

2. Analyse, Charakterisierung und Konzeption eines geeigneten Arbeitens mit Aufgaben & erste Befunde

Hinsichtlich der Tätigkeit der Lehrerin / der Lehrer wurden die Komponenten des Arbeitens mit Aufgaben folgendermaßen gestuft (vgl. Fanghänel 2000): Auswahl und Anordnung der Aufgaben, Stellen der Aufgaben, Ingangsetzen und ***Inganghalten*** der Aufgabenbearbeitung bis hin zur Rückbesinnung auf die Lösung und den Lösungsweg.

Ausgehend vom Ziel wurden Aufgaben ausgewählt:

- mit hohem fachlichen Anspruch und Komplexität, die zur Strategiefindung herausfordern (Anforderungsbereich III),
- zu welchen es mehrere Vorgehensweisen bzw. unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten gibt (Anforderungsbereich III),
- bei deren Bearbeitung Verallgemeinerungen hilfreich sind,
- die aus verschiedenen Bereichen der Mathematik stammen, einen Transfer und vernetztes Denken fordern (Anforderungsbereich III),
- bei welchen die Rückbesinnung auf den Lösungsweg fruchtbar ist, weil die Aufgabe mathematische Substanz hat,
- deren Lösungen nicht im Internet zu finden sind (Abb. 2).

Aufgabe 1 Gegeben sind die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ mit $a_1 = 2$ und $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Summe $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Aufgabe 2 Beweisen Sie die Ungleichung: $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

Aufgabe 3 Beweisen Sie: wenn die Flächeninhalte eines Quadrats und eines Dreiecks gleich sind, dann ist der Dreiecksumfang größer als der Umfang des Quadrats.

Aufgabe 4 Beweisen Sie, dass die Primzahl p den Zähler des Bruchs $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ teilt.

Aufgabe 5 Man berechnet die Quersumme der Zahl 7^{2013}, dann die Quersumme der errechneten Zahl, d.h. die Quersumme der Quersumme, und so weiter bis man eine einstellige Zahl bekommt. Welche Zahl bekommt man?

Aufgabe 6 Wenn in einem spitzwinkligen nicht gleichseitigen Dreieck durch eine Ecke die Höhe, durch eine andere Ecke die Seitenhalbierende und durch die letzte Ecke die Winkelhalbierende gezogen wurden und die Schnittpunkte dieser drei Strecken ein Dreieck bilden, dann ist dieses Dreieck nie gleichseitig. Beweisen Sie diese Aussage.

Abb. 2: Beispiel der Aufgaben.

Die Art der Aufgabenstellung und das Format der Aufgabenbearbeitung entscheiden darüber, ob Potenzen zum Argumentieren genutzt werden, ob Schüler_innen beim Lösen aus der Sache heraus mathematisch kommunizieren oder an mathematischen Darstellungen arbeiten müssen.

Ein Beispiel des Formats der Aufgabenstellung ist Matboj (vgl. Klimova 2012). Die Organisation und der Ablauf lassen sich kurz wie folgt beschreiben: Zwei Mannschaften bearbeiten im Team jeweils die gleichen Aufgaben. Abwechselnd trägt aus jeder Mannschaft ein Teilnehmer die Lösung der Aufgabe vor. Ein Teilnehmer der gegnerischen Mannschaft beurteilt als Kritiker die vorgetragene Lösung und den Lösungsweg. Aufgabe des Kritikers ist es, Fehler in der Lösung oder Lücken in der Begründung des Lösungswegs zu finden und dann zu schließen. Punkte gibt es sowohl für die Lösung als auch für die Kritik.

Worauf kommt es zum Beispiel beim Bearbeiten der Aufgabe 2 an? Die Aufgabe lösen kann jeder – mit dem Taschenrechner. Beim Matboj bestand die Herausforderung darin, diese Ungleichung ohne Rechner zu beweisen. Dazu mussten die Teilnehmer argumentieren (Abb. 3). Sie hatten die Möglichkeit, die Lösung ausgehend von der Betrachtung des allgemeinen Falls zu finden oder nach dem Lösen zu verallgemeinern (Abb. 4). Es geht grundsätzlich primär nicht um das *Lösen* dieser Aufgabe, sondern um den ***Erwerb von Fähigkeiten im Lösen*** von Aufgaben. Schüler_innen sollen dabei Arbeitsweisen des FACHES Mathematik erlernen und als solche erfahren.

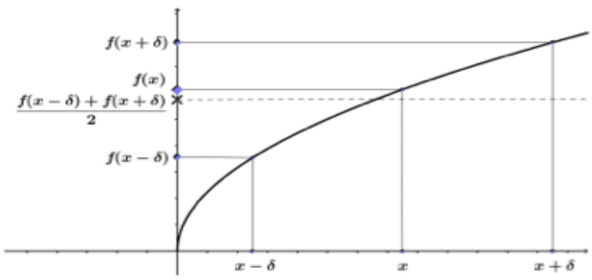
Beweis:
Wir bezeichnen: $a = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ und $b = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$.
Dann gilt $a^3 + b^3 = 6$.
Da $b < a$ ist, gilt weiter $0 < (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow ab < a^2 - ab + b^2 \Leftrightarrow$
$ab(a+b) < (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 = 6 \Leftrightarrow 3ab(a+b) < 18 \Leftrightarrow$
$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) < 24 \Rightarrow a + b < 2\sqrt{3}.$

Abb. 3: Algebraische Lösung der Aufgabe.

Mit dem vorgeschlagenen Format des Arbeitens mit Aufgaben werden ein besonderer Anlass und eine Anleitung zur Rückbesinnung gegeben. Schüler_innen erfassen übertragungsfähige Arbeitsweisen, verallgemeinern und kommunizieren. Diese Phase der Rückbesinnung ist ein wesentlicher Ort der Entwicklung allgemeiner Kompetenzen.

Bisher wurden mathematische Aufgaben in großer Zahl gesichtet, aufbereitet und eingesetzt (entsprechend der o.g. Kriterien). Mathematisch anspruchsvolle Aufgaben sind zwingend notwendig, aber nicht hinreichend für den Erwerb prozessbezogener Kompetenzen. Entscheidend ist die Art und Weise, ***wie*** Lehrpersonen mit diesen Aufgaben arbeiten. Deshalb wurden Interviews mit 8 Lehrpersonen geführt. Alle 8 befürworteten Methoden wie Matboj und würden diese Methoden einsetzen.

Verallgemeinerung:



... Ist eine Funktion streng monoton steigend, wobei das Wachstum bei Zunahme des Arguments abnimmt (d.h. $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ im Definitionsbereich sind), dann ist das arithmetische Mittel von zwei beliebigen Werten der Funktion kleiner als der Wert der Funktion in der Mitte, d.h. $\forall x \in D(f)$ gilt

$$\frac{f(x-\delta)+f(x+\delta)}{2} < f(x)$$

Beweis:

$$f(x) - f(x-\delta) > f(x+\delta) - f(x) \qquad \text{für} \quad \forall x \in D(f), \quad \forall \delta > 0$$

Folgerung: Die Ausgangsungleichung $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$ ist somit ein Sonderfall der allgemein bewiesenen Ungleichung für

$$f(x) = \sqrt[3]{x},\ D(f) = (0, +\infty),\ x = 3 \text{ und } \delta = \sqrt{3}.$$

Abb. 4: Verallgemeinerung der Aufgabe.

3. Ausblick

Für die weitere Arbeit ist das Erfassen und Klassifizieren von Arbeitsweisen der Schüler_innen beim Bearbeiten ausgewählter Aufgaben und eine Längsschnittstudie zur Erfassung der Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen geplant. Hier sollen gezielt die von uns favorisierten Lernaktivitäten über mindestens ein Schuljahr hinweg eingesetzt werden.

Literatur

Fanghänel, G. (2000). Arbeiten mit Aufgaben – ein wesentliches Mittel zur Gestaltung eines modernen Mathematikunterrichts. *Mathematikunterricht gestalten*. Berlin: Paetec.

Eichler, K-P., Grassmann, M., Mirwald, E. & Nitsch, B. (2010). *Mathematikunterricht.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag.

Klimova, E. (2012). MatBoj-Wettbewerb als ein neuer fachspezifischer Wettbewerb in Mathematik zur Förderung begabter Schüler. *In Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, S. 449–452. Münster: WTM-Verlag.

OECD (2013), PISA 2012 Ergebnisse: *Was Schülerinnen und Schüler wissen und können (Band I): Schülerleistungen in Lesekompetenz, Mathematik und Naturwissenschaften.* W. Bertelsmann Verlag, Germany.

Weber, K. (1987). Ziel, Inhalt und Prozesskonzeption des Mathematikunterrichts nach den neuen Lehrplänen der Klassen 1 bis 3. *Unterstufe.* Berlin 34 (1987) Heft 4. S. 65 – 78.

Katja EILERTS, Potsdam, Hans-Dieter RINKENS, Paderborn, Andreas SEIFERT, Lüneburg

Feldstudie zur Entwicklung der Rechenfertigkeit von Erstklässlern

Berichtet wird über eine Feldstudie mit über 2600 Erstklässlern in 128 Klassen gegen Ende des ersten Schuljahres. Getestet werden jeweils alle 231 Additions- sowie Subtraktionsaufgaben mit Ergebnissen im Zahlenraum bis 20, bestehend aus Aufgaben der Form „a + b =“ bzw. „a – b =“ (Testdesign siehe Rinkens, 2011). Im Vortrag werden vor allem die Ergebnisse des Subtraktionstests dargestellt. Es zeigt sich eine Unterteilung des Aufgabenpools in „leichte“ und „schwere“ Aufgaben, die nicht immer den intuitiven Vermutungen entspricht.

Entscheidend für erfolgreiches Rechnen ist ein wachsender Bestand an verfügbaren Rechensätzen und an Rechenstrategien. Beides hängt zusammen: Rechenstrategien setzen einen Bestand an bekannten Rechensätzen voraus, die Erweiterung dieses Bestandes geschieht über Rechenstrategien. Die Rechensätze sind das Rohmaterial, die Rechenstrategien das Gewusst-wie des Rechnens. Die Automatisierung des Einspluseins und des Einsminuseins ist letztendlich Voraussetzung für die arithmetischen Themen der folgenden Schuljahre.

Empirische Studien zur Entwicklung der Rechenkompetenz im ersten Schuljahr sind im deutschsprachigen Raum Mangelware (vgl. Padberg & Benz 2011). Meist sind es qualitative Studien zu Rechenstrategien (vgl. Gaidoschik 2010). Grassmann (2003) untersucht den Lernzuwachs bezogen auf ausgewählte Aufgaben, eingekleidet in Sachkontexten, zwischen Beginn und Ende des 1. Schuljahres in einer Stichprobe von 777 Kindern aus den Bundesländern Berlin, Brandenburg und Nordrhein-Westfalen.

1. Ergebnisse

Eine erste Sichtung der Daten von Additionstest und Subtraktionstest bestätigt das Lehrerurteil: Die Subtraktion ist deutlich schwieriger.

- Im Durchschnitt werden die Additionsaufgaben zu 92 Prozent korrekt bearbeitet, die Subtraktionsaufgaben zu 79 Prozent.
- Jedes dritte Kind löst alle Additionsaufgaben richtig, fast jedes zehnte Kind alle Subtraktionsaufgaben.
- Bei der Addition lösen 92 Prozent der Kinder mehr als drei Viertel der Aufgaben richtig, bei der Subtraktion nur 64 Prozent.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 329–332). Münster: WTM-Verlag

- Die Aufgabe mit den wenigsten richtigen Lösungen wird bei der Addition (7 + 9) noch von 76 Prozent der Kinder richtig gelöst, bei der Subtraktion (19 - 15) von 43 Prozent.

Einen genaueren Überblick über die Ergebnisse des Subtraktionstests (Ergebnisse des Additionstest: vgl. Rinkens & Eilerts, 2012) liefert die Abbildungen 1. Sie zeigt, wie viel Prozent der Kinder, denen die jeweilige Aufgabe zur Bearbeitung vorgelegt wird, ein richtiges Ergebnis notieren.

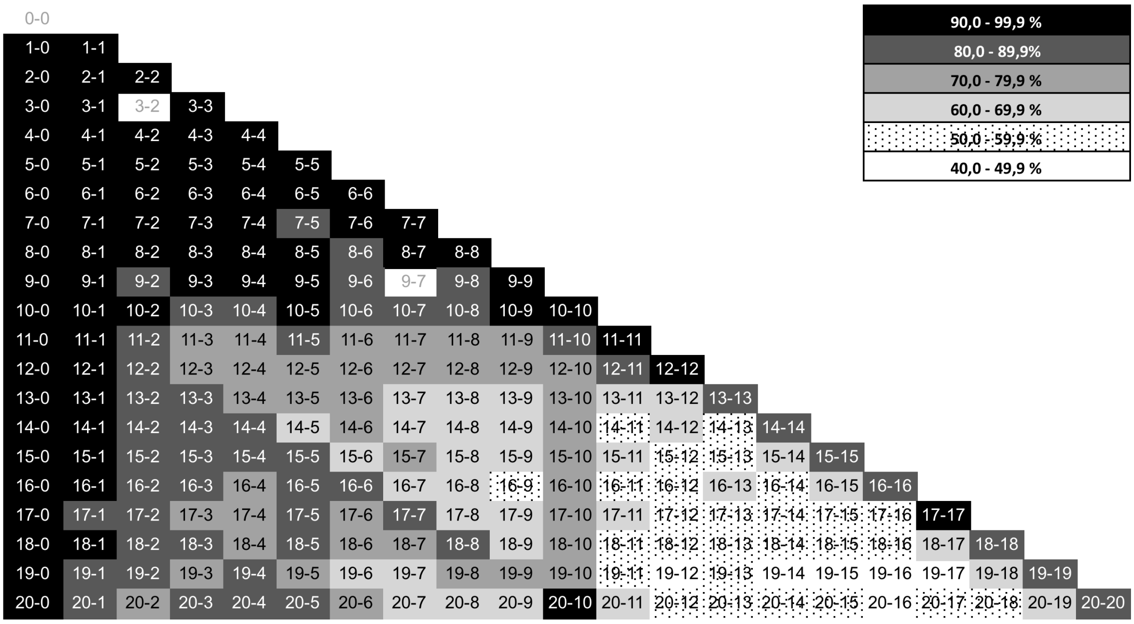


Abb. 1: Ergebnisse des Subtraktionstests

Schon der 1. Blick auf die Subtraktionsgrafik zeigt, dass sie in vier Segmente zerfällt, getrennt durch im Vergleich zur Umgebung dunkler getönte Felder mit der Zehn als Minuend, als Ergebnis oder als Subtrahend: Die Aufgaben im Zahlenraum bis Zehn sind im Schnitt leicht. Die Aufgaben ohne Zehnerüberschreitung, die Analogie-Aufgaben (Beispiel: 18 – 5) sind etwas schwerer, aber leichter als die Aufgaben mit Zehnerüberschreitung (Beispiel: 13 - 5). Noch schwerer sind die Aufgaben des Typs 18 – 13.

Im Vortrag wurden im Weiteren detaillierte Analysen in Bezug auf die „handelnde“ Zahl, die Zahl Zehn und die Nachbaraufgaben etc. vorgestellt (vgl. auch Rinkens, Eilerts & Seifert in Vorb.).

2. Fazit

Die Feldstudie bestätigt den Erfahrungssatz: Die Additionsaufgaben werden deutlich besser gelöst als die Subtraktionsaufgaben. Nur 8 Prozent der Kinder haben im Schnitt noch Schwierigkeiten beim Addieren im Zahlenraum bis Zwanzig, aber 21 Prozent beim Subtrahieren. Die Studie gibt außerdem Hinweise auf die neuralgischen Punkte des Unterschieds zwischen

Addieren und Subtrahieren. Wenn die Kinder überwiegend zählend rechnen, dann kommt dem zweiten Summanden bzw. dem Subtrahenden, kurz: der „handelnden“ Zahl, eine besondere Bedeutung zu: Ist sie groß, wird die Aufgabe schwerer, wie die Studie bestätigt.

Dem Subtrahieren könnte geholfen werden. In der Einführungsphase der Subtraktion im Anfangsunterricht steht die Grundvorstellung des Wegnehmens im Vordergrund: Eine entsprechende Sachsituation wird durch eine Minus-Aufgabe modelliert. Der operative Zusammenhang zwischen Subtrahieren und Addieren wird dann meist durch die naheliegende Verbindung von Wegnehmen und Hinzufügen hergestellt: Danach entspricht der Aufgabe 9 – 6 = 3 die Aufgabe 3 + 6 = 9 (nicht 6 + 3 = 9). Dieser enge Zusammenhang, der meist mit „Aufgabe und Umkehraufgabe“ umschrieben wird, ist aber gerade nicht hilfreich beim Lösen von Aufgaben wie 19 - 16 = x; denn die Umkehraufgabe x + 16 = 19 ist wegen der fehlenden Startzahl nicht durch Hinzufügen zu lösen.

Die Sicht des Wegnehmens als Gegenoperation des Hinzufügens muss erweitert werden durch den Aspekt des Getrenntsehens als Gegenoperation des Zusammensehens. Am Beispiel der Zehnerstruktur der Zahlen von 11 bis 19 wird dies besonders deutlich. Die Zehnerstruktur (16 = 10 + 6) erfassen die Kinder sehr früh; Additionsaufgaben mit dem Summanden 10, gleich ob 10 + 6 oder 6 + 10, bereiten weit weniger als 10 Prozent der Kinder Probleme. Aufgaben des Typs 16 - 6 lösen im Schnitt immerhin schon 15 Prozent und Aufgaben des Typs 16 – 10 sogar ein Viertel der Kinder falsch oder gar nicht. Fazit: Dem subtraktiven Rechnen mit Zehn muss im Zusammenhang mit dem Aufbau der Zahlen über Zehn mehr Aufmerksamkeit im Unterricht geschenkt werden.

Das Defizit der Subtraktion macht sich bei einem anderen Aufgabentyp noch stärker bemerkbar. Während im Schnitt weniger als 15 Prozent der Kinder Schwierigkeiten bei Aufgaben des Typs 3 + 14 haben, rechnet fast die Hälfte Aufgaben des Typs 17 – 14 falsch oder gar nicht.

Mitunter hört man aus dem Lehrerkollegium Stimmen, die sagen: „Diese Aufgaben gehören nicht ins erste Schuljahr; es handelt sich ja um die Subtraktion zweistelliger Zahlen.“ In Wahrheit handelt es sich jedoch um verständiges Rechnen (= Rechnen mit Verstand): „Schaue auf die Zahlen, ehe du rechnest.“ Wird dieser Aspekt vernachlässigt, kommt es später zu Defiziten, so zum Beispiel dass im vierten Schuljahr Aufgaben wie 701 – 698 schriftlich gerechnet werden mit den typischen Fehlern bei der schriftlichen Subtraktion (vgl. Selter 2001).

Bei Nachbar-Zahlen (Beispiel: 17 – 16) haben die meisten Kinder bereits den „Zahlenblick“ entwickelt: Sie lösen sich vom Schema des Wegnehmens und „sehen“ das Ergebnis Eins. Im Hinblick auf die Entwicklung verständigen Rechnens ist anzuraten, gegen Ende des ersten Schuljahres dieser erweiterten Sicht beim Subtrahieren stärker Rechnung zu tragen.

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). Zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. In Ch. Fridrich, M. Heissenberger & A. Paseka (Hrsg.), Forschungsperspektiven 2. Wien: LIT-Verlag, 29-45.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., Raudies, M. & Thiel, O. (2003). Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern, Teil 2: Was können Kinder am Ende der Klasse 1, Potsdamer Studien zur Grundschulforschung, 31 (2003).

Padberg, F. & Benz, C. (2011). Didaktik der Arithmetik. (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). München: Spektrum Akademischer Verlag.

Rinkens, H.-D., Eilerts, K. & Schaper, K. (2004). 11-10 ist leicht, 11-9 nicht. Ergebnisse einer Feldstudie zu arithmetischen Fähigkeiten von Erstklässlern im Bereich des Subtrahierens nach der materialgebundenen Einführungsphase. In Krauthausen, G. & Scherer, P. (Hrsg.), Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik – Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel. Donauwörth: Auer Verlag, 126–134

Rinkens, H.-D. (2011). Test zur Erfassung der Rechenfertigkeit von Erstklässlern im Bereich der Addition und Subtraktion. Internetmanuskript http://www.rinkens-hd.de/images/projekte/TestErstkl.pdf. Gesehen 27.01.2014

Rinkens, H.-D. & Eilerts, K. (o. J.). Feldstudie zur beginnenden Rechenfertigkeit von Erstklässlern. Internetmanuskript http://www.rinkens-hd.de/images/projekte/ErstklaesslerFaeh.pdf. Gesehen 27.01.2014

Rinkens, H.-D. & Eilerts, K. (2012). Entwicklung der Rechenfertigkeit von Erstklässlern im Bereich der Addition. In W. Blum, R. Borromeo Ferri & K. Maaß (Hrsg.), Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität – Festschrift für Gabriele Kaiser. Wiesbaden Springer (S. 265-274)

Rinkens, H.-D., Eilerts, K. & Seifert, A. (i.Vorb.). Zur Rechenfertigkeit von Erstklässlern im Bereich der Subtraktion und möglichen Wirkungsfaktoren.

Selter, C. (2001). Zur rechnerischen Flexibilität von Grundschülern - Analysen am Beispiel der Aufgabe 701-698. In W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.), Beiträge zur Didaktik der Mathematik in der Primarstufe - Festschrift für Siegbert Schmidt. Hamburg: Dr. Kovac. (S. 217-223)

Katja EILERTS, Potsdam, Hans-Dieter RINKENS, Paderborn, Andreas SEIFERT, Lüneburg

Untersuchung individueller und systemischer Wirkfaktoren auf die Rechenfertigkeit von Erstklässlern

Die Entwicklung der Rechenfertigkeit im Verlauf des ersten Schuljahres ist der Gegenstand einer Feldstudie mit über 2500 Schülerinnen und Schülern in 128 Klassen zu Beginn des letzten Schuljahrsquartals im Schuljahr 2010/11. Getestet werden die Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 (Testdesign siehe Rinkens, 2011). Außerdem werden Merkmale der Lernumgebung wie Klassengröße, Anteil der Kinder in der Klasse mit Deutsch als Muttersprache sowie Berufserfahrung und Ausbildung der Mathematiklehrerin erhoben.

Der Vortrag geht der Forschungsfrage nach, durch welche Variablen sich in dieser Feldstudie die Rechenfertigkeit bei Erstklässlern vorhersagen lässt. Da die Varianz beim Subtraktionstest deutlich größer ist als beim Additionstest, wird dieser für die Analyse herangezogen. Die Untersuchung möglicher Wirkungsfaktoren der Lernumgebung führt zu dem bemerkenswerten Ergebnis, dass diese nur einen ganz geringen Teil der Varianz bei der Lösungshäufigkeit aufklären.

1. Wirkungsfaktoren auf Schülerleistungen

Hattie (2009) und Kunter et al. (2011) bestätigen die allgemeine Erkenntnis, dass den Lehrpersonen für den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern eine besondere Bedeutung zukommt. Um die systematischen Zusammenhänge zwischen den Leistungsmaßen hinsichtlich der Rechenfertigkeit und verschiedenen Merkmalen zu erfassen, ist im Rahmen unserer Feldstudie zusätzlich eine Befragung der Lehrpersonen durchgeführt worden, die in der jeweiligen Klasse das Fach Mathematik unterrichtet haben (N = 117).

Die untersuchten Wirkungsfaktoren beziehen sich auf das einzelne Kind, auf verschiedene Merkmale der Klasse wie Klassengröße, Schüleranteil mit Deutsch als Muttersprache und Anzahl der unterrichteten Mathematikstunden pro Woche sowie auf fachliche Qualifikation bzw. Berufserfahrung der Lehrperson. Das Wirkungsmodell in Abbildung 1, das nur einen kleinen Ausschnitt der möglichen Einflussvariablen von Lernumgebungen auf die Entwicklung der Rechenfertigkeit darstellt, steht vor diesem Hintergrund unter der Forschungsfrage: Durch welche Variablen lassen sich in dieser Feldstudie die Rechenfertigkeiten bei Erstklässlern vorhersagen?

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 333–336). Münster: WTM-Verlag

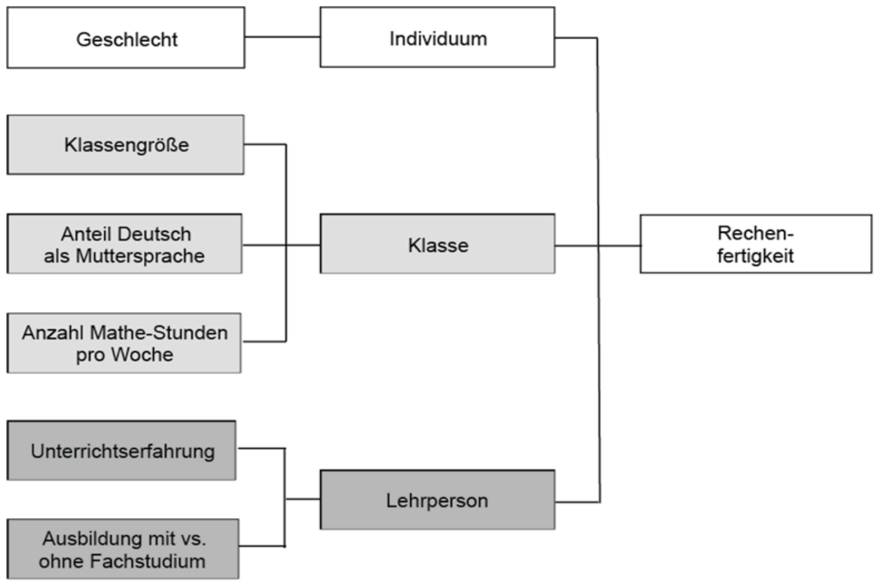


Abb. 1 Wirkungsmodell

1.1 Individuelle Wirkfaktoren

Prenzel et al. (2012) merken an: „Mit großer Spannung wird in den internationalen Vergleichsstudien jeweils verfolgt, wie die Kompetenzunterschiede zwischen Mädchen und Jungen speziell in der Mathematik ausfallen. Spannung kommt deshalb auf, weil seit den ersten Vergleichen bei PISA immer wieder Staaten identifiziert werden, in denen keine Geschlechterunterschiede festzustellen sind beziehungsweise diese sogar den überbrachten Stereotypen widersprechen. Ein ähnliches Bild findet man übrigens auch bei den Untersuchungen im Grundschulbereich (z.B. Brehl, Wendt & Bos, 2012).“ In bisherigen Studien werden Kompetenzunterschiede zwischen Mädchen und Jungen im Fach Mathematik erst ab dem Ende der Grundschulzeit untersucht. Sie weisen mit dem Alter beziehungsweise mit der untersuchten Schulstufe eine Zunahme des Unterschieds zugunsten der Jungen aus. Bemerkenswert ist, dass in unserer Studie bei Erstklässlern ein solcher Unterschied zwischen Mädchen und Jungen nicht nachgewiesen werden kann, was die Vermutung stärkt, dass er sich erst im Laufe der Schulzeit entwickelt. Das hat zur Konsequenz, dass der Mathematikunterricht gendersensibler werden muss und die Mathematikdidaktik diesem Thema in Forschung und Lehre stärkere Aufmerksamkeit widmen sollte.

1.2 Systemische Wirkfaktoren: Klasse und Lehrperson

Um differentielle Aussagen zur Wirkung der Faktoren in unterschiedlichen Leistungsgruppen zu ermöglichen, wird die Stichprobe anhand der Leistungen im gesamten Subtraktionstest in Quartile aufgeteilt. In Abbildung 2 sind im 1. Quartil die schwächsten Schülerinnen und Schüler, im 4. Quartil die leistungsstärksten zusammengefasst. Für jedes Quartil werden Varianz-

Kovarianz-Analysen berechnet mit den Faktoren Klassengröße, Schüleranteil mit Deutsch als Muttersprache, Anzahl der unterrichteten Mathematikstunden pro Woche sowie Unterrichtserfahrung und Ausbildung der Lehrperson als unabhängigen Variablen und dem Gesamtscore sowie den Aufgaben-Clustern[1] als abhängige Variablen. Um bei den Kovariaten die Richtung des Zusammenhangs (positiv/negativ) ermitteln zu können, werden Korrelationsanalysen berechnet. Abbildung 2 gibt nur signifikante Effektgrößen (Eta-Quadrat) wieder; hervorgehobene Werte charakterisieren einen negativen Zusammenhang.

	Merkmale	**Ges**	**Null**	**=1**	**=10**	**hZ1**	**hZ2**	**hZ3**	**hZ4**	**hZ5**
1. Quartil	Klassengröße									
	Muttersprachler									
	Stundenanzahl	,022		,016						,031
	Jahre Unterricht									
	Lehramtsstudium									**,016**
2. Quartil	Klassengröße									
	Muttersprachler									
	Stundenanzahl									
	Jahre Unterricht		**,024**							
	Lehramtsstudium				**,073**					
3. Quartil	Klassengröße									
	Muttersprachler						**,073**			**,034**
	Stundenanzahl									
	Jahre Unterricht					**,020**	**,110**	**,045**		
	Lehramtsstudium								**,044**	
4. Quartil	Klassengröße				,010		,024			
	Muttersprachler									
	Stundenanzahl									
	Jahre Unterricht									
	Lehramtsstudium									

Abb. 2 Signifikante Einflussvariablen

Im Folgenden werden überblicksartig die Ergebnisse zusammengefasst (detaillierte Ergebnisse: vgl. Rinkens, Eilerts, Seifert 2014, in Vorb.).

Klassengröße und Anteil von Kindern, die Deutsch nicht als Muttersprache haben, werden landläufig als Größen betrachtet, die Einfluss auf die Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler haben. In unserer Studie kann keine dieser Variablen die Varianz in den Rechenleistungen erklären. Es gibt zwar Teileffekte, sie haben jedoch nur geringe Effektstärke. Die Feldstudie bestätigt also ein Ergebnis der Hattie-Studie (2013), nach dem die Klassengröße einen vergleichsweise geringen Einfluss auf die Schülerleistung zu haben scheint. Nach Lankes et. al (2010) könnte ein Grund da-

[1] Cluster Null: $x - 0$ und $x - x$ mit $1 \leq x \leq 20$ (40 Aufgaben)
Cluster =1: $x - y = 1$ mit $2 \leq x \leq 20$ (19 Aufgaben)
Cluster =10: $x - y = 10$ mit $11 \leq x \leq 19$ (9 Aufgaben)
Cluster hZ1: $1 \leq x - y \leq 10$ mit $2 \leq x < y < 10$ (28 Aufgaben)
Cluster hZ2: $x - y \leq 10$ mit $x > 10$, $y = 2, 3, 4$ (6 Aufgaben)
Cluster hZ3: $x - y > 10$ mit $13 \leq x \leq 20$, $y = 2, 3, 4$ (21 Aufgaben)
Cluster hZ4: $x - y < 10$ mit $x > 10$, $y = 5, 6, 7, 8$ (22 Aufgaben)
Cluster hZ5: $x - y > 10$ mit $x > 10$, $y = 5, 6, 7, 8$ (14 Aufgaben)

für sein, dass sich die Unterrichtsmuster in großen oder kleinen Klassen zumeist nicht unterscheiden, die Lehrpersonen also die pädagogischen Möglichkeiten kleinerer Klassen nicht wahrnehmen oder ausschöpfen. Die geringen Disparitäten zwischen Kindern mit und ohne Zuwanderungshintergrund in der vorliegenden Studie könnten darin liegen, dass sich im Falle der mathematischen Basiskompetenzen eine ausführlichere Einführung durch die Lehrperson, bedingt durch den höheren Anteil von Nicht-Muttersprachlern, förderlich für alle Kinder auswirkt.

Lehrpersonen haben entscheidenden Einfluss auf die Kompetenzentwicklung eines Kindes. Die Frage ist, welche Merkmale einer Lehrperson besonders wirksam werden. In dieser Studie werden die Variablen Unterrichtserfahrung (in Jahren) und Ausbildung (mit vs. ohne Fachstudium) statistisch ausgewertet. Das Erfassen der Variablen Ausbildung wird allerdings durch die bis heute zu beobachtende Heterogenität der Grundschullehrerausbildung in Deutschland stark erschwert: eine Lehrperson mag ihre Ausbildung als „Fachstudium“ ansehen, die zu einer anderen Zeit und in einem anderen Bundesland, nicht als solche anerkannt (worden) wäre.

Auch bezüglich der Lehrervariablen Unterrichtserfahrung und Fachausbildung ist festzustellen: In unserer Studie lassen sich Zusammenhänge zu den Rechenleistungen der Kinder nur in Teilbereichen, oft allerdings entgegengesetzt zu der erwarteten Richtung, immer aber nur mit geringer Effektstärke nachweisen.

Literatur

Hattie, J., Beywl, W. & Zierer, K. (2013). Lernen sichtbar machen . Baltmannsweiler: Schneider Verlag.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV. Münster: Waxmann.

Lankes, E.-M. & Carstensen, C. H. (2010). Kann man große Klassen erfolgreich unterrichten? In W. Bos, S. Hornberg, K.-H. Arnold, G. Faust, L. Fried, E.-M. Lankes et al. (Hrsg.), IGLU 2006 – Die Grundschule auf dem Prüfstand. Vertiefende Analysen zu Rahmenbedingungen schulischen Lernens (S. 121–142). Münster: Waxmann.

Prenzel, M., Sälzer, C., Klieme, E. & Köller, O. (Hrsg.). PISA 2012. Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland. http://www.pisa.tum.de/fileadmin/w00bgi/www/Berichtband_und_Zusammenfassung_2012/PISA_EBook_ISBN3001.pdf. Gesehen 27.01.2014

Rinkens, H.-D. (2011). Test zur Erfassung der Rechenfertigkeit von Erstklässlern im Bereich der Addition und Subtraktion. Internetmanuskript http://www.rinkens-hd.de/images/projekte/TestErstkl.pdf. Gesehen 27.01.2014

Rinkens, H.-D., Eilerts, K. & Seifert, A. (i.Vorb.). Zur Rechenfertigkeit von Erstklässlern im Bereich der Subtraktion und möglichen Wirkungsfaktoren.

Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Korschenbroich

Ein kalkülfreier Zugang zu Grundvorstellungen der Analysis[1]

Bei der Einführung in die Differentialrechnung ist im Unterricht immer wieder festzustellen, dass (zu früh) der Kalkül die Oberhand gewinnt. Ohne tragfähiges anschauliches Grundverständnis werden dann z. B. Ableitungen nur mechanisch ermittelt. Mit modernen digitalen Werkzeugen wie z. B. GeoGebra können aber Schüler in der Sekundarstufe II „ohne jeden Kalkül adäquate Grundvorstellungen zum Begriff der Ableitung und des Integrals aufbauen“ (Büchter; Henn 2010). Dabei stehen das Entdecken und die Verständnisförderung im Vordergrund. Wie dies mit dynamischen Arbeitsblättern gelingen kann, soll im Folgenden gezeigt werden.

1. Kovariation

Bei der Betrachtung von Funktionen steht hier der dynamische Kovariationsaspekt im Vordergrund. Zu *einem* x betrachten wir das *zugehörige* y und untersuchen die Auswirkungen der Änderung der unabhängigen Veränderlichen x auf die abhängige Veränderliche y. Ein Funktionsgraph *entsteht* dabei punktweise als Spur bzw. Ortslinie von P(x; y) (Elschenbroich 2003).

2. Von der Sekante zur Ableitung

Man untersucht zunächst klassisch den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Näherungsprozess von Sekanten an der Stelle a. Wird h immer näher an Null angenähert (h = 0,01 reicht für die Bildschirmauflösung), so erkennt man, dass die linksseitige und die rechtsseitige Sekante einander immer näher kommen und anschaulich zur Tangente an den Graphen von f(x) im Punkte A werden. Aus der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigung für ein zunächst festes h kann man nun Punkte D_{re} und D_{li} erzeugen, die die jeweilige Sekantensteigung an der Stelle x = a repräsentieren. Bei Variation von a entstehen dann als Ortslinie die Graphen der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigungs*funktion* (für festes h). Nun kann man das h mittels Schieberegler immer kleiner werden lassen, bis es ‚nahezu Null‘ ist. Dabei lässt sich schön beobachten, dass die Graphen der beiden Sekantensteigungsfunktionen sich immer mehr annähern, bis sie schließlich im Rahmen der Bildschirmauflösung zusammenfallen. Man kommt so zur *anschaulichen* Tangentensteigungsfunktion.

[1] Der Text ist eine gekürzte Fassung von Elschenbroich (2014). Die GeoGebra-Dateien basieren auf Elschenbroich/ Seebach (o.Jg.).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 337–340). Münster: WTM-Verlag

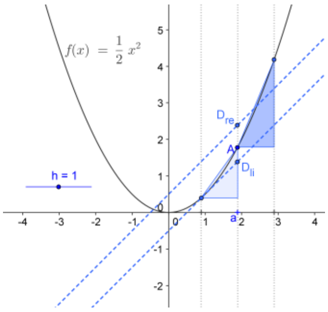


Abb. 1a. Sekantensteigungsfunktionen

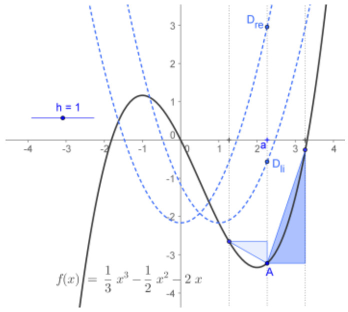


Abb. 1b. Sekantensteigungsfunktionen

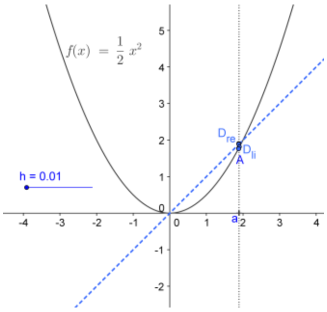


Abb. 2a. anschauliche Tangentensteigungsfkt.

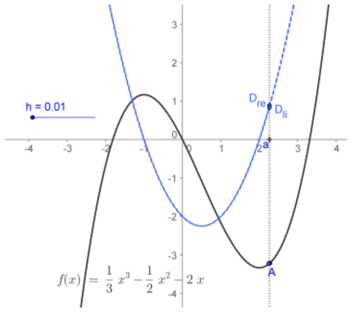


Abb. 2b. anschauliche Tangentensteigungsfkt.

3. Vom Kreis zur Krümmung

So wie der Zugang zur Steigung linear mittels Sekanten über die drei Punkte A(a; f(a)), A_{li}(a-h; f(a-h)) und A_{re}(a+h; f(a+h)) erfolgt, so ist es naheliegend, einen gekrümmten Funktionsgraphen mit der einfachsten gekrümmten Linie durch diese drei Punkte, einem Kreis, anzunähern und sein Verhalten zu untersuchen, wenn h immer mehr an Null angenähert wird. Konstruiert man noch den Mittelpunkt M und den Radius , so wird deutlich, dass der Kreismittelpunkt M und der Radius r sich schließlich nur noch geringfügig ändern, wenn h immer mehr an Null angenähert wird.

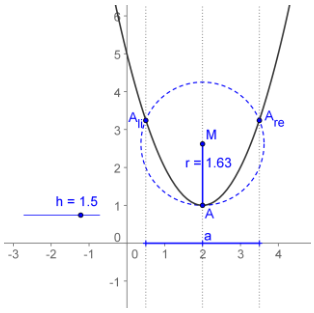


Abb. 3a. Schritt zum Krümmungskreis

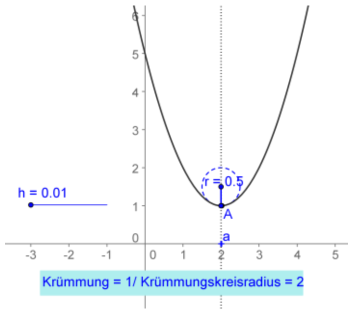


Abb. 3b. anschaulicher Krümmungskreis

Wir erhalten so einen anschaulichen dynamischen Zugang zum Krümmungskreis als Grenzlage und (betraglich) zur Krümmung des Funktionsgraphen an der Stelle a als Kehrwert des Krümmungskreisradius.

4. Von der Unter-/ Obersumme zur Integralfunktion

Das Berechnen von Produktsummen und der Übergang zum bestimmten Integral, dann der Übergang zum unbestimmten Integral und schließlich zur Integralfunktion sind für Schüler konzeptionell wie algebraisch eine Herausforderung. Auch hier ist die Unterstützung durch dynamische Software hilfreich.

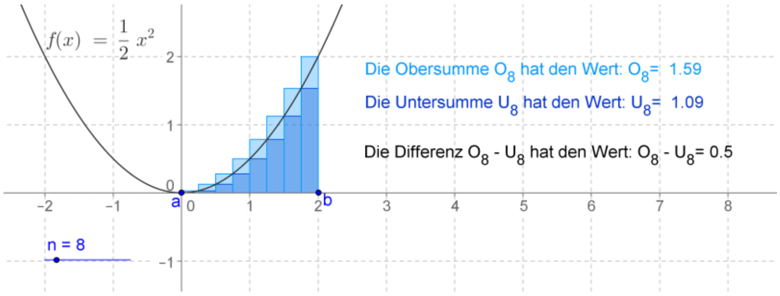


Abb. 4. Unter- und Obersumme

Man beginnt klassisch mit Unter- und Obersummen und kann dann problemlos die Anzahl n der Unterteilungen ändern oder die Lage von b und a. Die Werte von O_n, U_n und deren Differenz liefert hier die Software, und man erkennt ohne mühsame Rechnungen, dass sich für zunehmend größeres n die Werte von O_n und U_n einander annähern und der Unterschied gegen Null geht. Dies ist der Schritt zum bestimmten Integral von f über [a;b]. Nun kann man wieder passend zu b den Wert von U_n und O_n als y-Koordinate in einen Punkt US_n bzw. OS_n einbringen und das Verhalten der beiden Punkte für wachsendes n untersuchen. Erwartungsgemäß nähern sich diese beiden Punkte immer mehr einander an, je größer die Zahl n der Unterteilungen wird (aber deutlich langsamer als bei der Ableitung).

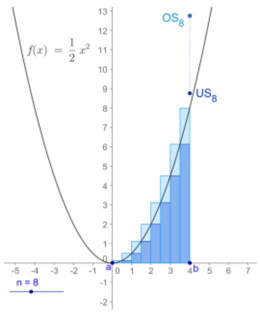


Abb. 5a. Ober-/ Untersumme OS_8, US_8

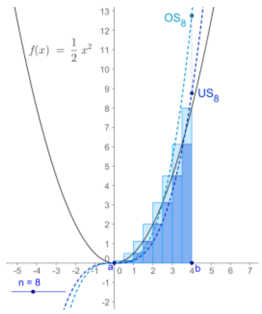


Abb. 5b. Ortslinien von OS_8 und US_8

Es bietet sich nun auch analog zum Vorgehen bei der Ableitung an, das Verhalten dieser beiden Punkte zu untersuchen, wenn b variiert wird, und sie in Abhängigkeit von b Ortslinien zeichnen zu lassen. Man erhält so für festes n eine Untersummen*funktion* und eine Obersummen*funktion*, deren

Graphen eine Art Trichter bilden. Für größeres n nähern sich diese einander immer mehr an und schachteln die *anschauliche* Integralfunktion von f (mit der unteren Grenze a) ein.

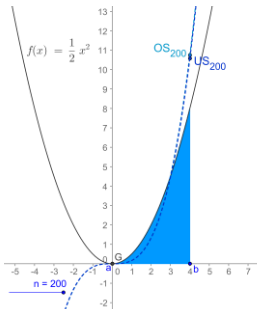


Abb. 6a: Ortslinien von OS_{200} und US_{200}

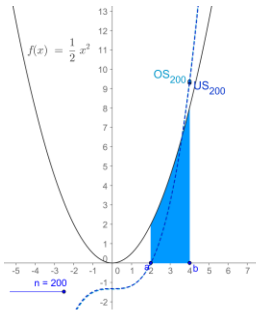


Abb. 6b. Variation von a

Verändert man nun a, so verschieben sich die Graphen der Untersummenfunktion und Obersummenfunktion und der eingeschachtelten anschaulichen Integralfunktion offensichtlich um eine Konstante. Damit ist jetzt das Grundverständnis für die Integralfunktion und den HDI gelegt!

5. Zum Schluss

Ein solch anschaulich dynamischer Zugang ist natürlich nur für hinreichend gutartige Funktionen zulässig (wie sie aber in der Schule fast ausschließlich vorkommen). Er ist enorm hilfreich für den Aufbau von Grundverständnis, weil er der Theorie eine anschauliche Grundlage gibt. Er behindert und ersetzt keine Theoriebildung, sondern bereitet sie vor und gibt ihr eine Basis. Der gezeigte Zugang ist auch nur auf der Oberfläche der Lernumgebung für die Schüler kalkülfrei, im Hintergrund wird von der Software natürlich intensiv gerechnet. Bemerkenswert ist dabei, dass der gezeigte Zugang zur Ableitungsfunktion und zur Integralfunktion durch die Erzeugung von Ortslinien anschaulich und *ohne vorherige Kenntnis* ihrer Funktionsterme erfolgt. Ein schönes Beispiel dafür, dass der Einsatz von digitalen Werkzeugen einen echten Mehrwert liefert und neue Wege zum Verständnis komplexer Begriffsbildungen eröffnet.

Literatur

Büchter, A.; Henn, H.-W. (2010): Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Elschenbroich, H.-J. (2014): Digitale Werkzeuge im Analysis-Unterricht. In: *Blum, W. et al. (Hrsg.): Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II.* Diesterweg.

Elschenbroich, H.-J; Seebach, G. (o. Jg.): Dynamisch Funktionen entdecken. DZLM

Elschenbroich, H.-J. (2003): Ein dynamischer Zugang zu Funktionen und Gleichungen. In: *MNU 56/8* (S. 454 – 460)

Franz EMBACHER

Kompetenzen hinsichtlich der Methode der Fallunterscheidungen.

1. Hintergrund

Fallunterscheidungen zählen zu den mathematischen Methoden, die vor allem in technischen und ingenieurwissenschaftlichen Fächern in ganz praktischer Hinsicht wichtig sind, etwa beim Implementieren von technischen Ablaufplänen und Simulationen. Im Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe 2 wird die Methode der Fallunterscheidungen vor allem beim Lösen von Bruchungleichungen und Betrags(un)gleichungen angewandt, seltener hingegen als Hilfsmittel beim Beweisen, als Beispiel einer mathematischen Argumentationsform *par excellence*.

Fallunterscheidungen – insbesondere in den im Mathematikunterricht angewandten Kontexten – werden, neben anderen Themen, in den an der Fachhochschule Technikum Wien [1] angebotenen Mathematik-Vorkursen behandelt. Im Rahmen der Abhaltung dieser Vorkurse im Sommer 2012 und im Sommer 2013 konnte der Autor einen Eindruck von den Schwierigkeiten der Studierenden bei der Anwendung von Methoden, die auf Fallunterscheidungen beruhen, gewinnen.

Probleme von StudienanfängerInnen hinsichtlich der mathematischen Anforderungen in technischen und ingenieurwissenschaftlichen Fächern sind bekannt und werden in der wachsenden Literatur zu diesem Themenkomplex (siehe etwa [2]) in vielfältigen Schattierungen dokumentiert. Oft, wie auch an der Fachhochschule Technikum Wien, wird versucht, Wissens- und Kompetenzlücken in Vor- und Brückenkurse zu schließen. Ergänzend dazu kann die Untersuchung von Schwierigkeiten im Umgang mit konkreten Inhalten und Methoden Hinweise für den Mathematikunterricht liefern, um die zukünftigen StudienanfängerInnen bereits im schulischen Vorfeld auf die erwarteten Anforderungen vorzubereiten.

Als im Sommer 2013 der Entschluss fiel, speziell die Kompetenzen hinsichtlich der Methode der Fallunterscheidungen in einer kleinen Erhebung genauer zu untersuchen, standen die Studierenden der Fachhochschule nicht mehr zur Verfügung, wohl aber mehrere Studierendengruppen an der Universität Wien. An eine erste, im Sommer und im Herbst 2013 durchgeführte Untersuchung schloss sich eine zweite Erhebung im Jänner 2014 an.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 341–344). Münster: WTM-Verlag

2. Empirische Untersuchung Sommer/Herbst 2013

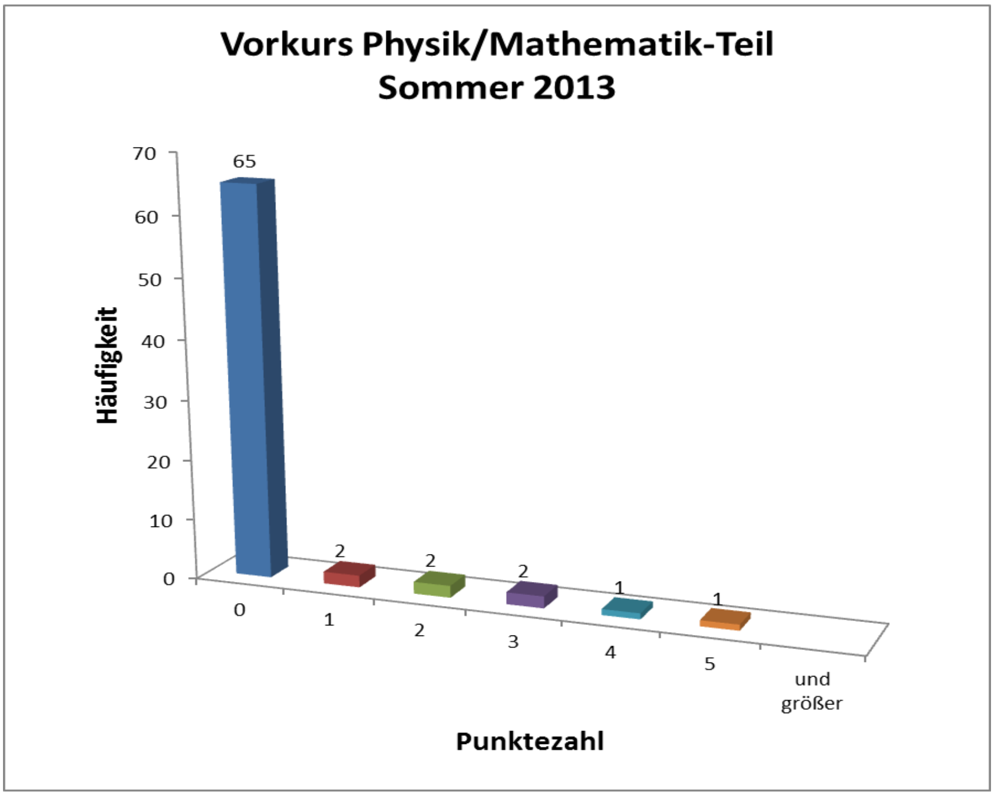
Für die erste Untersuchung wurden zwei Studierendengruppen der Universität Wien herangezogen:

- 73 TeilnehmerInnen am „Vorkurs Physik/Mathematik-Teil" der Fakultät für Physik im Sommer 2013. Es handelt sich um Physik-Studierende vor dem ersten Semester, die als eine mehr oder weniger typische Gruppe von StudienanfängerInnen angesehen werden können, die ein Fach gewählt haben, in dem mathematische Methoden eine gewisse Rolle spielen, die aber zum Großteil nicht im engeren Sinn an Mathematik interessiert sind.
- 25 TeilnehmerInnen am „Seminar zur Unterrichtsplanung" im Rahmen des Mathematik-Lehramtsstudiums. Es handelt sich um Studierende typischerweise im 5. – 9. Semester, die als „angehende Mathematik-Lehrkräfte" angesehen werden können.

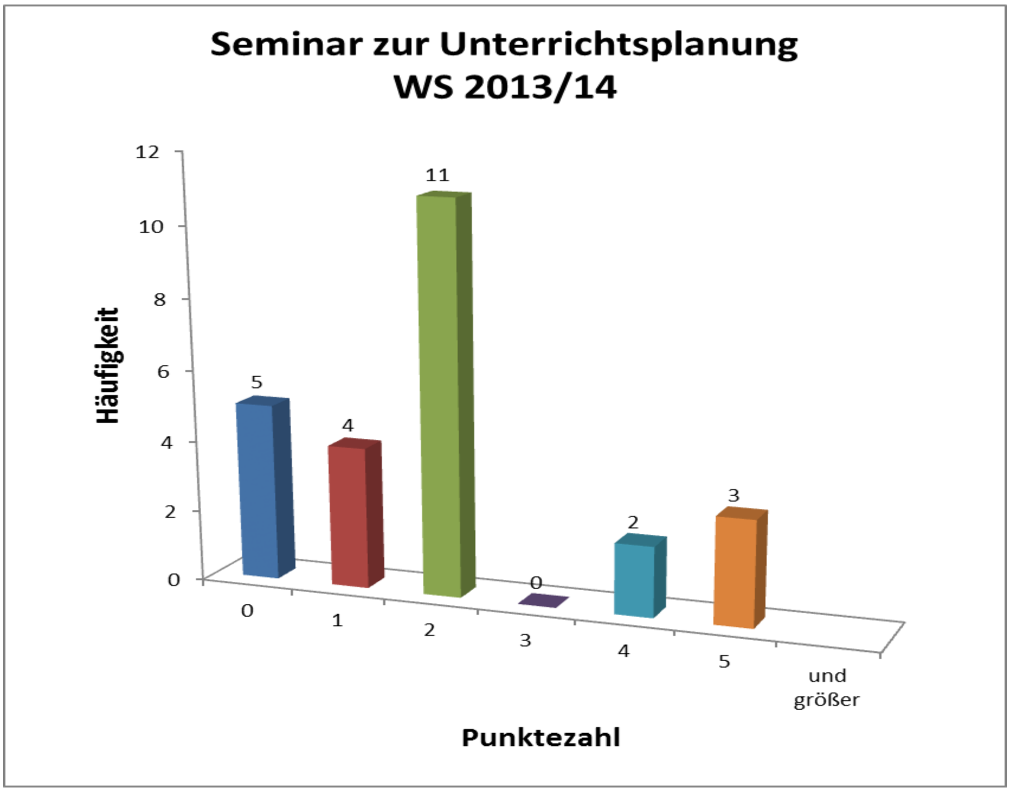
Beiden Studierendengruppen wurde (ohne Vorbereitung) die Aufgabe gestellt, die Bruchungleichung $\frac{2x-1}{x-1} < 1$ mit Hilfe der Methode der Fallunterscheidungen zu lösen. Bereits vorab wurde vermutet, dass eine besondere Schwierigkeit bei einer auf den beiden möglichen Vorzeichen des Nenners $x-1$ beruhenden Fallunterscheidung darin besteht, dass jeweils *nach* der Ermittlung der Lösung der für jeden Fall erhaltenen (linearen) Ungleichung darauf vergessen wird, die entsprechende Fallbedingung (d.h. eine der Bedingungen $x-1 > 0$ und $x-1 < 0$, die die beiden zu bearbeitenden Fälle definieren) zu berücksichtigen. Daher wurde folgendes Punkteschema für die Bewertung veranschlagt:

Punkte	Beschreibung
0	keine adäquate Fallunterscheidung angesetzt
1	adäquate Fallunterscheidung angesetzt, maximal 1 Fall ausgeführt, Fallbedingung nicht berücksichtigt
2	adäquate Fallunterscheidung angesetzt, alle Fälle ausgeführt, Fallbedingungen nicht berücksichtigt
3	adäquate Fallunterscheidung angesetzt, 1 Fall ausgeführt, Fallbedingung berücksichtigt
4	adäquate Fallunterscheidung angesetzt, alle Fälle ausgeführt, Fallbedingungen berücksichtigt, Fälle nicht (korrekt) zu einer Gesamtlösung kombiniert
5	Fallunterscheidungen richtig durchgeführt und (korrekt) zur Gesamtlösung kombiniert

Das Ergebnis für die Gruppe der Physik-StudienanfängerInnen



lässt praktisch keine Erinnerung an eine frühere Anwendung der Methode erkennen. Das Ergebnis der zukünftigen Mathematik-Lehrkräfte



fiel erwartungsgemäß besser aus. Dennoch konnten nur 12% die Aufgabe korrekt lösen. 44% der Studierenden erzielten 2 Punkte, d.h. sie berücksichtigten die Fallbedingungen nicht und erzielten keine oder eine falsche Lösung.

3. Empirische Untersuchung Jänner 2014

In einer Nachfolgeuntersuchung mit TeilnehmerInnen einer Mathematik-Vorlesung für Physik-Lehramtsstudierende (die nicht gleichzeitig Mathematik studieren) und mit den Studierenden im „Seminar zur Unterrichtplanung“, die auch an der ersten Untersuchung teilnahmen, wurde eine Aufgabe gestellt, die eine Fallunterscheidung in einem *nichtmathematischen* Kontext (Kriminalfall, Fallunterscheidung nach dem Geschlecht der Tatverdächtigen) beinhaltete. Erstaunlicherweise erzielten die Studierenden schlechtere Ergebnisse als bei einer zum Vergleich gestellten Bruchungleichungs-Aufgabe vom obigen Typ!

Bereits bei der Erstellung des „Kriminalfalls“ hatte der Autor den Eindruck, dass es im Alltagsleben kaum Situationen gibt, in denen die Gefahr besteht, eine „Fallbedingung“ zu vergessen! Dies wurde dadurch untermauert, dass einige Studierende in einem Gespräch nach der Erhebung die Krimi-Aufgabenstellung (bei der sie in das Korsett einer formellen Fallunterscheidung gezwängt wurden) als *unnatürlich* bezeichneten, d.h. die eigentliche Aufgabenstellung schlicht und einfach nicht verstanden!

4. Resümee

Das Hauptproblem scheint von der nichttrivialen Logik herzurühren, die die Methode der Fallunterscheidungen mit sich bringt, wenn sie in den „traditionellen“ Kontexten wie Bruchungleichungen [und wohl auch Betrags(un)gleichungen] angewandt wird. Eine mögliche Abhilfe bestünde nach Ansicht des Autors darin, Fallunterscheidungen im Mathematikunterricht von diesen problematischen Kontexten zu befreien und in logisch einsichtigeren Zusammenhängen (wie einfachen Beweisaufgaben) einzusetzen. So könnte auch ihr Ruf verbessert werden, den ihnen der fast ausschließliche Einsatz beim Lösen einer kleinen (und vielfach unbeliebten) Klasse von Gleichungen und Ungleichungen eingebracht hat.

Literatur

[1] Website: http://www.technikum-wien.at/.

[2] Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S. & Wassong, T. (Hrsg.) (2014): *Mathematische Vor-und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*, Springer Spektrum: Wiesbaden.

Kirstin ERATH, Susanne PREDIGER, Dortmund

Was wird zum Erklären gelernt? Konstitution eines Lerngegenstands in der Klasseninteraktion

Erklären lernt man im Mathematikunterricht nicht durch Instruktion oder reine Konstruktion, sondern in den Interaktionen zwischen allen Beteiligten. Doch was genau wird in den jeweiligen Klassen dazu tatsächlich gelernt? Ist der Lerngegenstand überhaupt in allen Klassen gleich? Wenn nicht, inwiefern unterscheidet er sich?

Die interdisziplinäre Videostudie INTERPASS untersucht Mathematik- und Deutschklassen des 5. Jahrgangs im Hinblick auf mikrokulturell etablierte sprachliche Praktiken (120 h Video). Die Konzeptualisierung von Erklärpraktiken als Navigieren durch epistemische Felder ermöglicht die Erfassung der fachkulturell-epistemischen Dimension einer solchen Praktik (Prediger & Erath 2014; Erath & Prediger 2014). Der Beitrag skizziert an zwei Fallbeispielen die Kontingenzen zwischen in verschiedenen Mikrokulturen etablierten Praktiken.

Theoretische Einbettung: Konzeptualisierung von „Erklären können"

Der Fokus der Studie auf die Unterrichtsinteraktion und die Mündlichkeit der Diskurspraktiken legen nahe, eine interaktionistische Perspektive auf Unterricht einzunehmen (Yackel 2004; Cobb & Bauersfeld 1995). Dabei werden mathematische Aktivitäten im Unterricht in sozialer Dimension konzeptualisiert und „insbesondere auf die Dynamik und die Regulierungen der Mikrokultur" (Voigt 1994, S. 83) fokussiert. Zur Beschreibung von Mikrokulturen haben sich die Konstrukte soziomathematische Norm (Voigt 1994) und mathematische Praktiken (Cobb 1998) bewährt. Vor diesem Hintergrund wird „Erklären" als in den jeweiligen Mikrokulturen etablierte Praktiken, die durch verschiedene soziale und soziomathematische Normen geprägt werden, konzeptualisiert. Ob Kinder gut gelernt haben zu erklären, ist in dieser Perspektive nicht an Kriterien objektivierbarer Gültigkeit zu messen, sondern zu untersuchen im Hinblick auf die Passung zu den in der Mikrokultur etablierten Normen und Praktiken (Yackel 2004, S. 3).

Beschreibungssprache des Navigierens durch epistemische Felder

Erklären ist linguistisch definiert als das systematische und strukturierte Bilden und Verknüpfen von Wissen, des Explanandums (das was erklärt wird) mit dem Explanans (das womit erklärt wird) (Morek 2012). Um den fachlichen Aspekt von Erklärpraktiken fassen zu können, werden Explanandum und Explanans durch logische Ebenen bzw. epistemische Modi

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 345–348). Münster: WTM-Verlag

weiter ausdifferenziert. Ergebnis ist die in Abbildung 1 dargestellte Matrix der epistemischen Felder, die sich als Verknüpfungen von logischen Ebenen und epistemischen Modi ergeben. Als Ausgangspunkt dient eine Matrix mit Wissensarten und -facetten, die zunächst für Designzwecke zusammengestellt wurde (Prediger, Barzel, Leuders & Hußmann 2011 in Anlehnung an Hiebert 1986 für die Ebenen und Winter 1983 für die epistemischen Modi). Die Matrix wurde datengeleitet modifiziert, sodass nun alle in der unterrichtlichen Interaktion geforderten oder gegebenen Erklärungen mit Hilfe der epistemischen Felder charakterisiert werden können.

Längere Erklärsequenzen sind meist durch das Ansteuern verschiedener Felder geprägt. Daher werden Erklärpraktiken konzeptualisiert als Praktiken des meist lehrkraftgesteuerten, aber interaktiv realisierten Navigierens durch epistemische Felder (vgl. ausführlicher Prediger & Erath 2014).

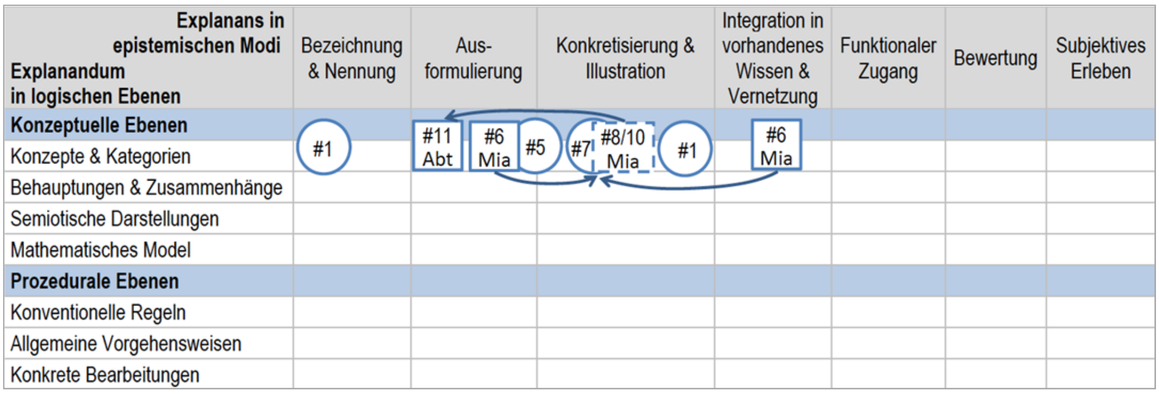


Abbildung 1: Matrix der epistemischen Felder mit Navigationspfad der Erklärung von Mia

Vergleiche aus Fallstudien in Klasse 5

Die erste Sequenz stammt aus der zweiten Mathestunde einer 5. Gesamtschulklasse. Die Lehrerin, Frau Bosch, setzt jeweils recht unspezifische Zugzwänge zur Wiederholung von Begriffen (#11 bzw. #15) und adressiert somit auf der Ebene der --Konzepte & Kategorien-- viele epistemische Modi, ||Ausformulierung / Konkretisierung & Illustration / Integration in vorhandenes Wissen & Vernetzung / Funktionaler Zugang||:

11	leh	[…] WAS war jetzt strichliste; WAS war häufigkeitstabelle; (.) der TEIL. (--) barbara, (-)
12	bar	STRICHliste ist (.) wo man (.) striche gemacht hat; (-) und HÄUfigkeitstabelle ist da we ist also (4.0) ähm, (---)
13	leh	kannst du HELfen maria? (.)
14	mar	JA; wenn man das alles dann zusammen geZÄHLT hat, und das durch zahlen daHIN geschrieben hat. (.)
15	leh	geNAU. (-) gut erFASST, und war jetzt nochmal ne URliste? (4.0) olaf, (-)
16	ola	wo die informationen über die kinder (.) DRINstehn;
17	leh	geNAU; die GRO:ße liste, […]

Barbara (#12) und Maria (#14) erklären die Begriffe in Form einer ||Ausformulierung|| der jeweiligen --Allgemeinen Vorgehensweise-- zur Erstellung der Listen. Olaf hingegen steuert mit seiner Erklärung am Beispiel (#16) das Feld --Konzepte & Kategorien-- ||Konkretisierung & Illustration|| an. Beides wird von der Lehrerin (#15 bzw. #17) als passend markiert. Der hier rekonstruierte Navigationspfad ist typisch für eine in der Mikrokultur immer wieder rekonstruierbare Praktik: Eine Erklärung in der logischen Ebene --Konzepte & Kategorien-- umfasst verschiedene Modi, meistens insbesondere ||Konkretisierung & Illustration||. Ein Sprung auf die prozedurale Ebene --Allgemeine Vorgehensweise-- wird oft für die ||Ausformulierung|| vorgenommen.

Ein davon abweichender Navigationspfad für eine Begriffserklärung kann in folgender Sequenz aus einer Wiederholungsphase der 5. Gesamtschulklasse von Frau Abt rekonstruiert werden. Ihr einleitender Zugzwang (#1) adressiert die epistemischen Felder --Konzepte & Kategorien-- ||Nennungen & Bezeichnungen / Konkretisierung & Illustration||:

1	leh	[…] welche FACHbegriffe haben wir bisher gelernt; ihr könnt das GERne (.) anhand dieses diagramms nochmal erläutern; […]
	(…)	
5	leh	[…] WER erklärt das minimum; (---) mia; […]
6	mia	minimum ist das WEnigerere, (.) ähm das GEgenteil von maximum;
7	leh	ä:hm könnte das minimum jetzt hier auch die KATze sein; (--) […]
	(…)	
11	leh	((*Notiert W für Wert*)) ok; (.) also es ist immer der KLEINSte wert; […]

In den nicht abgedruckten #2-4, nennt ein Schüler die Begriffe Minimum, Maximum und Spannweite, ein anderer erklärt das Maximum in den Feldern --Konzepte & Kategorien-- ||Ausformulierung / Konkretisierung & Illustration||. Beides wird positiv evaluiert und die Lehrerin hält eine verkürzte ||Ausformulierung|| an der Tafel fest. In Bezug auf #1 und der vorherigen Erklärung wird der Zugzwang (#5) der Lehrerin mit den Feldern --Konzepte & Kategorien-- ||Ausformulierung / Konkretisierung & Illustration|| charakterisiert. Mias Erklärung (#6) ist auf derselben Ebene im Modus ||Ausformulierung / Integration in vorhandenes Wissen & Vernetzung|| verortet. Die Lehrerin steuert mit ihrer Nachfrage (#7) Mias Erklärung in den Modus ||Konkretisierung & Illustration|| und übernimmt im Anschluss die ||Ausformulierung|| selbst (#11). Der hier rekonstruierte Navigationspfad ist in Abb. 1 visualisiert. Er ist typisch für eine in dieser Mikrokultur wiederholt rekonstruierbare Erklärpraktik: Die Schülerinnen und Schüler erklären vor allem im Konkreten (Modus ||Konkretisierung & Illustration|| bzw. Ebene --Konkrete Bearbeitung--) während die Lehrerin Verallgemeinerungen und konzeptuelle Anteile selbst übernimmt (Ebenen --Konzepte

& Kategorien / Allgemeine Vorgehensweise--). Der Lerngegenstand Erklären konstituiert sich somit anders als bei Frau Bosch.

Fazit

Die Beschreibungssprache des Navigierens durch epistemische Felder erweist sich in den Analysen als wichtiges Hilfsmittel zur Erfassung des mathematischen Kerns von Erklärpraktiken. Der Vergleich der damit rekonstruierten Praktiken zeigt, dass sich diese zwischen Mikrokulturen sowohl bzgl. des Explanandums als auch des Explanans unterscheiden. Die beiden vorgestellten Sequenzen zeigen dies exemplarisch für Begriffserklärungen (für Anleitungen zu Rechenverfahren siehe Prediger & Erath 2014; für das Thema der beschreibenden Statistik siehe Erath & Prediger 2014). Dieser als Kontingenz bezeichnete Befund wirft Fragen hinsichtlich der Vergleichbarkeit des Lerngegenstands über verschiedene Klassen hinweg auf.

Projektkontext. Das Projekt INTERPASS wird zusammen mit Anna-Marietha Vogler, Uta Quasthoff und Vivien Heller durchgeführt und mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert (Förderkennzeichen 01JC1112). Die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autorinnen.

Literatur

Cobb, P. (1998). Analyzing the mathematical learning of the classroom community. In A. Olivier (Hrsg.), *Proceedings of PME 22* (Vol. 1, pp. 33-48). Stellenbosch: UP.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Hrsg.). (1995). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Erath, K., & Prediger, S. (2014, eingereicht). Mathematical practices as underdetermined learning goals: the case of explaining diagrams. Eingereicht.

Hiebert, J. (Hrsg.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Morek, M. (2012). *Kinder Erklären. Interaktionen in Familie und Unterricht im Vergleich*. Tübingen: Stauffenburg.

Prediger, S., & Erath, K. (2014, eingereicht). Content or interaction, or both? Synthesizing two German traditions in a video study on learning to explain. Eingereicht.

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T., & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern - Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. Mathematik lehren, 164, 2-9.

Voigt, J. (1994). Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständnis* (pp. 77-111). Köln: Aulis.

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 4*(3), 175-204.

Yackel, E. (2004). Theoretical perspectives for analyzing explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 8*(1), 1-18.

Viktor FAST, Bielefeld

Sprachsensibler Mathematikunterricht an Hauptschulen

Wann und wie genau stellt Sprache im MU ein Lernhindernis dar? Mit dieser Frage beschäftigt sich die Mathematikdidaktik seit ihrer Entstehung (Prediger 2013). Ein Überblick über die reiche Forschungsgeschichte findet sich beispielsweise bei Meier und Schwieger (1999).

Im deutschsprachigen Raum hat sich als einer der ersten Josef Leisen als praktizierender Lehrer an deutschen Schulen im Ausland mit der Herausforderung der Mehrsprachigkeit bei Schülerinnen und Schülern beschäftigt. In diesem Zusammenhang wurden von ihm verschiedene Aufgabentypen und Methoden für den Unterricht entwickelt sowie Lehrerhandreichungen für die Sensibilisierung von Lehrerinnen und Lehrern auf der Basis eigener Erfahrungen verfasst. Diesem Feld der mehrsprachig aufwachsenden Schülerinnen und Schüler widmet sich die deutsche Fachdidaktik mit zunehmender Intensität.

Ein sehr bekanntes und großes Forschungsprojekt zu dieser Thematik ist das von Susanne Prediger geleitete MuM-Projekt (Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit), das die Herausforderungen der Mehrsprachigkeit aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet.

Vorbereitungen und Anforschung

Praktische Erfahrungen zu dieser Thematik haben wir im Förbi-Projekt der Universität Bielefeld sammeln können. Es handelt sich um ein Projekt, das Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund individuell fördert. In diesem Projekt werden verschiedene Fächer bedient; unter anderem Mathematik, welches in Kooperation der Mathematikdidaktik und der Abteilung DaZ (Deutsch als Zweitsprache) der Fakultät für Linguistik und Literaturwissenschaft gestaltet wird. Für die Anforschung hat sich dieses Konzept insofern als sinnvoll erwiesen, weil eine konzentrierte Auseinandersetzung mit der spezifischen Zielgruppe stattfinden konnte.

Im Wesentlichen wurde die Umsetzbarkeit verschiedener Methoden in videographierten Einzellfallstudien erprobt und analysiert. Die Ergebnisse sind wenig überraschend: Für Lehrkräfte ist es schwer zu diagnostizieren, ob und welche sprachlichen Mängel ein Schüler/eine Schülerin aufweist. Dies spiegelte sich in Aussagen wie der folgenden wider: „Die haben keine Sprachprobleme, die können nicht rechnen. Und wenn die Basics fehlen, macht der Umgang mit vertiefenden Inhalten keinen Sinn.“ Diese Einschätzung muss zum einen nicht falsch sein, ist allerdings auch darauf zu-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 349–352). Münster: WTM-Verlag

rückzuführen, dass die Alltagssprache in der Regel gut beherrscht wird und die Schülerinnen und Schüler nach Möglichkeit versuchen, ihre Defizite zu verbergen. Sprachliche Defizite, die mathematische Leistungen verhindern, zu diagnostizieren, ist sehr schwierig: Vermeintliche Hürden erweisen sich als problemlos, andere verbergen sich und sind nur durch hartnäckiges Nachfragen zu ermitteln (vgl. Renk et al., 2013). Erschwerend kommt hinzu, dass Schülerinnen und Schüler mit sprachlichen Schwächen den offensiven Umgang mit ihren Defiziten meiden – sie meiden Sprache. In den Unterrichtssettings wurde häufig genickt, auf etwas gezeigt oder einsilbig geantwortet. Eine weitere Strategie war das Abwarten, bis die Lehrerin oder der Lehrer aus den einsilbigen Antworten das *richtig Gemeinte* formuliert. Im Förderunterricht dauert es eine Weile bis diese Schutzhaltung in den kleinen Gruppen überwunden wird. Zur Überwindung dieser Schutzhaltung kann die Lehrkraft beitragen, indem sie zum einen das ausführliche Antworten einfordert und selbst nicht zu schnell einlenkt. Zum anderen sollte sie die Pause nach der Frage aushalten, den Schülerinnen und Schülern nicht ins Wort fallen, sondern sie ihre Antwort zu Ende formulieren lassen. Dies ist etwas, das vor allem unerfahrene Lehrkräfte verinnerlichen sollten.

Ein wichtiger Faktor für sprachsensiblen MU ist das Unterrichtsklima: Schülerinnen und Schüler mit sprachlichen Defiziten müssen im besonderen Maße aufgefordert werden, sodass sie sich trauen, nachzufragen, ohne das Gefühl haben zu müssen, die Klasse zu behindern oder für dumm gehalten zu werden.

Das BiSS-Projekt

Auf diesen Vorbereitungen basiert die Struktur unseres BiSS-Projektes. Das Projekt BiSS (Bildung durch Sprache und Schrift) ist ein auf fünf Jahre ausgelegtes Forschungs- und Entwicklungsprogramm für Kitas und Schulen, das zum Ziel hat, eine wissenschaftlich koordinierte und evaluierte Sprach- und Leseförderung sowie Diagnostik zu entwickeln. Beim BiSS-Projekt handelt es sich um eine Initiative des BMBF, BMFSFJ, der KMK und JFMK. Es gibt zurzeit 104 BiSS-Verbünde bundesweit. Ein Verbund besteht aus mehreren Schulen oder Kitas, die von Hochschulen angeleitet oder unterstützt werden. Einen Überblick der Verbünde gibt die Homepage des BiSS-Projekts (http://www.biss-sprachbildung.de). Von den 104 Verbünden widmen sich fünf dem Themenfeld Mathematik und Sprache.

Verbundpartner

Die Projektleitung unseres Verbundes *sprachsensibler Mathematikunterricht an Hauptschulen der Bildungsregion Ostwestfalen-Lippe* wird gestellt durch Herrn Höfer und Frau Kirchhof von der Bezirksregierung Detmold. Die partizipierenden Schulen sind die Hauptschule Ost Gütersloh, die Johannesschule Salzkotten, die Heinrich-Drake-Schule Lemgo und die Peter-Korschak-Schule Halle. Von den Schulen sind jeweils zwei siebte Klassen (davon zwei integrative Klassen) im Projekt angesiedelt. Wissenschaftlich begleitet wird das Projekt von den Universitäten Paderborn und Bielefeld.

Zielsetzung des Projekts

Das Ziel des Projekts ist die Erprobung und Evaluation von Unterrichtsmaterialen für sprachsensiblen MU. Das Projekt widmet sich der Frage, wie Sprache im MU konstruktiv genutzt werden kann, um tragfähige Grundvorstellungen aufzubauen.

Dafür sollen schriftliche und mündliche Unterrichtskommunikation im MU untersucht werden. Wie wird Mathematik im Unterricht der Hauptschulen kommuniziert? In welcher Abstraktion können Inhalte hier diskutiert werden? Besonders interessant wird dies in den beiden Inklusionsklassen sein.

Forschungsdesign

Im Anschluss an eine Auftaktveranstaltung, in der die Schulen über die angestrebte Struktur des Projekts aufgeklärt werden, soll ein Workshop mit den die siebten Klassen betreuenden Lehrkräften durchgeführt werden. In diesem Workshop wollen wir im ersten Teil die Erfahrungen der Lehrerinnen und Lehrer sammeln: Wie gehen Lehrkräfte mit den sprachlichen Schwächen der Schülerinnen und Schüler um? Inwiefern sehen sie Sprache als eines der Hauptprobleme? Wie stehen sie zum Spannungsfeld Sprachvereinfachung und Spracharbeit?

Der zweite Teil des Workshops widmet sich der Lehrereinschätzung zu Materialien und Unterrichtsmethoden. Es werden Unterrichtsformate vorgestellt, woraufhin die Lehrerinnen und Lehrer einschätzen sollen, inwiefern die Aufgaben und Methoden für ihre Schülerschaft lösbar sind. Es soll über den Grad der zumutbaren Selbstständigkeit beim entdeckenden Lernen bzw. über offene Aufgabenformate diskutiert werden. Dazu werden verschiedene Aufgabenformate in Gruppen im Hinblick auf die Fragestellung, ob sie für die Zielgruppe geeignet sind, bearbeitet. Ziel ist es, von den Erfahrungen der Lehrerinnen und Lehrer hinsichtlich praktikabler Unterrichtsreihen an Hauptschulen insofern zu profitieren, als wir von Seiten der Hochschulen sowohl für Lernende als auch für Lehrende geeignete Konzepte entwickeln. Dazu müssen keine neuen Formate erarbeitet werden, denn es gibt einen Kanon zahlreicher Methoden (vgl. Leisen 2013 oder Kuntze und Prediger 2013). Vielmehr geht es darum, vorhandene Methoden an konkrete Beispiele und an spezifische Zielgruppen anzupassen und zu erproben. Auf Grundlage der Einschätzungen der Lehrerinnen und Lehrer sollen im Rahmen eines Bachelor- und Masterseminars im Sommersemester 2014 Unterrichtsreihen konzipiert, erprobt und evaluiert werden.

Parallel dazu werden mittels Videographie Unterrichtsstunden – sowohl die Versuchsstunden als auch der Regelunterricht – aufgezeichnet, um sie hinsichtlich der Kommunikation im MU zu analysieren. Diese Daten sollen dann im Rahmen von qualitativ analysierten Einzellfallstudien Diagnosen ermöglichen.

Im Herbst 2014 ist die Auswertung der im Sommer erhobenen Daten angesetzt. Dabei sollen die Chancen und Herausforderungen des sprachsensiblen MU erörtert werden, sodass im Wintersemester 2014/2015 erfolgreiche Unterrichtsreihen im größerem Umfang erprobt werden können. Unterrichtsreihen, die nach diesem Durchgang als geeignet bewertet wurden, sollen dann in angebrachter Weise publiziert werden. Dieser Zyklus des Erprobens und Validierens wird sich durch die gesamte Zeit des Projektes – also 3,5 Jahre – ziehen.

Falls die Ergebnisse substanziell und tragfähig genug sein sollten, ist es vom Projekt angedacht, Lehrerfortbildungen zu erarbeiten. Dafür sollen unter anderem Experteninterviews mit den am Projekt beteiligten Lehrerinnen und Lehrern durchgeführt werden, in denen danach gefragt wird, welche Erkenntnisse aus ihrer Sicht ihrer Regelunterricht nachhaltig verbessert haben.

Literatur

Kuntze, S., Prediger, S. (2005): Ich schreibe, also denk' ich – Über Mathematik schreiben. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 47 (5) S. 1-6.

Leisen, J. (2013): Handbuch Sprachförderung im Fach - Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis. Stuttgart: Klett.

Maier, H., Schweiger, F. (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht. Wien: oebv und hpt Verlagsgesellschaft.

Prediger, S. (2013): Darstellungen, Register und mentale Konstruktionen von Bedeutungen und Beziehungen – mathematikspezifische sprachliche Herausforderungen identifizieren und bearbeiten. In: Becker-Mrotzek, M., Schramm, K., Thürmann, E., Vollmer, H. (Hg): Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen (S. 167-183). Münster/New York: Waxmann.

Renk, N., Prediger, S. Büchter, A., Benholz, C., Gürsoy, E. (2013): Hürden für sprachlich schwache Lernende bei Mathematiktests – Empirische Analysen der Zentralen Prüfungen 10 NRW. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013 (S. 809-812). Münster: WTM Verlag.

Nora FELDT-CAESAR, Regina BRUDER, Darmstadt

Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen durch ein adaptives Testverfahren

Nach wie vor stellt mathematisches Grundwissen und Grundkönnen ein zentrales Thema der fachdidaktischen Diskussion dar. Dabei geht es nicht nur um die Konzeptualisierung und Festlegung konkreter Inhalte, sondern auch um Möglichkeiten der Diagnose.

„Testzeit-Inhalt-Problematik"

Insbesondere bei Tests, die das Grundwissen und Grundkönnen mehrerer Unterrichtseinheiten oder sogar Klassenstufen diagnostizieren sollen, tritt häufig die sogenannte „Testzeit-Inhalt-Problematik" hervor: Der Umfang der als relevant erachteten Inhalte kollidiert mit der verfügbaren Testzeit. Zunächst sind hier zwei gegensätzliche Lösungsansätze naheliegend: Das sogenannte „kumulierte Testen" verwendet in erster Linie mehrschrittige Aufgaben, deren Bearbeitung die Verknüpfung mehrerer elementarer Inhalte und Handlungen erfordert. In diesem Fall kann eine einzelne Aufgabe das Identifizieren und Realisieren (Bruder & Brückner, 1989) verschiedener Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren umfassen. Auf diese Weise kann eine große Menge von Inhalten testzeitökonomisch abgeprüft werden. Im Falle einer falschen Antwort ist die Aussagekraft dieses Vorgehens jedoch begrenzt, da Defizite nur schwer lokalisiert werden können. Dieser Nachteil tritt besonders gravierend hervor, wenn ein digitales Testformat verwendet wird, das zunächst keinen Einblick in den Lösungsweg der Schülerinnen und Schüler gewährt. Eine andere Möglichkeit besteht im sogenannten „elementarisierten Testen". Hier werden alle relevanten Inhalte möglichst isoliert getestet (jeweils in Kombination mit einer elementaren Handlung), um eventuelle Defizite genauer lokalisieren zu können. Diese Testvariante ist einerseits sehr testzeitintensiv, zum anderen entspricht das isolierte Abfragen einzelner Inhalte nicht der Zielstellung von Grundwissen und Grundkönnen, das im Sinne eines intelligenten Wissens durchaus auch das Verknüpfen einzelner Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten umfassen soll.

Lösungsansatz: „Elementarisierendes Testen"

Ein an das adaptive Testen, im Sinne des „branched testing" (Kubinger, 2009), angelehntes Verfahren bietet hier einen geeigneten Lösungsansatz, der die Vorteile der beiden genannten Testvarianten zusammenbringt. In einer Hauptlinie von Testaufgaben, die jeder Schüler durchläuft, werden

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 353–356). Münster: WTM-Verlag

die Inhalte zunächst im Sinne der Zielformulierung von Grundwissen und Grundkönnen in verknüpfter Form getestet. Im Falle einer falschen Antwort jedoch wird der Schüler in eine Schleife geleitet, in der eine Elementarisierung der Inhalte und Handlungsanforderungen stattfindet. Eine solche Schleife kann aus einer oder auch mehreren elementarisierten Aufgaben bestehen. Anschließend wir der Schüler wieder auf die Hauptlinie zurückgeleitet und fährt mit der Bearbeitung der nächsten regulären Aufgabe fort (siehe Abb.). Die Realisierung einer derartigen Testkonstruktion kann über ein digitales Testformat oder mit Hilfe von diagnostischen Interviews erfolgen.

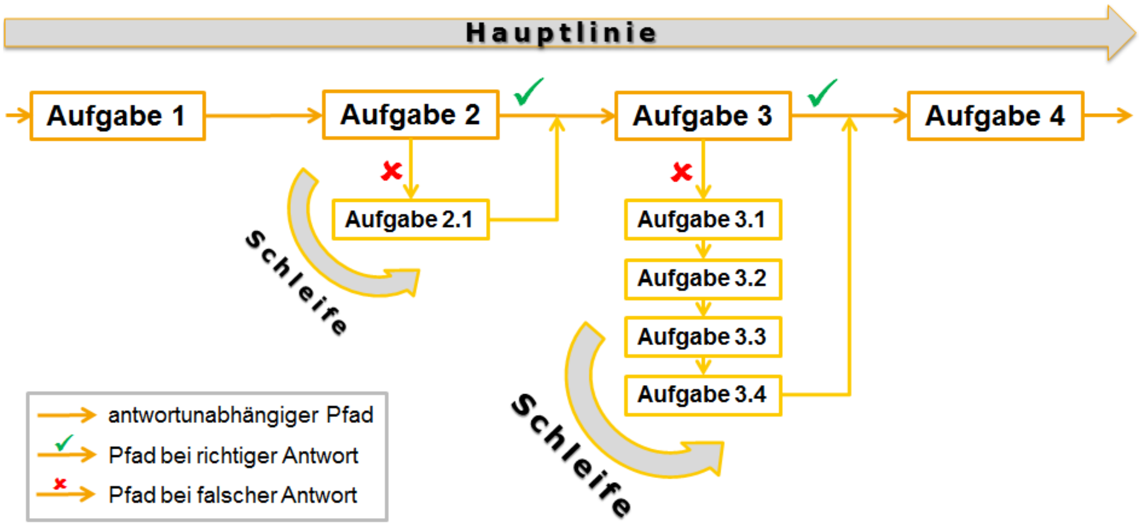


Abbildung: Beispiel von elementarisierenden Schleifen

Gezielte Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen

Ein derart konstruiertes Testinstrument scheint insbesondere zur Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen besonders geeignet: Grundwissen und Grundkönnen zeichnet sich durch eine hohe Verfügbarkeit aus. Die entsprechenden Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten stehen dem Schüler dauerhaft und situationsunabhängig, d.h. insbesondere ohne den Einsatz von Hilfsmitteln zur Verfügung. Durch Üben und häufiges Anwenden können Teile des Grundwissens und Grundkönnens, die sogenannten Elementarbausteine, sogar soweit verinnerlicht werden, dass sie ins Unterbewusste absinken und dadurch auch automatisiert zur Verfügung stehen. Durch dieses Absinken ins Unterbewusste findet eine kognitive Entlastung statt. Frei werdende Kapazitäten stehen dann für andere Denkprozesse zur Verfügung – beispielsweise für die Verwendung von Kenntnissen des Grundwissens und Grundkönnens, die noch nicht bis zur Automatisierung verinnerlicht wurden, oder auch für die Verknüpfung von Kenntnissen. Automatisierte Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten sind aus dem Unterbewusstsein jederzeit wieder abrufbar. Insbesondere wenn bei ihrer Verwendung Probleme auftreten, können sie zur Überprüfung wieder ins Bewusstsein geholt werden. In einem Test, der Grundwissen und Grundkönnen diagnostizieren soll, reicht die unterbewusste Verwendung dieser Elementarbausteine völlig aus, allerdings nur so lange es keine Hinweise auf Defizite in diesem Bereich gibt.

Diese Idee liegt der Konzeption des elementarisierenden Testverfahrens zugrunde. Ein Schüler, der beispielsweise keinerlei Probleme mit einer mehrschrittigen (Hauptlinien-)Aufgabe hat, in der er den Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer gegebenen Funktion und der x-Achse bestimmen soll, verfügt mit großer Wahrscheinlichkeit über Kenntnisse zu grundlegenden Integrationstechniken. Entsprechende Aufgaben hierzu werden daher in eine Schleife verlagert, die dem Schüler nur bei falscher Beantwortung der Hauptlinien-Aufgabe vorgelegt werden. In diesem Fall können die elementarisierten Aufgaben der Schleife sowohl dem Schüler als auch dem Lehrer Hinweise darauf geben, welche elementaren Inhalte noch nicht ausreichend verfügbar sind oder möglicherweise auch fehlerhaft automatisiert wurden und somit noch einmal gezielt wiederholt werden müssen.

Konstruktion von elementarisierenden Schleifen

Eine Inhalts- und Handlungsanalyse gibt Aufschluss darüber, welche elementaren Inhalte (Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren) und Handlungen (Identifizieren und Realisieren) in einer Hauptlinienaufgabe kombiniert werden. Hieran anknüpfend werden dann einschrittige Items entwickelt, die jeweils eine ausgewählte Inhalt-Handlung-Kombination erfordern. Die Handlungsdimension, d.h. ob es sich um eine Aufgabe handelt, in der ein Identifizieren oder ein Realisieren erforderlich ist, sollte nach Möglichkeit erhalten bleiben. Das erscheint sinnvoll, da sich diese beiden Handlungen in ihren kognitiven Anforderungen unterscheiden (Nitsch et al., 2014). Welche Inhalt-Handlung-Kombinationen in den Schleifen aufgegriffen werden, sollte sich an empirisch ermittelten, häufigen Fehlerursachen im Bereich der Elementarbausteine orientieren. Erlaubt eine Hauptlinienaufgabe mehrere Lösungswege, ist es sinnvoll, den Schüler zunächst zu fragen, welchen Lösungsweg er bearbeitet hat oder bearbeiten wollte, und die Elementarisierung dann in Abhängigkeit davon vorzunehmen. Nicht zu jeder Aufgabe eines Grundwissen- und Grundkönnentests muss notwendigerweise eine Schleife konstruiert werden. Eine Elementarisierung ist dann sinnvoll, wenn die Hauptlinienaufgabe die Verwendung von gut isolierbaren und fehleranfälligen Elementarbausteinen erfordert.

Möglichkeiten und Grenzen des elementarisierenden Testens

Durch die Verlagerung elementarer Inhalte in Schleifen können Tests zur Diagnose von Grundwissen und Grundkönnen deutlich testzeiteffektiver gestaltet werden. Damit einhergehend ermöglicht diese Art der Testkonstruktion die Integration zusätzlicher Aufgaben, die auch komplexere, d.h. mehrschrittige Handlungsanforderungen umfassen und in erster Linie ein ‚intelligentes', das heißt ein flexibles und anwendungsbereites Grundwissen und Grundkönnen fokussieren.

Zudem bieten elementarisierende Schleifen die Möglichkeit, Defizite im Bereich der Elementarbausteine aufzuklären. Inwieweit die Ursache für den Fehler in der Hauptlinienaufgabe vollständig aufgedeckt werden kann, hängt dabei von den durch die Schleife abgedeckten Inhalten ab. Die Verwendung von elementarisierenden Schleifen garantiert somit keine vollständige Fehleraufklärung. Sie kann aber durchaus Hinweise darauf geben, dass notwendige Bedingungen für die Bewältigung komplexerer Gesamthandlungen nicht gegeben sind und diese genau lokalisieren. Hierdurch kann unmittelbarer Förderungsbedarf aufgedeckt werden.

Ausblick

Ein entsprechendes Testinstrument wurde für den Bereich der Differential- und Integralrechnung entwickelt und wird derzeit – auch mit unterschiedlichen Varianten der Schleifenkonstruktion – erprobt. Hierbei sollen zum einen unterrichtspraktische Fragen geklärt werden. Von besonderem Interesse sind dabei Abweichungen in den individuellen Bearbeitungszeiten, da die Schülerinnen und Schüler im Testverlauf unterschiedliche Aufgabensequenzen durchlaufen. Zum anderen soll evaluiert werden, wie sowohl Lernende als auch Lehrkräfte den diagnostischen Mehrwert dieses Testverfahrens einschätzen. Ebenso steht eine empirische Validierung der theoretischen Handlungs- und Inhaltsanalysen anhand einer Interviewstudie noch aus. Auch die Fehleranfälligkeit einzelner elementarer Inhalte und Handlungen soll hierbei untersucht werden. Langfristig ist die direkte Verknüpfung des Testinstruments mit gezielten Fördermaterialien geplant.

Literatur

Bruder, R. & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. *Pädagogische Forschung, 30,* 72-82.

Kubinger, K. D. (2009). *Psychologische Diagnostik, Theorie und Praxis psychologischen Diagnostizierens.* Göttingen: Hogrefe.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, T., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2014). Students' Competencies in working with Functions in Secondary Mathematics Education. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Anne FELLMANN, Frankfurt

Handlungsleitende Orientierungen und professionelle Entwicklung in der Lehrerbildung

Untersucht in einer Studie zur Umsetzung strukturierter kooperativer Lehr-Lernformen im Mathematikunterricht der Klassenstufen 1-6

1. Allgemeine Informationen

Im Rahmen der GDM in Koblenz stellte Anne Fellmann (Goethe Universität Frankfurt) Ergebnisse aus ihrem fertigen Promotionsprojekt (in Kürze veröffentlichte Dissertation der Vortragenden[1]) vor.

In ihrer Präsentation gab sie zunächst einen Überblick über ihr Promotionsprojekt IPhaMat (Integration der drei Phasen der Lehrerbildung im Mathematikunterricht der Grundschule), welches auf die Entwicklung und Erprobung integrativ konzipierter Veranstaltungen zum Einsatz strukturierter kooperativer Lehr-Lernformen im Mathematikunterricht zielt. Sie legte dar, wie die drei Professionen der Lehrerbildung (Studierende, Lehrkräfte im Vorbereitungsdienst und aktive Lehrkräfte) in einer phasenübergreifend konzipierten universitären Veranstaltung entsprechende Lehr-Lernarrangements für den Mathematikunterricht geplant und anschließend in der Schule umgesetzt haben. Zunächst wurden als zentrale Ergebnisse aus dem empirischen Material sowohl die rekonstruierten handlungsleitenden Orientierungen (Bohnsack 2009) der einzelnen Professionsgruppen als auch die Erfahrungsräume dargestellt, aus welchen sich diese Orientierungsrahmen speisen. Die generierte soziogenetische Typenbildung, welche sich mittels komparativer Analyse vom Einzelfall abstrahieren ließ, stellt sich wie folgt dar:

- Entwickeltes Rollenverständnis als Lehrkraft als Destillat unterrichtlichen Erfahrungswissens und reflexiver Verarbeitung versus Suche nach einem Rollenverständnis als Lehrkraft als Destillat kaum vorhandenen unterrichtlichen Erfahrungswissens und reflexiver Verarbeitung
- Fremdbestimmt orientiertes Handeln versus selbstbestimmt orientiertes Handeln im Erfahrungsraum der drei Phasen der Lehrerbildung und ihrer Bezugssysteme

[1] Fellmann, A. (2014). Handlungsleitende Orientierungen und professionelle Entwicklung in der Lehrerbildung. Münster: Waxmann Verlag.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 357–360). Münster: WTM-Verlag

- Konstruktivistisch (bzw. ko-konstruktivistisch) orientiertes Rollenverständnis versus instruktivistisch orientiertes Rollenverständnis der Lehrkraft im Erfahrungsraum unterschiedlicher Schulformen bzw. Schulstufen und institutionell gesetzter invarianter Rahmenbedingungen durch die Bildungsadministration

2. Die Bedeutung des Faches Mathematik bei der Umsetzung

Die Vortragende merkte an, dass auf Grundlage der empirischen Befunde festgehalten werden kann, dass sich weder in Bezug auf eine mathematikspezifische Planung und Umsetzung, noch in Bezug auf Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht noch hinsichtlich selbstreflexiver Prozesse gemeinsame Basistypiken in den im Sample vertretenen Fällen rekonstruieren ließen. Die mathematischen Themen stellten bei einigen Lehrenden eine Externalisierung der Handlungsaufforderung zur Umsetzung dar, da diese für die Lehrpersonen in der Durchführung mit Unsicherheiten verbunden waren. Folgende Externalisierungen wurden von den Lehrenden genannt: Das Thema sei ungeeignet, da mathematische Inhalte aufeinander aufbauten. Die mathematische Thematik ließe sich nicht in zwei inhaltlich gleichwertige Hälften von vergleichbarem Umfang[2] teilen. Den Kindern würden die mathematischen Begriffe fehlen, um ihr Wissen korrekt weitergeben zu können. Die Schülerinnen und Schüler (SuS) wären noch nicht in der Lage, mathematisch zu argumentieren. Die Kinder könnten sich lediglich über falsche und richtige Lösungen austauschen. Daher würden sich mathematische Themen nicht anbieten. Zudem benötigten die Kinder für arithmetische Themen schon ein gewisses mathematisches Vorwissen.

Beispielsweise wurde herausgearbeitet, dass einigen Lehrenden das Vertrauen in die kommunikativen Fähigkeiten der Kinder fehlt oder dass das Bewusstsein nicht vorhanden ist, dass die Aufgaben so beschaffen sein müssen, dass überhaupt verstärkt Interaktion unter den Kindern initiiert werden kann wie bspw. diskursive komplex-strukturierte Aufgabenformate reflexiver Art, die verschiedene Lösungswege zulassen. Auch ließ sich herausarbeiten, dass den Kindern der Mehrwert der Kommunikation nicht deutlich gemacht wurde.

Des Weiteren zeigte sich in einem Transkriptausschnitt einer aktiven Lehrkraft die Bedeutung verschiedener Wissensbereiche der Lehrkraft, welche erforderlich zu sein scheinen, um der anspruchsvollen Aufgabe der Umset-

---

2 Eine Teilung der Thematik in zwei oder mehrere gleichwertige Themengebiete ist für die Umsetzung der eingesetzten strukturierten Lehr-Lernformen wie dem Partnerpuzzle oder dem Gruppenpuzzle eine notwendige Voraussetzung.

zung gerecht werden zu können. Neben dem fachlichen Wissen und dem Wissen über die schulischen Inhalte zeigt sich das Vorhandensein pädagogischen Wissens[3] der aktiven Lehrkraft, welche ausgehend von einem konstruktivistischen Lernbegriff Lernen als aktiven und kumulativen Prozess versteht, auf welchen sie im Sinne des Spiralprinzips[4] im Mathematikunterricht aufbaut. An diesem konkreten Beispiel wird deutlich, wie wichtig die Fähigkeit einer Lehrperson ist, über vielfältige Wissensbereiche zu verfügen und diese im Sinne der Kompetenzentwicklung der Kinder miteinander zu verknüpfen.

Insgesamt ließ sich die Tendenz herausarbeiten, strukturierte kooperative Lehr-Lernformen im Fach Mathematik eher im Bereich der Geometrie als in der Arithmetik oder im Sachrechnen anwenden zu wollen. Des Weiteren ließ sich herausarbeiten, dass die Lehrenden kooperative Lehr-Lernformen bereits in den Fächern Deutsch und Sachunterricht umgesetzt haben bzw. umsetzen. Ein Teil der Lehrenden äußerte, kooperative Lehr-Lernformen (zukünftig) eher in diesen Fächern umsetzen zu wollen und weniger im Fach Mathematik.

Des Weiteren wurde deutlich, dass die Umsetzung kooperativer Lehr-Lernformen im Mathematikunterricht einen hohen Anspruch darstellt und ein anderes Verständnis von Mathematik im Sinne von *Mathematik betreiben* notwendig zu sein scheint, um das Potential dieser im Mathematikunterricht nutzen und ausschöpfen zu können. Nicht mehr die Lehrkraft in der Rolle als Wissensvermittlerin von mathematischen Inhalten steht dabei im Mittelpunkt, sondern die Lernprozesse der SuS.

Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Lehrerbildung? Wie müssen Angebote bzw. begleitende Maßnahmen beschaffen sein, um (angehende) Lehrkräfte bei der vermehrten und gelingenden Umsetzung kooperativer Lehr-Lernformen in ihrer professionellen (Weiter-)Entwicklung zu unterstützen?

Anknüpfend an diese Fragestellungen wurde zum Schluss anhand der dargestellten Ergebnisse aus der Studie dargelegt, wie Angebote bzw. begleitende Maßnahmen beschaffen sein müssten, um (angehende) Lehrkräfte bei der vermehrten und gelingenden Umsetzung strukturierter kooperativer

---

3 Mit der Einteilung der Wissensbereiche von Lehrkräften markiert Shulman (1986, 1987) den Startpunkt einer intensiven Diskussion um das Lehrerwissen (vgl. Neuweg 2011b, 454ff.).

4 Das Spiralprinzip besagt, dass ein und derselbe Gegenstand auf verschiedenen Entwicklungsstufen aufgegriffen wird. Der Lerngegenstand wird dort „mit den dem Kind zur Verfügung stehenden Mitteln bis zu einem vorläufigen Abschluss“ (Lauter 1995, 24) entwickelt und später erneut aufgegriffen.

Lehr-Lernformen in ihrer professionellen (Weiter-)Entwicklung zu unterstützen. Beispielsweise wurde herausgearbeitet, dass es Aufgabe der Lehrerbildung sei, selbstreflexive Prozesse bei den Lehrenden zu initiieren als auch ein Bewusstsein dafür zu schaffen, dass kooperatives Arbeiten nicht unabhängig von fachmathematischen Anforderungen zu verstehen sei, insbesondere wenn prozessbezogene Kompetenzen im Mittelpunkt stünden.

Literatur:

Bohnsack, R. (2008). *Rekonstruktive Sozialforschung*. Einführung in Methodologie und Praxis qualitativer empirischer Forschung. Opladen und Farmington Hills: Leske+Budrich.

Brandt, B. (2010). *Rezeptionstheoretische Einsichten in Interaktionsprozesse beim Gruppenpuzzle im Mathematikunterricht der Grundschule*. In Heinzel, F. et al. (Hrsg.), Qualitative Bildungsforschung im Elementar- und Primarbereich. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. 29-43.

Brandt, B. & Nührenbörger, M. (2009). *Kinder im Gespräch über Mathematik*. In Die Grundschulzeitschrift. 23. Jg. Heft 222.223. 28-33.

Krummheuer, G. & Brand, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion*. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule. Weinheim: Beltz Verlag.

Lauter, J. (1995). *Fundament der Grundschulmathematik*: Pädagogisch-didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule. 2. Auflage. Donauwörth: Auer Verlag. 23-24.

Neuweg, G. H. (2011b). *Das Wissen der Wissensvermittler*. In Terhart, E., Bennewitz, H. & Rothland, M. (Hrsg.), Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf. Münster: Waxmann Verlag. 451-477.

Marei FETZER, Köln

Mitten drin, statt nur dabei. Empirische Forschung zur Handlungsträgerschaft von Objekten.

Mathematikunterricht ist ein soziales Geschehen, das in einer Welt der Dinge stattfindet. Nicht nur Schülerinnen, Schüler und Lehrpersonen, sondern auch unterschiedlichste Objekte, wie die Tafel, Mathematikbücher oder didaktische Materialien tragen zu dem bei, was Mathematikunterricht ausmacht. Nicht nur Menschen, sondern auch Objekte sind beteiligt am Vollzug der sozialen Unterrichtswirklichkeit. Objekte sind weit mehr als Instrumente in unseren Händen: Sie sind mitten drin, statt nur dabei.

Entsprechend wird in diesem Beitrag einer Perspektive auf Mathematikunterricht besondere Aufmerksamkeit geschenkt, die Objekte sozial in den Blick nimmt und auch nicht-menschliche Akteure im unterrichtlichen Interaktionsprozess akzeptiert. Auf der Grundlage von Latours Actor-Network-Theory wird ein Perspektivwechsel zu einer Soziologie der Objekte angeregt (2005; 2001). Empirische Forschung zur Handlungsträgerschaft von Objekten, wie sie in diesem Beitrag vorgestellt wird, trägt bei zu einer empirisch fundierten Differenzierung des Handlungsbegriffs bei: Wie ‚handeln' Arbeitsmittel und Materialien? Welche Formen des Objekt-Handelns lassen sich rekonstruieren?

Perspektivwechsel: Soziologie der Objekte

Im Rahmen seiner Soziologie der Objekte öffnet Latour den Teilnehmerkreis. Er akzeptiert nicht nur Menschen, sondern auch Objekte als vollwertige Akteure im Handlungsgeschehen. „Any thing that does modify a state of affairs by making a difference is an actor". (2005, S.71). Gleichzeitig rüttelt er am etablierten Handlungsbegriff. "Objects too have agency". (2005, S.63). Unter Handeln versteht er nicht ausschließlich absichtsvolles Handeln, wie wir es Menschen zuschreiben, sondern auch andere Formen des Handelns, bis hin zu Wirkzusammenhängen. Pointiert formuliert besagt die Netzwerktheorie, dass alles mit allem vernetzt ist, und alles mit allem eine Verbindung eingehen kann.

Methodische Zugriffsmöglichkeiten

Versteht man Unterricht als einen sozialen Prozess, so rücken interaktive Prozesse in den Fokus der Analysen. Basis der hier vorgestellten empirischen Forschungen sind Interaktionsanalysen, in denen sowohl menschliche, als auch nicht-menschliche Akteure als Teilnehmer akzeptiert werden.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 361–364). Münster: WTM-Verlag

Ergänzend arbeite ich in meinen empirischen Untersuchungen zur Handlungsträgerschaft von Objekten mit zwei weiteren Analyseverfahren: Der *Analyse der Turn-Übernahme* und der *Argumentationsanalyse*. Für eine ausführliche Darstellung zu methodischen Zugriffsmöglichkeiten sei hier die Lektüre von Fetzer (2012) empfohlen.

Die *Analyse der Turn-Übernahme* ist ein sequenzielles Verfahren. Schritt für Schritt und Zug um Zug entwickelt sich die Interaktion. Es wird davon ausgegangen, dass Handlungen nicht isoliert zu sehen sind, sondern als Turn auf ein vorheriges Handeln zu deuten sind (vgl. a. Sacks 1996). Dieses vorherige Handeln kann menschliches, oder auch *nicht*-menschliches Handeln. Somit ermöglicht die Analyse der Turn-Übernahme indirekten Zugriff auf das Handeln von Objekten.

Die *Argumentationsanalyse* basiert auf Toulmins argumentationstheoretischem Ansatz (2003). Im Gegensatz zu der Analyse der Turn-Übernahme ist dies keine Sequenzanalyse, sondern ein Verfahren, mit dem sich die Funktion von Handlungen innerhalb einer Argumentation rekonstruieren lässt. Gleichzeitig lässt sich feststellen, *wer oder was* bestimmte Elemente einer Argumentation übernimmt. Auf diese Weise trägt die Argumentationsanalyse dazu bei, die Spuren von Objekten im Unterrichtsgeschehen zu rekonstruieren.

Empirische Forschungsergebnisse

Meine Forschungen zur Handlungsträgerschaft von Objekten ermöglichen eine empirisch fundierte Differenzierung unterschiedlicher Aspekte. In diesem Beitrag greife ich lediglich zwei Punkte heraus: Differenzierungen zum *Partizipationsstatus* und zum *Handlungsbegriff*. Für eine ausführliche Darstellung der Forschungsergebnisse verweise ich auf Fetzer (2014).

Partizipationsstatus:
Es lassen sich unterschiedliche Formen des Teilnehmens und Teilseins für Objekte rekonstruieren. Objekt-Akteure können einerseits den Partizipationsstatus des *Teilnehmers* innehaben, und andererseits die Rolle des *Bystanders* zugewiesen bekommen.
Als *Teilnehmer* tragen Objekte (inhaltlich mathematisch) zum Fortgang der Interaktion bei. Sie werden von den anderen aktiv beteiligten Akteuren als Teilnehmer akzeptiert. Dies kann in solchen Situationen der Fall sein, in denen beispielsweise unstrukturiertes Material eine Rolle spielt (siehe Fetzer (2014)). Ein Haufen Holzwürfel kann Angebote zur Übernahme eines Turns machen und zum Sortieren auffordern. Nimmt ein menschlicher Akteur das Angebot an und bringt die Würfelchen in eine strukturierte Anordnung, so ist dieses Sortieren als Turn auf vorheriges ‚Handeln' der Holz-

würfelchen zu verstehen. Indirekt lässt sich somit rekonstruieren, wie Objekte als Teilnehmer im Interaktionsprozess beteiligt sind.
Der *Bystander*-Status (Goffman 1981) ist ein interaktiv gebundener Status. Die aktiv an der Interaktion mitwirkenden Beteiligten nehmen Bystander zwar als anwesend wahr, schätzen sie aber nicht als unmittelbar in die Interaktion involviert ein. Dies ist im Zusammenhang mit obigem fiktivem Würfelbeispiel der Fall, solange die Holzwürfelchen von den menschlichen Teilnehmern unbeachtet am Tischrand liegen.
Beide Status, sowohl der Teilnehmerstatus als auch der des Bystanders, können sowohl von menschlichen als auch von nicht-menschlichen Akteuren eingenommen werden. (Illustrierende Beispiele sowie Analysebeispiele siehe Fetzer (14)).

Handlungsbegriff
Im Anschluss an die empirische Forschungsarbeit lässt sich eine Differenzierung des Handlungsbegriffs im Zusammenhang mit Objekten vornehmen. Insbesondere wird es möglich, Objekt-Handeln *strukturell* zu erfassen.
Sobald Objekt-Akteure zu Teilnehmern im unterrichtlichen Interaktionsprozess werden, machen Sie zum Einen *Angebote zur Turn-Übernahme*. Zum Anderen *übernehmen sie Turns* im interaktiven Geschehen. Sie vernetzen sich mit menschlichen Akteuren und wirken Zug um Zug mit im Vollzug der sozialen Unterrichtswirklichkeit. Sie sind mitten drin, statt nur dabei. Außerdem *übernehmen* nicht-menschliche Akteure *Argumentationsanteile*. Diesen Aspekt illustriere ich im Folgenden an einem Beispiel.

Beispiel: Objekte übernehmen Argumentationsanteile:
Die Aufgabenstellung ist ein Klassiker: „Wie viele Autos stehen in einem Stau von 5km Länge?“ Die Objekt-Akteure Matchboxautos werden schon sehr früh im Bearbeitungsprozess zweier Schüler als Teilnehmer akzeptiert. Zu dem Zeitpunkt, an dem das Transkript einsetzt, präsentieren sie sich in drei Reihen/Schlangen.

Akteur	**Aktivität**
S1	so- eintausendzweihundertfünfzig\
S2	fertig\
Autos	
S1	halt- noch mal drei- *deutet auf die Autos*

Im Anschluss an eine Argumentationsanalyse ergibt sich folgendes: Beide Schüler sind sich einig, dass auf einer

Länge von 5km 1250 Autos stehen. Ausgehend von diesem Datum schließen sie, dass in einem Stau gleicher Länge 1250 mal 3 Autos stehen. Den Garanten für diesen Schluss liefern die Autos, also Objekt-Akteure, die sich in drei Reihen präsentieren.

Schluss

In unserem alltäglichen Sprachgebrauch sind wir mit der Vorstellung vertraut, dass Objekte am Vollzug der sozialen Wirklichkeit beteiligt sind. Die Rechenkette *hilft* Tarek beim Lösen der Aufgabe, Steckwürfel *veranschaulichen* die Addition. Empirische Forschung ermöglicht es, die Spuren der Handlungsträgerschaft von Objekten zu rekonstruieren und den Handlungsbegriff zu differenzieren: Als Teilnehmer bieten Objekte Turns an und übernehmen selbst Turns. Außerdem tragen sie einzelne Elemente zu (mathematischen) Argumentationen bei.

Eine Soziologie der Objekte öffnet uns die Augen dafür, Objekte in ihrem Beitrag am Vollzug sozialer Unterrichtswirklichkeit differenzierter wahrzunehmen. Objekte haben Agency, sie haben Handlungsträgerschaft. Sie gestalten (mathematische) Lernprozesse und Interaktionssituationen in ihrer ganz eigener Weise mit. Wir können unterrichtliche Interaktionsprozesse besser verstehen wenn wir akzeptieren: Objekte sind mitten drin, statt nur dabei!

Literatur

Fetzer (2014): Mit Objekten rechnen: Mit Latour auf den Spuren von Materialien im Mathematikunterricht. In Alkemeyer, Kalthoff & Rieger-Ladich (Hrsg.), *Bildungspraktiken. Körper – Räume - Artefakte.* Weilerswist.

Fetzer (2012): Lernen in einer Welt der Dinge. Methodologische Diskussion eines Objekt-integrierenden Ansatzes zur mikroethnografischen Unterrichtsanalyse. In B. Friebertshäuser, H. Kelle u. a. (Hrsg.), *Feld und Theorie. Herausforderungen erziehungswissenschaftlicher Ethnographie.* Opladen: Verlag Barbara Budrich.

Goffman (1981): *Forms of Talk*. Philadelphia: University of Philadelphia Press.

Latour (2005): *Reassembling the Social. An Introduction to Actor-Network-Theory.* Oxford University Press.

Latour (2001): *Eine Soziologie ohne Objekt? Anmerkungen zur Interobjektivität.* Berliner Journal für Soziologie 11, S. 237-252.

Sacks (1996): *Lectures on Conversation*. Cornwall: Blackwell Publishers.

Toulmin (2003): *The Uses of Argument*. Updated Edition. Cambridge: University Press.

Heiko FEY, Darmstadt

Messung diagnostischer Kompetenz in der Lehramtsausbildung Mathematik

Ziel des vom BMBF geförderten Projektes ist die Entwicklung und Erprobung eines Instrumentes zur Messung diagnostischer Kompetenzen von zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern für Mathematik an Gymnasien und an beruflichen Schulen. Das Instrument soll in der ersten und in der zweiten Phase der Lehrerausbildung eingesetzt werden, um das individuelle diagnostische Wissen und Können der Studierenden und Referendare zu beschreiben und Entwicklungsfortschritte sichtbar zu machen.

1. Forschungsrahmen und Forschungshintergrund

In den KMK Standards (2004) für die Lehrerausbildung im Kompetenzbereich *Beurteilen* wird gefordert: „Lehrerinnen und Lehrer diagnostizieren Lernvoraussetzungen und Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern; fördern Schülerinnen und Schüler gezielt und beraten Lernende und deren Eltern“. In den Modulbeschreibungen zur Lehrerausbildung im Referendariat wird an verschiedenen Stellen auf die diagnostische Kompetenz hingewiesen. Die empirischen Ergebnisse zum Thema „Diagnostische Kompetenz“ reichen von der Erforschung von Schülerkompetenzmodellen über diagnostische Kompetenz als Beurteilungskompetenz bis hin zu Unterrichtsreflexionen. Eine genauere Analyse der diagnostischen Kompetenz im Mathematikunterricht soll über das diagnostische Handeln der Lehrkraft erfolgen.

2. Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften

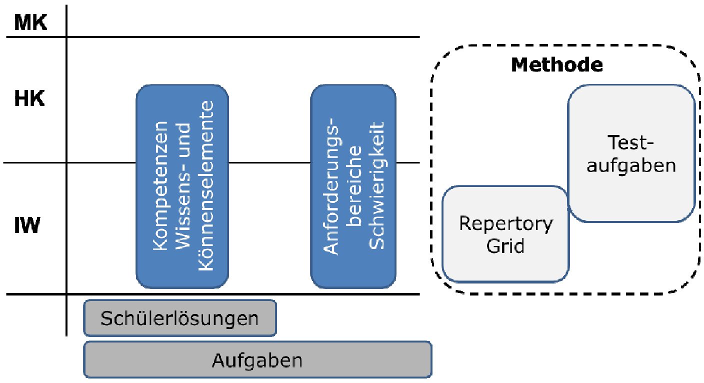
Die diagnostische Kompetenz (Weinert und Schrader 1986, Helmke 2009) enthält Elemente der pädagogischen und psychologischen Diagnostik. Die grundlegende Definition von Ingenkamp (2008) vereint alle relevanten Elemente der diagnostischen Kompetenz und soll im Forschungsprojekt Verwendung finden. Die wichtigsten diagnostischen Elemente in Bezug auf einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht sind *Lernprozesse analysieren*, *individuelles Lernen optimieren* und *individuelle Förderungsprogramme ermöglichen*.

Der Unterrichtsverlauf wird nach Weinert & Schrader (1986) als eine ständige Optimierung mit einer Klassen- oder individuellen Rückführung beschrieben. Hierbei können diagnostische Handlungen einer Lehrkraft identifiziert werden. Mit dem Förderkreislauf nach Zaugg (2004) können diese Handlungen speziell in einem auf Förderung ausgerichteten Unterrichts-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 365–368). Münster: WTM-Verlag

konzept genauer begründet werden. Das zentrale didaktische Element des Mathematikunterrichtes mit dem diese diagnostischen Handlungen vollzogen werden sind Aufgaben (Bruder 2003). Das Bearbeiten von Aufgaben kann als Mittel (Weg), als Könnensziel und als Diagnoseinstrument im Unterricht eingesetzt werden. Hierbei ist nicht nur der Einsatz von Aufgaben sondern auch deren Schülerlösung zentraler Bestandteil der diagnostischen Kompetenz und Schwerpunkt des Projektes.

3. Messung diagnostischer Kompetenz



Zur Messung diagnostischer Kompetenz wird in Anlehnung an die Bildungsstandards ein Profil mit den beiden Aspekten Kompetenzen und Anforderungsbereiche zugrunde gelegt. Die Wissens- und Könnenselemente und die Aufgabenschwierigkeit ergänzen das Konzept.

Die zwei Aspekte werden nach Weinert (1999) in Intelligentes Wissen (IW), Handlungskompetenz (HK) und Metakompetenz (MK) unterteilt. Metakompetenzen sollen in dem Projekt nicht näher spezifiziert werden, weil sie nicht im Zentrum der Lehramtsausbildung an der Universität stehen.

Die Erfassung der diagnostischen Kompetenz erfolgt mit Hilfe zweier Methoden. Mit der Methode des Repertory Grid wird insbesondere der Bereich des Intelligenten Wissens erfasst und mit einem Test soll neben Intelligentem Wissen ansatzweise auch Handlungskompetenz untersucht werden.

Die Studie (n=360) zum Kompetenzaspekt „Aufgaben" wurde mit der Methode des Repertory Grid nach Kelly (1955) durchgeführt. Die Methode sieht vor, Objekte miteinander zu vergleichen, um persönliche Konstrukte erfassen zu können. Zu diesem Zweck haben Studierende in didaktischen Lehrveranstaltungen jeweils zwei Mathematikaufgaben (Bruder et al. 2003) miteinander verglichen. Hierbei nannten sie Merkmale, in denen sich die beiden Aufgaben unterscheiden oder gleich sind. Die Analyse dieser Aufgabenmerkmale gibt Aufschluss über die Sichtweise und die im Mittelpunkt stehenden Aufgabenmerkmale.

Die Studierenden nannten im Mittel sieben Aufgabenmerkmale, das Maximum lag bei 15 Aufgabenmerkmalen. Zur weiteren Analyse wurden die genannten Aufgabenmerkmale in „äußere Aspekte", „innere Aspekte" und

„übergeordnete Aspekte“ unterteilt. So ergeben sich im Durchschnitt 1,6 Nennungen der äußeren, 4,3 Nennungen der inneren und 0,2 Nennungen der übergeordneten Aspekte. Die Ergebnisse zeigen auch, dass Studierende mit steigender Anzahl von didaktischen Lehrveranstaltungen mehr Aufgabenmerkmale nennen, sich aber auch die Qualität und Struktur der genannten Aufgabenmerkmale verändert. Neben der reinen Interpretation über die Anzahl soll weiterhin die Qualität der genannten Aufgabenmerkmale untersucht werden. Hierbei ist die Entwicklung der Sichtweise auf Aufgaben von besonderer Bedeutung, weil diese das individuelle Lehrerhandeln, z.B. die Aufgabenauswahl für den Unterricht, und damit direkt den Lernprozess der Lernenden beeinflusst.

Des Weiteren sollen Diagnostische Handlungskompetenzen in Bezug auf Aufgaben und Schülerlösungen mit einem Test erfasst werden. Die unterschiedlichen Schüleraufgaben und Schülerlösungen werden den Studierenden mit Informationen zur Klassenstufe und zur Unterrichtssituation präsentiert. Folgende Frageformate werden den Studierenden vorgelegt:

- Analysieren Sie die gegebene Aufgabe hinsichtlich der geforderten Kompetenzen.
- Welche Wissens- und Könnenselemente können Sie beim Aufgabenlöser anhand der präsentierten Lösung identifizieren?
- Stellen Sie auf Grundlage der dokumentierten Aufgabenbearbeitung eine Vermutung an, welche Kompetenzen beim Aufgabenlöser weiter gefördert werden sollten.
- Schreiben Sie möglichst viele verschiedene Lösungsmöglichkeiten zur gegebenen Aufgabe auf.

Der Test enthält sowohl Aufgaben mit vorgegebenen Antwortmöglichkeiten als auch Aufgaben, die frei beantwortet werden sollen. Wahl bzw. Antwort sollen jeweils kurz begründet werden.

Bei dem Test wurden die gleichen 360 Probanden befragt. Als erstes Fazit lässt sich Folgendes festhalten:

Einige Schüleraufgaben eignen sich nur bedingt zur Einschätzung des zur Lösung geforderten Kompetenzprofils der Schüler. Die unterschiedlichen Einschätzungen der Studierenden zum Kompetenzprofil von Aufgaben sind nur bedingt auf ihre diagnostische Kompetenz zurückzuführen und werden vielmehr als ein (Konstruktions-)Problem der Bildungsstandards angesehen.

Die eingesetzte Methodentriangulation eignet sich sehr gut für eine differenzierte Analyse, sowohl auf qualitativer als auch auf quantitativer Ebene.

Außerdem gibt die Methode des Repertory Grid im Gegensatz zu einem Test keine Konstrukte, wie etwa den Kompetenzbegriff, vor und eignet sich somit genauso gut für den oft noch sehr oberflächlichen Blick von Erstsemestern wie auch zur Erfassung von differenzierteren Aufgabenanalysen.

4. Verwendung und Verwertung von Ergebnissen aus Kompetenzmessungen

Die Ergebnisse des Repertory Grid werden den Studierenden in einem allgemeinen und einem individuellen Teil zurückgemeldet. Diese Rückmeldung kann in das individuelle Prüfungsportfolio, aber auch in das phasenübergreifende Portfolio, aufgenommen werden. Die Ergebnisse der Kompetenzmessung machen nicht nur individuelle Entwicklungsfortschritte sichtbar und unterstützen weitere, sondern liefern auch verallgemeinerte Aussagen über die Entwicklung der diagnostischen Kompetenz im Studium. Diese Ergebnisse sollen zur Verbesserung der Lehrerausbildung an der TU Darmstadt genutzt werden.

Literatur

Zaugg, F. (2004): Mitschrift von Detlef E. Peukert am 23.11.2004 RWS Fuldatal http://www.studienseminar-eschwege.de/WebServerSTS/filebase/Seminar/ Materialien/DFB/ZAUGG_PHASENMODELL_FOERDERK.pdf aufgerufen am 14.03.2011

Bruder, R. (2003): Konstruieren - auswählen - begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Friedrich-Jahresheft "Aufgaben. Lernen fördern - Selbstständigkeit entwickeln", Friedrich Verlag 2003, S. 12 – 15

Bruder, R.; Lengnink, K.; Prediger, S. (2003): Wie denken Lehramtsstudierende über Mathematikaufgaben? Ein methodischer Ansatz zur Erfassung subjektiver Theorien mittels Repertory-Grid-Technik. In: mathematica didactica 26 (2003) Bd.1, S. 63-85

Helmke, A. (2009): Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Franz Emanuel Weinert gewidmet. 1. Aufl. Seelze: Klett Kallmeyer.

Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2008): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik. 6., neu ausgestattete Aufl. Weinheim: Beltz.

Kelly G. A. (1955): The psychology of personal constructs. Norton, New York.

KMK Standards für die Lehrerbildung (2004). Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004) Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften Kompetenzen und Standards für die Lehrerbildung

Weinert, F. E.; Schrader, F.-W.: Diagnose des Lehrers als Diagnostiker. In: Petillon, H.; Auffenfeld, A.; Ingenkamp, K. (1986): Schülergerechte Diagnose. Theoretische und empirische Beiträge zur pädagogischen Diagnostik ; Festschrift zum 60. Geburtstag von Karlheinz Ingenkamp. Weinheim: Beltz

Weinert, F.E. (1999). Die fünf Irrtümer der Schulreformer. Welche Lehrer, welchen Unterricht braucht das Land? *Psychologie heute, 26(7), 28-34.*

Pascal Rolf FISCHER

Evaluation von mathematischen Vorkursen im Blended-Learning-Format: Konzepte und Ergebnisse

1. Einleitende Gedanken und Hintergrund

Vor dem Hintergrund der in vielfacher Hinsicht problematischen Übergangssituation von der Schule zur Hochschule insbesondere im Fach Mathematik (vgl. Biehler et al. 2012, Bausch et al. 2013) war das Ziel der hier vorgestellten Dissertation (vgl. Fischer 2013) die Entwicklung und Beforschung eines Blended-Learning-Szenarios zur individuellen Betreuung von Studierenden in den mathematischen Vorkursen der Universität Kassel trotz großer Teilnehmerzahlen. Die Dissertationsstudie ist eingebettet in das Projekt VEMA (ab 2012: VEMINT, www.vemint.de), welches sich mit der Entwicklung und Beforschung von interaktiven Lernmaterialien für mathematische Brückenkurse befasst. Die Arbeit umfasste sowohl gestalterische als auch forschende Elemente und fokussierte die folgenden drei Hauptziele: 1. die Entwicklung elektronischer Vor- und Nachtests für die interaktiven Lernmaterialien des Projekts VEMINT, 2. die Entwicklung und Durchführung einer E-Kursvariante für die Mathematikvorkurse der Universität Kassel und 3. die Evaluation der Vorkurse im Allgemeinen, sowie der E-und P-Kurse im Speziellen.

2. Design der Blended-Learning-Kurse

Aufbauend auf den VEMINT-Lernmaterialien sowie den im Rahmen des Projekts über mehrere Jahre in den Evaluationen der Vorkurse gesammelten Erfahrungen und Erkenntnissen wurden zwei Kursszenarien entwickelt und alternativ angeboten: Eine Blended-Learning-Variante mit ausgedehnten Phasen selbstregulierten E-Learnings („E-Kurse") und eine Variante mit ausgedehnten Präsenzphasen („P-Kurse"). Zur Unterstützung der Lerner hinsichtlich ihrer Selbsteinschätzungs- und Selbstregulationsfähigkeit wurden elektronische Vor- und Nachtests in moodle implementiert.

Um die beiden Kursszenarien in ihrer Komplexität möglichst ganzheitlich beschreiben zu können, wurde in der Arbeit auf Basis einer Literaturrecherche zur Hochschuldidaktik und Psychologie auf der einen Seite sowie zum Themenkomplex E-Learning in Schule und Hochschule auf der anderen Seite ein eigenes theoretisches Beschreibungsmodell für Lehrveranstaltungen im Blended-Learning-Format entwickelt, welches auch den Forderungen des Design-Based Research nach einer möglichst ganzheitlichen Beschreibung des Lehr-Lernszenarios gerecht wird.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 369–372). Münster: WTM-Verlag

3. Aufbau und Design der Studie

Da die Arbeit sowohl gestalterische als auch forschende Elemente umfasste, wurde der Studie das Design-Based Research als integrativer Entwicklungs- und Forschungsansatz zugrunde gelegt (vgl. Collins, Joseph und Bielaczyk 2004). Das hierfür verwendete Untersuchungsmodell basiert auf dem Angebots-Nutzungs-Modell der Unterrichtswirksamkeit von A. Helmke und F. E. Weinert (vgl. Helmke 2009) und untersucht insgesamt 22 Fragestellungen in 7 Fragenkomplexen: 1. Lernvoraussetzungen und Motive für die Kurswahl, 2. Lernverhalten, 3. Veränderung der mathematischen Kompetenzen am Ende des Kurses und erklärende Faktoren, 4. Veränderung der Selbstwirksamkeitserwartung und des Autonomieerlebens, 5. Merkmale erfolgreicher/ weniger erfolgreicher Teilnehmender, 6. Bewertung des Kurses und 7. Motivation. Die Hauptstudie fand im Rahmen der Vorkurse 2008 statt, hier nahmen ca. 1000 Studienanfängerinnen und -anfänger teil, wovon ca. 290 die E-Kursvariante wählten. Als Datenbasis diente ein elektronischer Ein- und Ausgangstest (N=746 bzw. N=349) sowie drei Online-Befragungen (Eingangsbefragung N=586, Zwischenbefragung N=400 und Abschlussbefragung N=350). Zudem lagen Nutzungsdaten der Lerner zu den elektronischen Tests in moodle zur Auswertung vor.

4. Ausgewählte Ergebnisse

Die Analyse der Lernvoraussetzungen der Kursteilnehmenden zeigte, dass die freiwillige Wahl der Kursvariante zu einem deutlichen Selektionseffekt zugunsten der E-Kurse führte: Hinsichtlich der Art der Hochschulzugangsberechtigung zeigten sich hochsignifikante Unterschiede zwischen E- und P-Kursen, wobei in den E-Kursen ein deutlich höherer Anteil an Studierenden mit allgemeinbildendem Abitur zu verzeichnen war, während an den P-Kursen deutlich mehr Fachabiturienten teilnahmen. Dieser Selektionseffekt wurde verschärft durch ebenfalls hochsignifikante Unterschiede hinsichtlich des letzten Mathematikkurses, der Abitur- und der letzten Mathematiknote der Teilnehmenden: So ist der Anteil an Leistungskursteilnehmern in den E-Kursen deutlich höher, zugleich verfügen die E-Kursteilnehmer im Mittel über signifikant bessere Abitur- und Mathematiknoten. Betrachten wir im Vergleich dazu die Ergebnisse des Eingangs- und des Abschlusstests, so lassen sich bei den nachverfolgbaren Fällen zu Beginn des Kurses zwar im Mittel bessere Ergebnisse in den E-Kursen feststellen (N=232, E-Kurse: M=0,55, SD=0,2; P-Kurse: M=0,52, SD=0,18), allerdings sind diese Unterschiede nicht signifikant. Im Abschlusstest hingegen schneiden die E-Kursteilnehmer signifikant besser ab im Vergleich zu den P-Kursen (N=232, E-Kurse: M=0,51, SD=0,19; P-Kurse: M=0,44, SD=0,17). Ein allgemeines lineares Modell zur Erklärung des Abschlusstests belegt dabei einerseits den zu erwartenden, hochsignifikanten Einfluss des Eingangstestergebnisses ($p<0{,}001$, Eta-Quadrat 0,401), zudem geht jedoch auch die Kursvariante zugunsten der E-Kurse mit schwachem Effekt signifikant in das lineare Modell mit ein ($p=0{,}016$; Eta-Quadrat 0,026): Bei vergleichbarem Ergebnis im Eingangstest haben die E-Kursteilnehmer im Abschlusstest im Mittel ca. 4,8% mehr Punkte als die P-Kursteilnehmer.

Die Analyse der Nutzung des Lernmaterials in den Selbstlernphasen zeigte interessante Unterschiede sowohl im Vergleich von P- und E-Kursen, als auch bei differenzierter Analyse getrennt nach Studiengängen: In den E-Kursen konnte hinsichtlich der Nutzung des Lernmaterials ein ähnliches Lernverhalten von Grund-, Haupt- und Realschulstudierenden einerseits und Bauingenieuren/ Maschinenbaustudenten andererseits belegt werden. Gleichzeitig zeigten Studierende des Fachs Bachelor Mathematik, Naturwissenschaften sowie Lehramt Gymnasium auf der einen und Elektrotechnik-/ Informatikstudierende auf der anderen Seite ebenfalls ein ähnliches Nutzungsverhalten bzgl. der interaktiven VEMINT-Materialien. Die hier entdeckten Zusammenhänge waren so nicht erwartet worden und konnten im Rahmen der Studie durch keine anderen Variablen erklärt werden. Dies bietet Stoff für weiterführende Untersuchungen. Bzgl. der Nutzung der eigens für die E-Kurse entwickelten, elektronischen Vor- und Nachtests zeigte sich ernüchternderweise, dass von insgesamt 280 E-Kursteilnehmern 66 Personen gar keine Tests bearbeitet haben. Von den insgesamt 48 bereitgestellten Tests wurden zudem im Mittel nur 9,6 Tests genutzt, auffällig ist dabei auch die besonders hohe Streuung der Ergebnisse ($SD=12$ Tests). Ein allgemeines lineares Modell belegt jedoch einen positiven Zusammenhang zwischen der Anzahl genutzter Vor- und Nachtests in den E-Kursen und dem Abschlusstestergebnis unter Kontrolle des Eingangstestergebnisses ($p=0{,}003$; Eta-Quadrat 0,101): Bei vergleichbarem Eingangstestergebnis und Nutzung aller Tests erhöht sich das Abschlusstestergebnis im Mittel um 14,4% der Punkte.

Sowohl das Autonomieerleben als auch die wahrgenommene Individualität des Kursangebotes wurde von den Teilnehmenden beider Kursvarianten als sehr hoch bewertet, wobei sich auch hier hochsignifikant bessere Ergebnisse in den E-Kursen nachweisen lassen. Die Studie belegt darüber hinaus eine hohe Zufriedenheit der Teilnehmer mit beiden Kursvarianten, wobei die E-Kurse insgesamt signifikant besser bewertet wurden im Vergleich zu den P-Kursen.

5. Fazit und Ausblick

Die Studie belegt den Erfolg beider entwickelter Kurszenarien auf verschiedenen Ebenen: 1. E- und P-Kurse sind machbar und stellen attraktive Angebote für Studienanfängerinnen und -anfänger dar. 2. Durch den gezielten Einsatz von E-Learning konnte ein Angebot geschaffen werden, dass von den Studierenden individuell wahrgenommen wird und mit dem sie insgesamt sehr zufrieden sind. 3. Obwohl die Intensität der Nutzung des angebotenen Lernmaterials in den E-Kursen deutlich höher sein könnte, erreichen die Teilnehmer beider Kursvarianten am Ende (mindestens) vergleichbar gute Ergebnisse.

Die im Rahmen der Arbeit weiteren und ausführlicher dargestellten Ergebnisse zeigen jedoch auch Ansatzpunkte für Weiterentwicklungen auf, die unter anderem in Empfehlungen für weiterführende Studien (z.B. Langzeitstudien zur Nachhaltigkeit der Vorkurse) oder für die Überarbeitung der Kursszenarien münden. Beides wird im Kontext des Projekts VEMINT sowie im Rahmen des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm, www.khdm.de) bereits aufgegriffen und weitergeführt. Die im Rahmen der Dissertation entwickelten Untersuchungsmodelle und -instrumente sowie das Beschreibungsmodell sind nicht nur für den spezifischen Kontext an der Universität Kassel sondern auch für die Analyse und Beschreibung von mathematischen Vorkursen in unterschiedlichen Blended-Learning-Formaten geeignet.

Literatur

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S., Wassong, T. (Hrsg.)(2014): Mathematische Vor- und Brückenkurse. Konzepte, Probleme und Perspektiven. Wiesbaden: Springer.

Biehler, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., & Wassong, T. (2012): Self-regulated learning and self-assessment in online bridging courses. In: Juan, A. A. et al. (Hrsg.): *Teaching Mathematics Online: Emergent Technologies and Methodologies* (S. 216-237). IGI Global.

Fischer, P. R.: Mathematische Vorkurse im Blended-Learning-Format. Konstruktion, Implementation und wissenschaftliche Evaluation. Kassel: Springer 2013.

Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyk, K. (2004): Design Research: Theoretical and Methodological Issues. In: *The Journal of the Learning Sciences 13(1)* (S. 15-42).

Helmke, A. (2009): Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Seelze-Velber.

Klaus-Tycho FÖRSTER, Zürich

Scratch von Anfang an: Programmieren als begleitendes Werkzeug im mathematischen Unterricht der Sekundarstufe

Die Programmierung ist heutzutage weitgehend aus dem mathematischen Unterricht verschwunden (vergl. etwa Oldenburg 2011), eine nicht nur nach Kortenkamp 2005 bedauerliche Entwicklung, denn „*Konzepte wie Schleifen, Prozeduren und insbesondere Variablen sind eigentlich unabdingbar*“. Gerade für die fundamentale Idee der Algorithmen ist die Programmierung hilfreich, insbesondere für die Überprüfung auf Korrektheit und formale Präzisierung. Die Wichtigkeit von Algorithmen ist nicht auf die Mathematik und Informatik beschränkt: Algorithmen sind „*fächerübergreifend und alltagsrelevant*“ (Schmidt-Thieme 2005). Zudem unterstützt die Programmierung beim Problemlösen, denn sie bietet eine gemeinsame formale Sprache. Somit kann man über Programme leichter reden: Über ihre Struktur, ihre Entwicklung und ihre Beziehungen zu anderen Problemen und Programmen (siehe u.a. Feurzeig und Papert 1969).

Analog zu einer Funktion führt ein Computerprogramm eine Transformation von einer Eingabe (Argument) zu einer Ausgabe (Wert) durch (vergl. etwa Puhlmann 1998). Somit kann die Aufgabe, im Unterricht ein Programm zu schreiben, mit einer Beweisaufgabe verglichen werden. Gegebenes und Gesuchtes sind bekannt, die Transformation aber nicht, siehe Strecker 2009. Der Entwurf eines korrekten Programms entspricht einem direkten (konstruktiven) Beweis. Da Beweisaufgaben im Mathematikunterricht leider unterrepräsentiert sind (z.T. nur 1%, Neubrand 2002), bietet sich die Programmierung unmittelbar für das alltägliche Unterrichtsrepertoire an.

1. Programmierung mit Scratch im MU: Begleitend und unterstützend

Eine Integration der Programmierung in den mathematischen Unterricht durch zusätzlichen Zeitaufwand ist kaum realisierbar: Die Reduktion bewährter mathematischer Inhalte oder gar anderer Fächer würde – zu Recht – auf starken Widerstand von allen Seiten stoßen. Daher bietet sich für den Schulalltag (abgesehen von Projekten) nur eine begleitende Integration an.

Einige zusätzliche Anwendungsbereiche der Programmierung wurden in den letzten Jahrzehnten auch von Spezialprogrammen (z.B. DGS, CAS, Tabellenkalkulation) übernommen: Dies ist sicherlich eine hilfreiche spezifische Anwendungsprogrammierung, aber der gewünschte vertiefte konstruktive Entwurf und seine Formalisierung treten hier notwendigerweise in den Hintergrund.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 373–376). Münster: WTM-Verlag

Programmierung ist nicht als Wert an sich zu verstehen und auch nicht als Konkurrent zu anderen computergestützten Anwendungen, wie etwa dynamischer Geometriesoftware. Vielmehr gilt es die Chancen der Programmierung für vielfältige Einsatzbereiche zu nutzen: Problemlösen, Beweisen, Fachsprache, Kritikfähigkeit, Modellierung und insbesondere für das grundlegende algorithmische Konzept der Modularisierung. Der begleitende Einsatz schließt sich an bewährte Konzepte der GDM von 1981 an, die einen Computereinsatz durch methodische Schwerpunktverlagerungen und Änderungen im Kleinen empfiehlt, bzw. gemäß Kortenkamp 2005: *„durch die Anwendung einer konkreten Programmiersprache, wann und wo immer es im Unterricht hilfreich erscheint“*. Nach Kortenkamp 2005 erscheint Programmierung auch für die Grundschule *„durchaus gerechtfertigt“*.

Im Gegensatz zu vielen anderen Programmiersprachen benötigt Scratch (scratch.mit.edu) durch seinen visuellen Ansatz kaum Einarbeitungszeit und vermeidet durch Programmierung analog zu einem Baukastenprinzip Syntaxfehler. Die Programme selbst können leicht verglichen und analysiert werden. Lehramtsstudierende aller Fächer können mit Scratch schon in den ersten Semestern mit Schülern sogar der ersten Klasse erfolgreich programmieren (Förster 2011). Ebenso wurde Scratch mit seinen Erweiterungen Snap/BYOB auch schon an einzelnen deutschen Schulen bis zum Zentralabitur Informatik und zur Programmierung im Studium eingesetzt.

2. Begleitender Einsatz von Programmierung mit Scratch in der Praxis

Eine begleitende Integration der Programmierung in den MU mit Scratch darf keine Unterrichtsinhalte vorwegnehmen. Daher sollten vor Klassenstufe 7 Variablen nicht eingesetzt werden. Von da an könnte eine Betrachtung dieser aus Programmiersicht neue Möglichkeiten des Variablenverständnisses eröffnen (siehe Serafini 2011). Dies ist vor allem dadurch von Interesse, da u.a. „*der richtige Umgang mit Variablen ... die wesentliche Voraussetzung für das Verständnis der weiterführenden Mathematik* [darstellt]“ (Reimann 2011). Für bewährte Konzepte lässt sich auf die Turtlegrafik mit Logo zurückgreifen, welche nach Hromkovič 2012 eine *„gegenseitige Befruchtung mit dem Geometrieunterricht“* leicht erreicht und *„die Entwicklung algorithmischen Denkens“* prägt. Bei einem Unterrichtsversuch über die Konstruktion von Vielecken und Parketten in der Klassenstufe 6 ergab sich, dass die Einführung in die Programmiersprache Scratch intuitiv und unproblematisch war, die Konzepte der Turtlegrafik sich direkt umsetzen lassen, Vielecke den Bereich Konzept und Einsatz von Algorithmen üben und verdeutlichen, sowie Parkette die Bedeutung von Exaktheit aufzeigen und modularen Entwurf benötigen (Förster 2013).

Für eine Fortführung des Einsatzes der Programmierung in Klassenstufe 7 mit derselben Klasse (12 Mädchen, 12 Jungen) bieten sich die Konstruktionsbeschreibungen von Dreiecken an, denn *„Konstruktionsbeschreibungen im Geometrieunterricht haben als Endform den Algorithmus, der dann in Computersprachen übersetzt werden kann*“ (Schmidt-Thieme 2009). Ebenso gestatten Konstruktionsbeschreibungen mit Scratch einen intuitiven Variableneinsatz, wie dies die untere Abbildung illustriert.

Schülerprogramm für die Konstruktion Seite-Winkel-Seite, links für eine spezielle Instanz, auf der rechten Seite dann allgemein. Propädeutisch ist dies sogar eine Funktion von drei Veränderlichen.

Nach Weigand und Weth 2002 ermöglicht die Realisation durch den Computer „*drastische Verbesserungen beim Beschreiben von Konstruktionen*“ durch Umkehrung der Reihenfolge „*erst die Konstruktion, dann die Beschreibung*“. Ebenso führt Riemer 2011 aus, dass Schüler nur widerwillig Konstruktionsbeschreibungen durchführen und *„ ‘Welten‘ zwischen Schülerprodukten und fachsprachlich akzeptablen Lösungen liegen“*. Er regt hierzu als Verbesserung an, dass *„ein Perspektivwechsel, ein frühes ‚digitales Nachdenken über händisches Tun‘ faszinierende Möglichkeiten gedanklicher Vertiefung und bisher noch wenig ausgetretene Pfade zu einer höheren mathematischen Bewusstheit* [bietet]“.

Aus diesem Grund entschieden wir uns für den folgenden dreigliedrigen Ansatz für die Unterrichtseinheit: Zuerst die Programmierung von Dreieckskonstruktionen in Scratch (gleichseitiges Dreieck, Seite-Winkel-Seite, WSW, Dreiecksscharen), dann die Konstruktion in GeoGebra (u.a. mit SSW&SSS) und abschließend Konstruktion und Konstruktionsbeschreibung per Hand. Dabei bietet die Programmierung insbesondere den Vorteil, dass man nicht mehr eine spezielle Instanz des Problems konstruiert, sondern alle Variationen der Problemstellung gleichzeitig als Algorithmus erstellt. Es ergab sich, dass die Schüler mit Scratch nach kurzer Einführung selbständig die Programme erstellen und vor allem auch gemeinsam darüber reden konnten, sei es nun im Plenum oder in der Arbeitsphase. Die Programmierung bot einen anderen Blick auf die bekannten Variablen (z.B. Änderung zur Laufzeit bei Dreiecksscharen), wobei es den Schülern durch das bekannte Thema (Geometrie) leicht fiel, die Variablen sinnvoll zu verwenden. Zudem wurde ein propädeutischer Blick auf die Funktionsweise von DGS vermittelt. Im Vergleich zu einem Vorgehen ohne Programmierung zeigte sich deutlich, dass die Konstruktionsbeschreibungen akkurater waren, mit insbesondere mit weniger überflüssigem textuellen Beiwerk.

Wir erproben gegenwärtig Scratch in verschiedenen Bereichen begleitend im Mathematikunterricht (für eine Liste weiterer Möglichkeiten siehe Förster 2013) und werden hierüber an anderer Stelle ausführlicher berichten. Für einen interessanten aktuellen Einsatz zum Sinus- & Kosinussatz sei auf Untersuchungen an der Universität Hildesheim von Spittel 2014 verwiesen.

Literatur

Feurzeig, W., Papert, S. (1969): Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. In: Programmed Learning Research: Paris: Dunod.

Förster, K.-T. (2011): Neue Möglichkeiten durch die Programmiersprache Scratch: Algorithmen und Programmierung für alle Fächer. In: BzMU 2011, 263-266.

Förster, K.-T. (2013): Die Programmiersprache Scratch im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: BzMU 2013, 316-319.

Hromkovič, J. (2012): Einführung in die Programmierung mit LOGO: Lehrbuch für Unterricht und Selbststudium. Wiesbaden: Springer Vieweg.

Kortenkamp, U. (2005): Strukturieren mit Algorithmen. In: Kortenkamp et. al. (Hrsg.): Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 77-85.

Neubrand, J. (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Hildesheim: Franzbecker.

Oldenburg, R. (2011): Mathematische Algorithmen im Unterricht: Mathematik aktiv erleben durch Programmieren. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Puhlmann, H. (1998): Funktionales Programmieren: eine neue Verbindung von Informatikunterricht und Mathematik. Darmstadt, Techn. Univ., FB Mathematik.

Reimann, K. (2011): Probleme des Mathematikunterrichtes beim Übergang von Arithmetik zur Algebra. In: BzMU 2011, 671-674.

Riemer, W. (2011): Erziehen im Mathematikunterricht. In: Kaenders, R., Schmidt, R. (Hrsg.): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen, 13-20. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Serafini, G. (2011): Teaching Programming at Primary Schools: Visions, Experiences, and Long-Term Research Prospects. ISSEP 2011, 143-154.

Schmidt-Thieme, B. (2005): Algorithmen – fächerübergreifend und alltagsrelevant? In: Engel, Joachim u. a. (Hrsg.): Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatorischer Aktivitäten. Hildesheim, 177-188.

Schmidt-Thieme, B. (2009): Erklären als fachspezifische Kompetenz in fächerübergreifender Perspektive. In: BzMU 2009, 239-242.

Strecker, K. M. (2009): Informatik für Alle – Wie viel Programmierung braucht der Mensch? Dissertation, Georg-August-Universität Göttingen.

Spittel, L. (2014): Sinus- und Kosinussatz im Realschulunterricht unter Berücksichtigung der Geschichte und medialer Möglichkeiten. Masterarbeit, U. Hildesheim.

Weigand, H.-G., Weth, T. (2002): Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg Berlin: Spektrum Verlag.

Sebastian FRICKE, Bielefeld

EmMa – ErzieherInnen machen Mathe

Die Ergebnisse zahlreicher Untersuchungen heben die Bedeutung früher mathematischer Bildungsprozesse eindrucksvoll hervor. So konnte gezeigt werden, dass Kinder ihre Schullaufbahn teilweise mit beträchtlichen mathematischen Erfahrungen beginnen (vgl. Fuson 1988; Hasemann 2003) diese allerdings sehr heterogen ausgeprägt sind (vgl. Krajewski 2003; Grüßing & Peter-Koop 2008). Es wurde ebenfalls festgestellt, dass das Vorwissen der Kinder bereits ein Jahr vor der Einschulung einen deutlicheren Einfluss auf die späteren Mathematikleistungen hat als z.B. Intelligenz (vgl. Dornheim 2008). Förderungen die von den Erziehenden der Kinder durchgeführt werden, dabei methodisch alltagsintegriert und inhaltlich an den Fähigkeiten der Kinder anknüpfen, wirken sich positiv und nachhaltig auf die mathematischen Kompetenzen der Kinder aus (vgl. Grüßing & Peter-Koop 2008; Gasteiger 2010). Ausgehend von diesen Befunden scheint es, auch um negative Erfahrungen in Bezug auf späteres Mathematiklernen zu vermeiden, notwendig und sinnvoll Kinder vorschulisch mathematisch anzuregen. Diese Aufgabe verlangt von den beteiligten Erziehenden neben einer kontinuierlichen Beobachtung und Dokumentation auch ein hohes Maß an Fachkompetenz und pädagogisch-didaktischer Handlungskompetenz (vgl. Gasteiger im Druck). Um Erziehende in Kindertageseinrichtungen, die im Rahmen ihrer Ausbildung kaum mathematikdidaktische Inhalte erarbeiten, bei dieser Aufgabe zu unterstützen, bedarf es Maßnahmen der Professionalisierung.

Befunde zu Fortbildungsmaßnahmen

Ergebnisse der Evaluationsforschung von Lehrerfortbildungen zeigen, dass die Wirksamkeit dieser Maßnahmen auch von strukturellen, didaktischen und prozessbezogen Merkmalen abhängig ist. Sehr kurze Veranstaltungen bewirken demnach kaum Veränderungen in Bezug auf das Lehrerverhalten (vgl. Yoon u.a. 2007). Allerdings darf hieraus auch nicht auf einen linearen Zusammenhang zwischen dem Fortbildungserfolg und der aufgewendeten Zeit geschlossen werden (vgl. Lipowsky 2011). Yoon und Kollegen (2007) haben in einer Metaanalyse zu Fortbildungen aus verschiedenen Disziplinen festgestellt, dass erst Veranstaltungen ab einer Fortbildungsdauer von 14 Stunden auch positive und signifikante Effekte auf der Ebene der Schülerleistungen bewirken. Es hat sich dabei als günstig erwiesen, die Gesamtdauer der Veranstaltung nicht kompakt und zeitlich dicht zu legen, sondern diese vielmehr über einen längeren Zeitraum durchzuführen. Wirkungsvol-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 377–380). Münster: WTM-Verlag

le Konzepte zeichneten sich ferner inhaltlich durch einen engen fachdidaktischen Bezug aus und behandelten vertieft ausgewählte Konzepte und Ideen (vgl. Lipowsky 2004). Methodisch zeichneten sich diese Veranstaltungen durch einen Wechsel der Arbeits- und Sozialformen aus, bei denen die Teilnehmer z.B. durch die Analyse von Schülerdokumenten, Materialbewertungen oder Diagnosesequenzen aktiv miteinbezogen wurden. Insgesamt konnte festgestellt werden, dass besonders schwache Kinder von einer Steigerung der Unterrichts- bzw. Lehrerqualität profitieren und Veränderungen an den Kindern als Ursache einer Intervention an den Erziehenden eher längerfristig zu erwarten sind (Gasteiger 2010).

Vorstellung des Promotionsprojektes EmMa – ErzieherInnen machen Mathe

Ausgehend von den eingangs vorgestellten Befunden stellt sich die Frage, wie Fortbildungen für Erziehende in Kindertageseinrichtungen gestaltet sein müssen, um Erfolge letztendlich auf der Ebene der Kinder zu erzielen. Ziel des Vorhabens ist es daher zwei verschiedene Fortbildungskonzepte für pädagogisches Personal in Kindertageseinrichtungen zu untersuchen. Die Veränderungen der arithmetischen Fähigkeiten der Kinder sollen dabei fokussiert betrachtet werden. Konzeptionell wird dabei ein Fortbildungsformat, das aus vier aufeinander aufbauenden Veranstaltungsblöcken besteht, mit der gleichen Fortbildung in Verbindung mit einem mathematikdidaktischen Coaching verglichen. Angetrieben wird die Untersuchung von folgenden Forschungsfragen: Wie unterscheiden sich die beiden Fortbildungskonzepte mit und ohne Coaching im Hinblick auf die Veränderungen der arithmetischen Fähigkeiten der Kinder voneinander? Wie stark profitieren besonders Kinder mit einer verzögerten mathematischen Entwicklung indirekt von den jeweiligen Fortbildungen? Verändert sich der Anteil der Kinder mit Entwicklungsverzögerungen in den Interventionsgruppen? Werden die Impulse der Fortbildungen in den Alltag integriert?

Konzeptioneller Aufbau

Bei der Untersuchung handelt es sich um eine Längsschnittstudie im Paneldesign mit drei Untersuchungsgruppen die zu jeweils drei Messzeitpunkten, im Abstand von jeweils einem Jahr, diagnostisch erfasst werden. Interviewt wurden zum ersten Messzeitpunkt (November/ Dezember 2013) Kinder im vorletzten und letzten Kindergartenjahr. Als Messinstrumente zur Erfassung der arithmetischen Fähigkeiten der Kinder werden der „EMBI - KiGa“ (Peter-Koop & Grüßing 2011) für den Beobachtungszeitraum der Kindergartenzeit und der „EMBI - Zahlen und Operationen“ (Peter-Koop, Wollring, Spindeler & Grüßing 2013) für den Beobachtungszeitraum der Grundschule als halbstandardisiertes Interviewverfahren verwendet. Beide Verfahren knüpfen übergangslos aneinander an, sind materialbasiert, differenzieren gut und berücksichtigen auch Lösungsstrategien bei der Bearbeitung. Als normiertes und standardisiertes Testverfahren wird flankierend der TEDI-MATH (Kaufmann u.a. 2009) durchgeführt. Ausgehend vom Kompetenzmodell zu Professionalisierung von Erziehenden in Kindertageseinrichtungen (Gasteiger im Druck), ist davon auszugehen, dass die Fachkompetenzen und pädagogisch-didaktischen Handlungskompetenzen der Erziehenden ebenfalls eine große Rolle für die Beurteilung des Fortbildungserfolges spielen. Um einige Facetten dieser Komponenten zu erfassen, wurde bereits zu Beginn der ersten Fortbildungsveranstaltung ein Fragenbogen an die Erziehenden ausgeteilt.

Interviewt wurden zum ersten Messzeitpunkt 70 Kinder in einer Kontrollgruppe, deren Erziehende keine Fortbildung erhalten. Die Erziehenden der zweiten Kindergruppe, bestehend aus derzeit 38 Kindern, erhalten nur die Fortbildung und die Erziehenden der dritten Kindergruppe, 48 Kinder, erhalten die Fortbildung in Verbindung mit einem mathematikdidaktischen Coaching. Die Fortbildungen und das Coaching werden zur Auffrischung und um anderen Erzieherinnen und Erziehern die Teilnahme zu ermöglichen, ein Jahr später wiederholt.

Die Auswahl der Fortbildungsinhalte lehnt sich inhaltlich an die nationalen Bildungsstandards für die Primarstufe (Kultusministerkonferenz 2005) an. Die jeweiligen Fortbildungsblöcke haben einen zeitlichen Umfang von drei Stunden. Die Inhalte (Abb. 1) werden aus fachlichen, entwicklungspsychologischen und fachdidaktischen Sichtweisen betrachtet. Ferner werden Beispiele und Ideen für mathematische Lerngelegenheiten im Alltag thematisiert und die prozessbezogenen Kompetenzen behandelt. Dabei geht es auch immer um die Analyse von Materialien im Hinblick auf ihr mathematisches Potenzial. Der letzte Fortbildungsblock befasst sich inhaltlich mit Möglichkeiten der Diagnose und gezielten Förderung von Kindern im Alltag. Im Rahmen des mathematikdidaktischen Coachings werden von den Erziehenden selbst gewählte Alltags- und Angebotssituationen beobachtet, dokumentiert und gemeinsam unter Berücksichtigung mathematikdidaktischer Aspekte reflektiert. Die pädagogisch-didaktischen Handlungskompe-

Abb. 1: Aufbau der Fortbildungen

tenzen sollen so auf einer individuellen Ebene von den Beteiligten vertieft werden können.

Literatur.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten.* Berlin: Logos Verlag.

Fuson, K. C. (1988). *Children´s Counting and Concepts of Number.* New York: Springer.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes.* Münster: Waxmann.

Gasteiger, H. (in Druck). In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag Stein.

Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2008). Effekte vorschulischer mathematischer Förderung am Ende des ersten Schuljahres: Erste Befunde einer Längsschnittstudie. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 1*, 65–82.

Hasemann, K. (2003). *Anfangsunterricht Mathematik.* Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Kaufmann, L., Nuerk, H.-C., Graf, M., Krinzinger, H., Delazer, M. & Willmes, K. (2009). *Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten vom Kindergarten bis zur 3. Klasse.* Bern: Huber.

Krajewski, K. (2008). Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen. In F. Petermann & W. Schneider (Hrsg.), *Angewandte Entwicklungspsychologie* (S. 275–304). Göttingen: Hogrefe.

Kultusministerkonferenz (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss vom 15.10.2004. München: Luchterhand.

Lipowsky, F. (2004). Was macht Fortbildungen für Lehrkräfte erfolgreich? Befunde der Forschung und mögliche Konsequenzen für die Praxis. *Die Deutsche Schule, 96/4*, 462–479.

Lipowsky, F. (2011). Theoretische Perspektiven und empirische Befunde zur Wirksamkeit von Lehrerfort- und -weiterbildung. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 398–417). Münster: Waxmann.

Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2011). *ElementarMathematischesBasisInterview für den Einsatz im Kindergarten.* Offenburg: Mildenberger

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B. & Grüßing, M. (2013). *ElementarMathematischesBasisInterview Zahlen und Operationen*. 2. überarbeitete Auflage. Offenburg: Mildenberger.

Yoon, K., Duncan, T., Lee, S., Scarloss, B. & Shapley, K. (2007). Reviewing the evidence on how teacher professional development affects student achievement. *Issues & Answers Report, 33*, 1–62. Verfügbar unter: http://www.pdal.net/reports.asp [19.03.2014]

Marita FRIESEN, Anika DREHER, Sebastian KUNTZE, Ludwigsburg

Aspekte fachdidaktischer Analysekompetenz bezogen auf den Umgang mit Repräsentationen im Mathematikunterricht

Neben professionellem Wissen zu Repräsentationen müssen Lehrkräfte auch über die fachdidaktische Kompetenz verfügen, Unterrichtssituationen in Bezug auf den Umgang mit Repräsentationen analysieren zu können. In einer explorativen Studie mit 31 Lehramtsstudierenden wurden anhand authentischer Unterrichtsvideos Aspekte einer solchen Analysekompetenz untersucht. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Qualität der Antworten der befragten Lehramtsstudierenden von unterschiedlichen Befragungsformaten beeinflusst wird.

Theoretischer Hintergrund

Mathematische Objekte sind abstrakt, damit „unsichtbar" und unserer Wahrnehmung nicht direkt zugänglich (Duval, 2006). Repräsentationen, die für diese Objekte stehen (Goldin & Shteingold, 2001), sie auf vielfältige Weise abbilden können und sich dabei ergänzen, ermöglichen nicht zuletzt Strategien des Problemlösens und das Sprechen über Mathematik. Für das Verständnis mathematischer Begriffe und den Aufbau mathematischen Wissens ist es notwendig, dass Lernende vielfältige Repräsentationsformen von mathematischen Objekten anwenden können (Duval, 2006). Der Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationsformen erfordert jedoch komplexe Denkleistungen und kann bei unzureichender Unterstützung zu Verständnisschwierigkeiten bei Schülerinnen und Schülern führen (Ainsworth, 2006). Lehrkräfte benötigen professionelles Wissen zum Umgang mit Repräsentationen, um deren Lernpotential voll ausschöpfen zu können, indem sie beispielsweise geeignete Reflexionsanlässe und Hilfen im Umgang mit Repräsentationen zur Verfügung stellen.

Neben dem professionellen Wissen von Lehrkräften wird die professionelle Wahrnehmung als eine notwendige Voraussetzung für professionelles Handeln angenommen (Schoenfeld, 2011; Sherin, Jacobs & Randolph 2011). Entsprechend müssen Lehrkräfte neben professionellem Wissen zu Repräsentationen auch über eine entsprechende Kompetenz verfügen, Lehr- und Lerngelegenheiten im Mathematikunterricht mit Blick auf den Umgang mit Repräsentationen analysieren zu können. Fachdidaktische Analysekompetenz zum Umgang mit Repräsentationen umfasst in Anlehnung an den Begriff des „Noticing" (Sherin et al., 2011) das Wahrnehmen entsprechender relevanter Unterrichtssituationen sowie deren argumentative Bewertung auf der Grundlage professionellen Wissens zum Umgang mit

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 381–384). Münster: WTM-Verlag

Repräsentationen. Da professionelle Wahrnehmung sowohl als wissensbasierter Prozess als auch als Merkmal von Lehrerexpertise betrachtet wird, stellt sich die Frage, inwieweit Lehramtsstudierende bereits über Elemente einer fachdidaktische Analysekompetenz im Hinblick auf den Umgang mit Darstellungen verfügen.

Bei der Untersuchung von Aspekten dieser fachdidaktisch verstandenen Analysekompetenz stellen sich Herausforderungen im Zusammenhang mit dem Erhebungsformat. Da davon auszugehen ist, dass die Befragten Verknüpfungen mit relevantem professionellem Wissen herstellen müssen, dürfte möglichen Impulsen durch das Frageformat eine besondere Bedeutung zukommen. So ist anzunehmen, dass Hinweise auf Kriterienwissen im Zusammenhang mit dem Umgang mit Repräsentationen zwar helfen, auf bestimmte Aspekte einer diesbezüglichen Analysekompetenz zu fokussieren, andererseits könnten diese Hinweise bestimmte Analyseschritte bei den Befragten erst herausfordern, die von diesen ohne Hinweis nicht unternommen worden wären. Da zu diesem möglichen Zusammenhang Erkenntnisse fehlen, wird dieser Bereich explorativ untersucht.

Forschungsinteresse

Ausgehend vom dargestellten theoretischen Hintergrund ergeben sich damit folgende Forschungsfragen:

- Erkennen Lehramtsstudierende die Bedeutung des Umgangs mit konkreten Repräsentationen für das Verständnis von Schülerinnen und Schülern?
- Wie beurteilen Lehramtsstudierende den Umgang mit Repräsentationen in Lehr- und Lernsituationen des Mathematikunterrichts?
- Beeinflussen unterschiedliche Frageformate (offen, fokussiert, geschlossen) die Qualität der Antworten der Lehramtsstudierenden im Hinblick auf Elemente des Analysierens von Unterrichtssituationen bezüglich des Umgangs mit Repräsentationen?

Stichprobe und Design

Befragt wurden 31 Lehramtsstudierende (davon 19 weiblich und 12 männlich), die Teilnehmer eines fachdidaktischen Hauptseminars waren. Den Probanden wurden zu Seminarbeginn zwei sechs- bzw. siebenminütige Ausschnitte aus authentischen Unterrichtsvideos gezeigt, in denen der Umgang mit Repräsentationen eine zentrale Rolle spielte. Die beiden Videos unterschieden sich in Bezug auf die Inhaltsbereiche (Quersummenregel bzw. Lösen von Textaufgaben durch algebraische Gleichungen) und die verwendeten Sozialformen (Frontal- bzw. Individualunterricht), hatten jedoch als Gemeinsamkeit, dass sich der gezeigte Umgang mit Repräsentationen aufgrund einer unzureichenden Verknüpfung und mangelnden Reflexion der verwendeten Repräsentationsformen als nicht optimal darstellte. Im Anschluss an die Betrachtung der beiden Unterrichtsvideos wurden die Lehramtsstudierenden jeweils gebeten einen Fragebogen auszufüllen, der sowohl offene, als auch fokussierte und geschlossene Frageformate enthielt (für nähere Informationen zu diesen Frageformaten s. Friesen & Kuntze, eingereicht).

Ausgewählte Ergebnisse

Für die offenen sowie die fokussierten Fragen wurde ein Kodiermanual erstellt. Zwei entsprechend geschulte Rater erzielten eine substantielle bis gute Übereinstimmung mit Werten zwischen .66 und .87 (Cohens Kappa).

Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse sowie exemplarische Kodierbeispiele berichtet. Im offenen Frageteil nannten und beschrieben 77% bzw. 71% (Video 1 bzw. Video 2) der Lehramtsstudierenden unterschiedliche Repräsentationsformen auf die (offene) Frage hin, wie das Verständnis der Schülerinnen und Schüler im Video unterstützt wurde. Beispiele für Antworten, die diesen Code erhielten, sind: *„Mit Hilfe einer Stellenwerttafel und Knöpfen"; „Textaufgabe wird verbalisiert"; „bildliche Darstellung mit Tabelle"*. 47% bzw. 48% der Lehramtsstudierenden beschrieben zusätzlich den von ihnen in den Unterrichtsstunden beobachteten Umgang mit Repräsentationen näher, etwa: *„Schüler sollten sich die Aufgabe kurz durchlesen und versuchen mit eigenen Worten wiederzugeben (Textverständnis). Dann wurden einzelne Teile besprochen. Was ist gegeben? Was ist gesucht? Anlage einer Tabelle: Vater, Sohn, heute, in 10 Jahren"*.

Vor dem fokussierten Frageteil erhielten die Probanden eine Definition von „Darstellungen"/Repräsentationen im mathematischen Kontext, um ein gemeinsames Begriffsverständnis für die folgenden Fragen zu schaffen. Befragt nach der Qualität der Hilfen, die die Lehrkräfte in den Videos zum Umgang mit Repräsentationen gaben, bewerteten 32% bzw. 16% (Video 1 bzw. Video 2) der Lehramtsstudierenden die gegebenen Hilfestellungen als kritisch bzw. als nicht ausreichend. Beispielantworten hierfür sind: *„Es wurde nicht näher auf die Tabelle eingegangen"; „Hilfen gab es eigentlich keine"*. 13% der Lehramtsstudierenden gaben zusätzlich Gründe für ihre Bewertungen an: *„Die Schülerin schien mit den alternativen Darstellungen nicht vertraut zu sein, was zu Schwierigkeiten führte"; „Lehrer hätte verständlich machen sollen, dass die Münzen in der Stellenwerttafel bestimmte Zahlen darstellen"*. Die Auswertung des geschlossenen Frageteils zeigte, dass die Lehramtsstudierenden sowohl die beobachtete Reflexion als auch die Verknüpfung der verwendeten Repräsentationen in beiden Unterrichtsvideos im Mittel als negativ (auf der gegebenen Likert-Skala *„trifft nicht zu"* bzw. *„trifft nur teilweise zu"*) beurteilten.

Diskussion

Die berichteten Ergebnisse zeigen, dass der Großteil der befragten Lehramtsstudierenden zwar den Einsatz von konkreten Repräsentationen in den gezeigten Unterrichtsvideos wahrgenommen und angesprochen hat, dass jedoch weniger als die Hälfte der Befragten auch den *Umgang* mit Repräsentationen als bedeutsam für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler beschrieb. Trotz Fokussierung auf Hilfen im Umgang mit Repräsentationen durch das Frageformat erkannte weniger als ein Drittel der Lehramtsstudierenden entsprechende kritische Situationen in den Videos. In den geschlossenen Frageformaten hingegen beurteilten deutlich mehr Lehramtsstudierende die gezeigten Unterrichtssituationen als kritisch. Dies gibt Hinweise darauf, dass die verwendeten unterschiedlichen Frageformate die Qualität der Antworten der Lehramtsstudierenden beeinflussten: in den geschlossenen Formaten enthielten die Items bereits Hinweise auf entsprechende Kriterien wie „Reflexion" oder „Verknüpfung" von Repräsentationen, die die Lehramtsstudierenden ihren Bewertungen zugrunde legen konnten. Die Ergebnisse der vorgestellten explorativen Studie zeigt die Herausforderung an die Entwicklung von geeigneten Frageformaten zur Erfassung von fachdidaktischer Analysekompetenz zum Umgang mit Repräsentationen auf: Diese sollten sowohl die Wahrnehmung relevanter Unterrichtssituationen als auch deren argumentative Bewertung so erfassen, dass Rückschlüsse auf die Ausprägung der Kompetenz, den Umgang mit Repräsentationen analysieren zu können, möglich werden.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16, 183–198.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), The role of representation in school mathematics (pp. 1–23). Boston, Virginia: NCTM.

Schoenfeld, A.H. (2011). Noticing matters. A lot. Now what? In M. Sherin, V. Jacobs, R. Philipp (Eds.), Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes (pp. 223-238). New York: Routledge.

Sherin, M., Jacobs, V., Philipp, R. (2011). Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes. New York: Routledge.

Daniel FRISCHEMEIER, Paderborn

Wie vergleichen Lehramtsstudierende Verteilungen unter Verwendung der Software TinkerPlots?

Vergleiche von Verteilungen zweier numerischer Merkmale sind im alltäglichen Leben und in den Medien präsent - eine typische Frage zum Verteilungsvergleich ist beispielsweise (Biehler et al., 2003): „Inwiefern unterscheiden sich Schülerinnen und Schüler hinsichtlich ihrer Zeit am Computer (in Stunden pro Woche)?“ Wenn man solchen Fragestellungen nachgeht, sollte man zum einen mit multivariaten und realen Daten arbeiten (Garfield & Ben-Zvi, 2008), sowie adäquate Software, wie zum Beispiel die Software TinkerPlots (Konold & Miller, 2011) einsetzen. Die Vorzüge der Software TinkerPlots werden u.a. in Biehler (2007) diskutiert. Betrachtet man Lernende beim Durchführen eines Verteilungsvergleiches unter Verwendung einer Software, so eröffnen sich zwei Perspektiven: Zum einen der Blick auf den Einsatz der Software im Verteilungsvergleich-Prozess, zum anderen die stochastischen Aspekte beim Herausarbeiten von Unterschieden und Gemeinsamkeiten zwischen den Verteilungen. Wir wollen im Folgenden die erste Perspektive verfolgen.

1. Datenanalyse-Zyklus mit Software

Biehler (1997, 175) beschreibt einen Zyklus, der den Einsatz von Software in den Verteilungsvergleich-Prozess einordnet und verschiedene Phasen im Datenanalyse-Prozess identifiziert. Biehler unterscheidet hier die vier aufeinander folgenden Phasen „statistical problem“, „problem for the software“, „results of software use“ und „interpretation of results in statistics“ und stellt in der anschließenden empirischen Studie fest, dass Lernende oftmals beim Arbeiten mit Software, mit den von der Software erzeugten Produkten (Kennzahlen, Graphiken), „zufrieden“ sind. Sie streben allerdings keine weitergehenden Beschreibungen oder gar Interpretationen an, oftmals erfolgt ein „Sprung“ von dem realen Problem direkt in die Nutzung der Software.

2. Design der Studie

Wir wollen in einer explorativen Studie überprüfen, ob man ähnliche Beobachtungen auch bei Lernenden, die Verteilungen mit TinkerPlots vergleichen, machen kann. Als Fragestellungen bezüglich der Perspektive „Einsatz der Software im Verteilungsvergleich-Prozess“ formulieren wir: „Welche typischen Phasen können bei der Durchführung eines Verteilungsvergleichs mit TinkerPlots identifiziert werden?“, „Wie groß ist der

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 385–388). Münster: WTM-Verlag

Anteil der einzelnen Phasen am gesamten Verteilungsvergleich-Prozess?“ und „Inwieweit machen die Probanden Schlussfolgerungen und Interpretationen in ihren Daten?“ Zur Beantwortung dieser Fragen, wurden Studierende des Lehramts GHRGe Mathematik beim Durchführen von Verteilungsvergleichen mit TinkerPlots beobachtet. Um den Anforderungen „reale und multivariate“ Daten zu genügen, wurde der Datensatz „Verdienststrukturerhebung 2006“ (kurz: VSE 2006), der eine Zufallsstichprobe (n=861) der ursprünglichen VSE (http://www.forschungsdatenzentrum.de) darstellt, verwendet. Dieser Datensatz, der Informationen von 861 Arbeitnehmerinnen und Arbeitnehmern in Deutschland anhand der Variablen „Geschlecht“, „Bruttomonatsverdienst“, „Region“, „Stellung im Beruf“, etc. enthält, wurde in TinkerPlots importiert und den Probanden bereitgestellt. Die Aufgabenstellung „Inwiefern unterscheiden sich Arbeitnehmerinnen und Arbeitnehmer hinsichtlich ihres Bruttomonatsgehalts? Arbeiten Sie Unterschiede in beiden Verteilungen heraus.“ regt einen Verteilungsvergleich an. In diesem Fall den Vergleich der Verteilungen des Merkmals „Bruttomonatsverdienst“, getrennt nach dem Merkmal „Geschlecht“. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt in Zweierteams, wobei die Probanden dazu aufgefordert werden, ihre Gedanken, Vorgehensweisen und Intentionen laut zu kommunizieren. Einen Eindruck für eine mögliche, in TinkerPlots erstellte Graphik, die den Unterschied zwischen den beiden Verteilungen herausstellt, gibt die Abbildung 1.

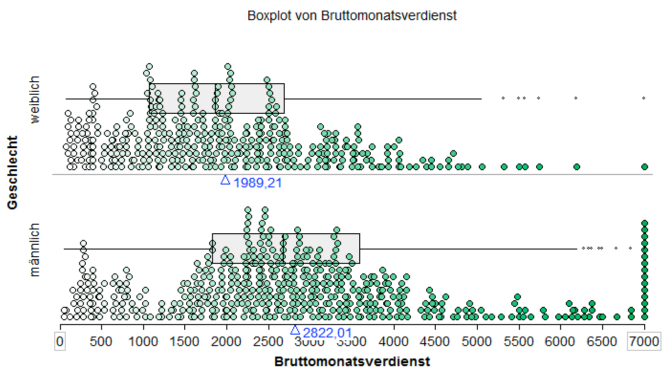


Abbildung 1: mögliche TinkerPlots-Graphik zur VSE 2006

3. Durchführung der Studie

Die Teilnehmer der Studie waren GHRGe-Mathematik-Lehramtsstudierende der Universität Paderborn, die u.a. zwei fachliche Lehrveranstaltungen zur Stochastik besucht haben: Eine Vorlesung „Elemente der Stochastik“ sowie ein vertiefendes, an die Vorlesung anschließendes Seminar „Statistisch denken und forschen lernen“ (für Details zu den Lehrveranstaltungen siehe Frischemeier & Biehler (2012)). Nach dem Besuch der beiden Lehrveranstaltungen wurden insgesamt 14 Teilnehmerinnen und Teilnehmer (7 Paare) zur Bearbeitung der Aufgabe, welche unter Laborbedingungen stattfand, eingeladen. Die Bildschirmaktivitäten wurden mit Camtasia, die Gesten der Teilnehmer mit einer Videokamera aufgenommen. Die Kommunikation der Paare und die Aktionen mit der Software wurden anschließend transkribiert.

4. Auswertung und Analyse der Daten (Transkripte)

Die Analyse der Transkripte wurde mittels einer strukturierenden, qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) durchgeführt. Die Kategorien (im Folgenden: Phasen) wurden sowohl deduktiv als auch induktiv ermittelt (Kuckartz, 2012, 69). In einem ersten Schritt haben wir die vier Phasen nach Biehler (1997) als deduktive Grundlage genommen und dann mithilfe der vorliegenden Daten (Transkripte und Videos) induktiv angereichert und verfeinert. Schließlich lassen sich sechs Phasen im Prozess „Verteilungsvergleich mit Software" identifizieren: *Reales Problem*, *Statistische Aktivität*, *Einsatz der Software*, *Ablesen der Ergebnisse*, *Schlussfolgerungen* und *Gründe*. Es bleibt eine Restkategorie, die die nicht-kodierbaren restlichen Textstellen enthält. Definitionen sowie Ankerbeispiele zu den Phasen kann man der Tabelle 1 entnehmen. Als Analyseeinheit dienten die für die qualitative Inhaltsanalyse aufbereiteten Transkripte zur Aufgabenbearbeitung. Die minimale Kodiereinheit wurde auf ein einzelnes Wort, die maximale Kodiereinheit wurde auf eine Phrase festgesetzt. Einer Textstelle wurde höchstens eine Kodierung zugeordnet.

Phase	Definition	Beispiel
Reales Problem	Formulierung der Untersuchungsabsicht	„Okay, wir sollen jetzt gucken, wie sich männliche und weibliche Arbeitnehmer im Gehalt unterscheiden!"
Statistische Aktivität	Ausdrücken des (Untersuchungs-) Vorhabens auf der statistischen Ebene - Oder: Artikulierung der bevorstehenden Aktivität in TinkerPlots	„Wir könnten die Mittelwerte vergleichen"
Einsatz der Software	Aktive Nutzung der Software TinkerPlots	Es werden die arithmetischen Mittelwerte beider Verteilungen in TinkerPlots berechnet
Ablesen der Ergebnisse	Ablesen von Werten oder Graphiken, die mit der Software erstellt wurden	„Das arithmetische Mittel der Verteilung des Merkmals Bruttomonatsverdienst beträgt bei den Frauen ca. 2000€."
Schlussfolge-rungen	Tätigen von Schlussfolgerungen oder Interpretationen	„Das arithmetische Mittel ist bei den Männern höher als bei den Frauen, daher verdienen Männer mehr als Frauen"
Gründe	Angeben von (möglichen) Gründen, die die Erkenntnisse aus den Daten erklären könnten	„Ja…das ist deswegen niedriger, weil da viele Frauen Teilzeit arbeiten"

Tabelle 1: Definitionen und Ankerbeispiele zu den Phasen

5. Ergebnisse

Nach einem vollständigen Materialdurchlauf wurden Häufigkeitsauswertungen (bezüglich) der einzelnen Kodierungen durchgeführt.

	Reales Problem	Statistische Aktivität	Einsatz der Software	Ablesen der Ergebnisse	Schlussfolgerungen	Gründe	Rest	Gesamt
Rel. H´keit (Abs. H´keit)	0.0172 (7)	0.1838 (75)	0.3407 (139)	0.2525 (103)	0.0858 (35)	0.0269 (11)	0.0931 (38)	1.0000 (408)

Tabelle 2: Häufigkeit der Kodierungen zu den einzelnen Phasen

Die Tabelle 2 zeigt die Häufigkeiten der Kodierungen zu den einzelnen Phasen. Es fällt auf, dass die Anteile der Kodierungen am höchsten in den Phasen *Einsatz der Software* (ca. ein Drittel der Kodierungen) und *Ablesen der Ergebnisse* (ca. ein Viertel der Kodierungen) sind. Beide Phasen machen zusammen fast 60% des gesamten Prozesses aus. *Schlussfolgerungen* haben einen geringen Anteil (ca. 8,6%) an Kodierungen. Sehr gering ist der Anteil auch bei den Phasen *Gründe* und *Reales Problem* mit ca. 2,7% und 1,7%. Der Anteil der Kodierungen zur Phase der *statistischen Aktivität* beträgt mit ca. 18,3 % der Kodierungen ungefähr die Hälfte des Anteils der Kodierungen zur Phase *Einsatz der Software*. Diese Tatsachen bestätigen Biehlers Beobachtungen (s.o.) und könnten ebenfalls als Indiz dafür gewertet werden, dass Lernende die Ergebnisse der Software oft nicht für ihre weiteren Schlussfolgerungen nutzen und die Neigung haben direkt in die Software „einzutauchen".

6. Ausblick

Für eine zukünftige, differenziertere Auswertung wird eine Unterscheidung der Anteile der Kodierungen hinsichtlich der einzelnen Paare vorgenommen. Des Weiteren wird der „Verteilungsvergleich-Prozess" auch unter der stochastischen Perspektive (Herausarbeiten von Unterschieden und Gemeinsamkeiten zwischen den Verteilungen) betrachtet werden.

Literatur

Biehler, R. (1997). Students' difficulties in practising computer supported data analysis - Some hypothetical generalizations from results of two exploratory studies. In J. Garfield & G. Burrill (Eds.): *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics.* Voorburg: International Statistical Institute. 169-190.

Biehler, R., Kombrink, K., & Schweynoch, S. (2003). MUFFINS – Statistik mit komplexen Datensätzen – Freizeitgestaltung und Mediennutzung von Jugendlichen. *Stochastik in der Schule,* 23(1), 11-25.

Biehler, R. (2007). TINKERPLOTS: Eine Software zur Förderung der Datenkompetenz in Primar- und früher Sekundarstufe. *Stochastik in der Schule*, 27(3), 34-42

Frischemeier, D. & Biehler, R. (2012). Statistisch denken und forschen lernen mit der Software TinkerPlots. In Kleine, M. und Ludwig, M. (Eds.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, WTM: Münster. 257-260.

Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.

Konold, C. & Miller, C. (2011). TinkerPlots 2.0. Emeryville, CA: KeyCurriculumPress.

Kuckartz, U. (2012): *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. 1. Auflage. Weinheim und Basel.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. 11. Auflage. Weinheim: Beltz.

Katharina GAAB, Saarbrücken

Geometrie in der Hauptschule

Von der Volksschuloberstufe zur Hauptschule

Die Volksschule hatte bereits in den 1920er Jahren den Charakter einer ‚Restschule' und wurde nach ihrer Wiederkehr nach dem Zweiten Weltkrieg immer mehr kritisiert. 1964 wurde beschlossen die Volksschuloberstufe in eine moderne Hauptschule zu überführen. Diese sollte als Berufseingangsstufe auf eine Lehre vorbereiten. Ein Übergang zu höheren Bildungsgängen von der Hauptschule aus wurde (noch) nicht intendiert.

Die nach dem Zweiten Weltkrieg bis etwa 1960 entstandenen Lehrpläne sind noch an denen von 1925 orientiert. Der Rechen- und Raumlehreunterricht der Volksschule diente nur lebenspraktischen Zwecken und zeigt daher eine generelle Tendenz zur Abgrenzung vom Mathematikunterricht anderer Schularten. Durch die Umgestaltung der Volksschule zur Hauptschule sollten die Lehrpläne nun an die der höheren Schulen angelehnt werden. Nach einem Beschluss der Kultusministerkonferenz von 1968 war der Unterricht der Hauptschule durch ein Weglassen von Inhalten der höheren Schulen geprägt. In den 1980er Jahren gab es Lehrplankommissionen, die wieder mehr Praxisbezug im Unterricht umsetzen wollten.

Heutige Situation

In Deutschland gibt es derzeit (nur) noch fünf Bundesländer mit Hauptschulen als eigenständige Schulform. In den übrigen Ländern wurde die Hauptschule nach und nach in andere Schulformen überführt. Alle Bundesländer wollen den Hauptschulabschluss (HSA) grundsätzlich erhalten und aufwerten, auch wenn dieser nicht mehr an die Schulform geknüpft ist. Bei gleichzeitigem Anstreben einer größeren Durchlässigkeit zum Mittleren Bildungsabschluss im Anschluss an den Hauptschulabschluss soll durch eine Stärkung der Berufsorientierung ein besserer Anschluss an den Arbeitsmarkt gelingen.

Der ‚Hauptschulunterricht' insgesamt, und somit auch der in Geometrie, muss zum einen Allgemeinbildung und zum anderen Berufsvorbereitung sichern. Zu letzterer gehört u. a. außerdem die Schulung motorischer Fähigkeiten. Viele (handwerkliche) Berufe erfordern Feinmotorik und genaues Arbeiten. Aber auch weitere Grundfähigkeiten können im Geometrieunterricht ausgebildet werden. Sowohl für das berufliche Leben als auch insgesamt ist die Entwicklung des Anschauungsraumes (nach HOLLAND 1988) von zentraler Bedeutung.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 389–392). Münster: WTM-Verlag

Im Folgenden wird versucht für die beiden Schulformen Volksschule und Hauptschule einen Überblick zu schaffen über die Begriffe, die im Unterricht tatsächlich verwendet oder entwickelt werden. Für meine Betrachtung möchte ich *Objekt-*, *Eigenschafts-* und *Relationsbegriffe,* sowie *Maßbegriffe* voneinander abgrenzen (Adaption von HOLLAND 1988). Wenn ich von Objektbegriffen spreche, dann sollen tatsächlich nur Objekte in der Menge der ebenen und räumlichen geometrischen Figuren gemeint sein. Die Eigenschaften solcher Figuren werden im Folgenden als Eigenschaftsbegriffe beschrieben. Wenn sich die Eigenschaft auf die Beziehung zwischen mehreren solchen Objekten bezieht, dann nenne ich diese Art Relationsbegriffe. Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt und Volumen ordne ich der Kategorie Maßbegriffe zu.

Begriffe in Raumlehre und Geometrieunterricht im Lehrplan

Exemplarisch betrachte ich hier den Übergang von der Volksschuloberstufe zur Hauptschule, wie er sich in Rheinland-Pfalz vollzogen hat.

Die dort 1957 verabschiedeten *Richtlinien für die Volksschulen* beinhalten fast ausschließlich Objektbegriffe, die tatsächliche Objekte der Ebene (wie z. B. Dreieck) und des Raumes (z. B. Säule) meinen. Diese werden lediglich durch die einfachsten Maßbegriffe, sowie durch **senkrecht** als einzigem Relationsbegriff ergänzt. Auch Eigenschaftsbegriffe fehlen neben senkrecht (s. u.) gänzlich. Die Raumlehre bezieht sich stets auf konkrete Objekte an sich, ohne diese weitergehend zu untersuchen (z. B. Symmetrie) oder zueinander in Beziehung zu setzen.

Mit der Hauptschule wurden neue Lehrpläne für alle Klassenstufen eingeführt. Der Lehrplan von 1968 beinhaltet zur Geometrie:

(ebene und räumliche) Grundformen, geometrische Grundbegriffe (**Punkt, Gerade, Parallele)**, Maße, **Grundformen ebener Abbildungen**, Dreiecke und ihre Eigenschaften (**Konstruktionen, Symmetrie)**, **Darstellende Geometrie [...]**.

Fett hervorgehoben habe ich hier neue Themen, die in den Richtlinien noch nicht enthalten waren. Auch wenn die geometrischen Grundformen größtenteils vorher schon da waren, erfahren viele Begriffe eine Erweiterung. So kommen z. B. durch die Behandlung von Dreieckskonstruktionen neue Aspekte eines vorher schon bekannten Begriffs (Dreieck) hinzu.

Was beim Blick in damalige Schulbücher auffällt

Den in den Vorgaben auftauchenden Bezeichnern eine Bedeutung zuzuweisen verlangt nach einem Blick ins Schulbuch als dem zentralen Unterrichtsmedium. Besonders interessant ist der Umgang mit dem Begriff **senkrecht (zu).**

In den Richtlinien ist dies der einzige explizit auftauchende Relations- und hier auch Eigenschaftsbegriff. Im Volksschulbuch *Wir rechnen* aus dieser Zeit findet sich der Begriff im 5. Schuljahr bei der Einführung des rechten Winkels. Senkrecht taucht hier zuerst nur als Eigenschaftsbegriff (eine Mauer steht senkrecht) in alltäglicher Verwendung auf. An dieser Stelle ist zunächst mit senkrecht ausschließlich **lotrecht**, also senkrecht zur Erdoberfläche gemeint. Lotrecht zu sein ist eine Eigenschaft eines einzelnen Objekts, daher ist senkrecht in diesem Sinne ein Eigenschaftsbegriff. Dass hier Alltagssprache und mathematische Sprache miteinander vermischt werden, zeigt sich auch durch die gemeinsame Betrachtung mit dem umgangssprachlichen Pendant **waagerecht**. Senkrecht als Relation ebener Objekte in beliebiger Lage zueinander wird dann im Folgenden - zumindest in der Ebene - implizit in Aufgabenstellungen vorausgesetzt („[Der] senkrechte Abstand [zweier Seiten]“, „Die beiden gleichlaufenden [sic!] Senkrechten [eines Giebels] messen [...]“), aber nicht definiert.

Im Hauptschulbuch *Gamma 5* wird **senkrecht** prototypisch dargestellt als Lage zweier Faltlinien zueinander, die gerade nicht lotrecht sind. Senkrecht wird explizit definiert und auch das Symbol für den rechten Winkel kommt hier, anders als im Volksschulbuch, konsequent zum Einsatz. Hier erfolgt auch unmittelbar die Übertragung des Begriffs von Objekten in der Ebene auf den Raum. Bei der konkreten Thematisierung des Schrägbildes eines Körpers wird die Lage dessen Kanten zueinander im Raum untersucht. Diese Erweiterung in den Raum lässt das Volksschulbuch vermissen. Obwohl lotrecht senkrecht zum Boden meint, wird senkrecht nicht als räumliche Relation verallgemeinert. In einem anderen Volksschulbuch gleicher Zeit, dem *Arbeitsbuch für den Rechenunterricht*, wird hingegen sogar die Lage von Ebenen zueinander thematisiert. Die in den Richtlinien auftauchenden Bezeichner führen je nach Interpretation des Autors zu unterschiedlichen begrifflichen Konkretisierungen im Schulbuch.

Ähnlich interessante Beobachtungen sind bei **parallel (zu)** möglich.

Aus der aktuellen Diskussion

Für die heutige Situation muss die Frage neu beantwortet werden, welche Inhalte und Begriffe ein zeitgemäßer Geometrieunterricht braucht, um einen Schüler bis zum HSA sowohl allgemein als auch berufsvorbereitend zu bilden. Den heutigen Schulformen, auf denen ein HSA erworben werden kann, liegen die *Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss* (2004) der KMK als Bildungsziele zugrunde. Für den Geometrieunterricht ist von den fünf sog. Leitideen ‚Raum und Form‘, sowie ‚Messen‘, und deren inhaltliche Konkretisierung von besonderer Bedeutung.

Basiskompetenzen Mathematik - für Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht ist eine Publikation einer Arbeitsgruppe von Schulpraktikern in Kommunikation mit Personalverantwortlichen in Unternehmen, die 2011 veröffentlicht wurde. Ausgangspunkt des Arbeitsprozesses war die Sorge über den großen Anteil Jugendlicher, die am Ende ihrer Schulzeit nicht über Voraussetzungen verfügen für eine eigenständige Bewältigung von Alltagssituationen und den erfolgreichen Beginn einer Ausbildung. Das Handwerk ist als arbeitsintensiver Wirtschaftsbereich auf qualifizierte MitarbeiterInnen angewiesen. Aktuell gibt es z. B. Bestrebungen des Westdeutschen Handwerkskammertags durch eine Zusammenstellung von an den Bildungsstandards orientierten Aufgaben (*Unterrichtsmodul Mathematik und Physik*, 2009) berufsbezogene Beispiele in den Fachunterricht der Sekundarstufe I zu integrieren.

Die Vorschläge aus den drei Perspektiven von Politik, Schulpraktikern und Arbeitgebern zeigen einige Unterschiede in der Behandlung der Inhalte auf. So findet sich bei der Leitidee ‚Raum und Form' die Forderung „Die SuS fertigen Netze, Schrägbilder und Modelle von ausgewählten Körpern an und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen." Die Basiskompetenzen beinhalten, dass „SuS [...] (realen) Körpern Netze und Schrägbilder zuordnen und umgekehrt Netzen und Schrägbildern (reale) Körper zuordnen [können]." Einen Unterschied in der Auffassung dieser Forderungen zeigen folgende Beispiele: in der Beispielaufgabe aus den Basiskompetenzen sollen (mögliche) Würfelnetze als solche richtig erkannt oder als falsch ausgeschlossen werden. Die Module der Handwerkskammer beinhalten deutlich komplexere Aufgaben zum räumlichen Denken:

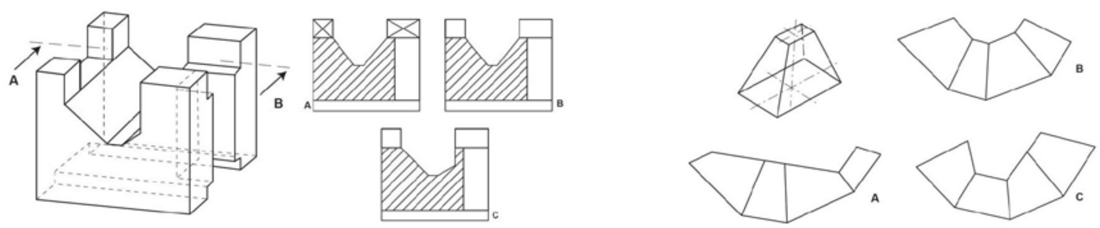


Abbildung: Schnitte bzw. Abwicklungen erkennen (WHKT Düsseldorf, 2009)

Literatur

Detaillierte Quellenverweise finden sich in:

Gaab, K. (2014). Begriffe im Geometrieunterricht der Hauptschule. In A. Filler, A. Lambert & M. Ludwig (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (im Druck). Stuttgart: Springer.

Albert A. GÄCHTER, St.Gallen

Trifles

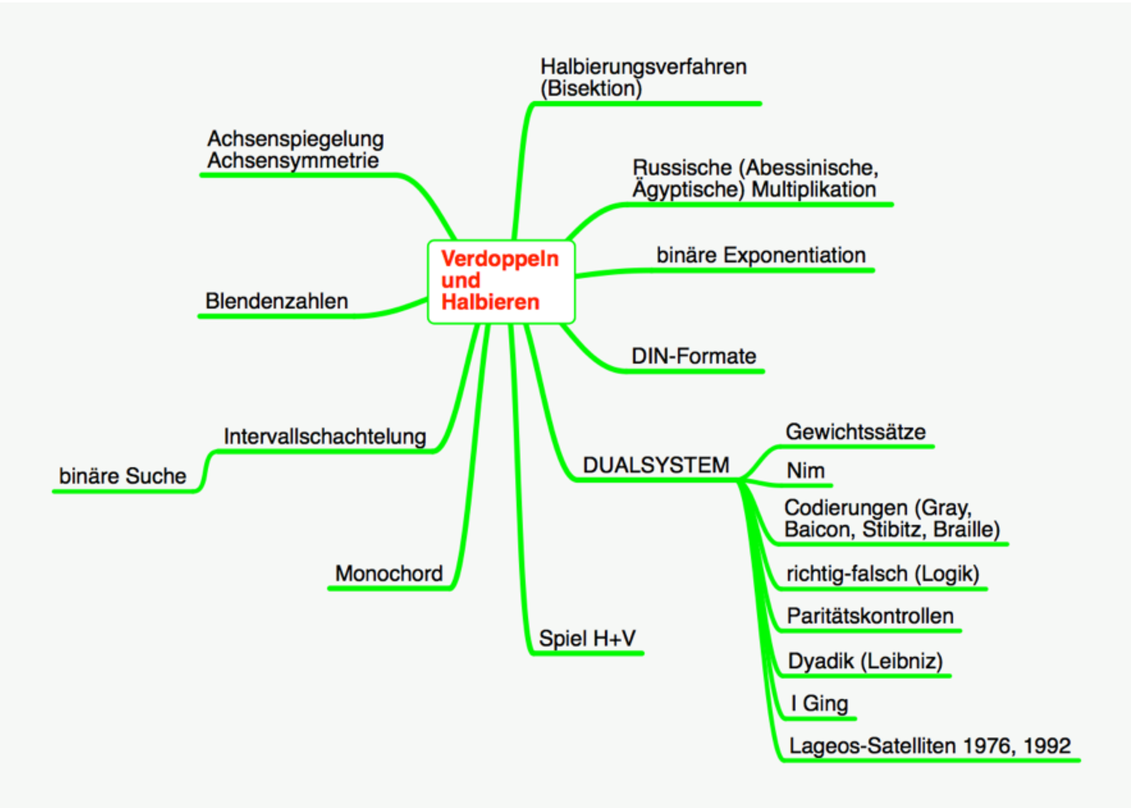
Trifle (sprich Treifel) bedeutet Kleinigkeit und ist auch der Name einer englischen mehrschichtigen Süss-Speise.

Meine didaktische Definition lautet:
Trifles sind mathematische Miniaturen mit dem Potential für Mehrschichtigkeit.

Im Vortrag kommen drei Beispiele für Trifles zur Sprache:

1. Das Schustermesser (Arbelos)
2. Halbieren und Verdoppeln
3. Der Gnomon

Jedes ausgeführte Beispiel zeigt, wie solche kleine zündende Ideen die Türe öffnen für eine reichhaltige Mehrschichtigkeit. So führt z.B. das Trifle Halbieren und Verdoppeln zu folgendem Netzwerk:



In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 393–394). Münster: WTM-Verlag

Wie man sieht, können Trifles im Unterricht

- wirksame Akzente setzen,
- die Linearität der Stoffvermittlung durchbrechen,
- das Augenmerk auf Gemeinsamkeiten im vielfältigen Stoffdickicht richten,
- ein Netzwerk aufbauen, das sich an mathematischen Ideen orientiert und
- Startpunkte für spannende Abenteuer bilden.

Einige meiner Bücher sind auf diese Weise entstanden. Sie geben Interessierten tiefere Einblicke, wie Unterricht anhand von Trifles möglich ist.

Weitere Bücher sind in Vorbereitung.

Infos:

www.didamath.com

mefi@bluewin.ch

Michael GAIDOSCHIK, Klagenfurt

„Hälfte von 90? Geht doch gar nicht!“ - Zu Defiziten im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems

Massive Defizite im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems sind eines der Hauptmerkmale sogenannter „Rechenschwächen“. Hier nur einige Andeutungen dazu, wie das eine mit dem anderen zusammenhängt:

Wie soll ein Kind *im Rechnen stark* werden; wie also soll es etwa im zweiten Schuljahr flexible oder doch zumindest sichere Strategien des halbschriftlichen Addierens und Subtrahierens mit zweistelligen Zahlen entwickeln, wenn ihm nicht klar geworden ist, dass die Ziffern dieser Zahlen unterschiedliche Bündelungseinheiten repräsentieren? Wenn es etwa 38 nicht als Zusammensetzung von 3 Zehnern und 8 Einern denkt, sondern als „Aneinanderkettung“ einer Drei und einer Acht („concatenated single-digit conception of multi-digit numbers“, vgl. Verschaffel u. a. 2007)?

Wie soll es auf dieser Basis einen „Zahlenraum“ aufbauen, also die in vielen Anwendungen nützliche Übersetzung von quantitativen Beziehungen (die sich nun einmal nur bei Einsicht ins Dezimalsystem erschließen) in räumliche Vorstellungen der „Nähe“ und „Ferne“ von zwei- und mehrstelligen Zahlen zu einander, des „Dazwischen“, „Genau in der Mitte“ usw.?

Wie soll es ohne Wissen um die *multiplikative Struktur* des Dezimalsystems (das Versetzen einer Ziffer um eine, zwei, drei … Stellen nach links verzehn-, verhundert-, vertausendfacht den repräsentierten Wert) die vielfältigen Erfahrungen mit „großen Zahlen“, die es wie jedes andere Kind im Laufe der Jahre in Alltag und Schule durchaus auch macht, so verarbeiten und zueinander in Beziehung setzen, dass daraus jenes *Wissen*snetz wachsen kann, welches vermutlich gemeint ist, wenn im Zusammenhang mit mehrstelligen Zahlen unscharf von „Größen*vorstellung*“ gesprochen wird?

Einsicht in die additive und multiplikative Struktur des Dezimalsystems sind also unverzichtbare Voraussetzungen für einen stabilen Aufbau von Wissen und Können im Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“. Woran aber liegt es, dass gerade diese Voraussetzungen von manchen Kindern nicht oder nicht in ausreichendem Maße erworben werden?

Aus der Sache heraus verständliche Schwierigkeiten

Zunächst plädiere ich für einen Perspektivenwechsel: Angesichts der gewaltigen Herausforderung, die die geniale Erfindung des dezimalen Stellenwertsystems Lernenden stellt, sollten wir nicht darüber erstaunt sein, wie schwierig es Kindern fallen kann, hier zu tragfähigen Einsichten zu

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 395–398). Münster: WTM-Verlag

gelangen. Es verdient umgekehrt Bewunderung, in wie kurzer Zeit und mit wie wenig erkennbaren Friktionen sich viele Kinder ein Notationssystem zu Eigen machen, für dessen Entwicklung die Menschheit Jahrhunderte benötigt hat. Die hartnäckigen Schwierigkeiten von Lehramtsstudierenden beim Verstehen nicht-dezimaler Stellenwertsysteme waren in den letzten Jahren wiederholt Thema in Sektionsvorträgen der GDM-Tagungen. So fremd unseren Studierenden der Umgang mit Sechser-Bündelungen erscheint, so fremd ist Kindern zwangsläufig zunächst das Zehnersystem.

Eine erste *Bekanntschaft* ergibt sich zwar lange vor Schuleintritt. Da wird auch einiges *prozedurales Wissen* erworben (Zahlwortreihe über zehn hinaus, Schreiben/Lesen zumindest einiger zweistelliger Zahlen…). Der Erwerb von grundlegendem *konzeptuellem Wissen* über das Zehnersystem bleibt aber eine Aufgabe für die ersten Schuljahre. Um nur einige der Hürden deutlich zu machen, die nun überwunden werden müssen:

- Die schon vertrauten Ziffern tauchen in neuer Bedeutung auf; dasselbe Zeichen kann innerhalb einer Zahl Unterschiedliches bezeichnen.
- Zehner sind aus Einern zusammengesetzt, zweistellige Zahlen aus Zehnerbündeln und nicht weiter gebündelten Einern. Das Problem vieler Kinder, denen der Einstieg in die Mathematik schwer fällt: Sie denken schon bei Zahlen kleiner zehn *nicht* an Zusammensetzungen, sondern identifizieren sie mehr oder weniger vollständig mit Rangplätzen innerhalb einer eingelernten Reihe von Wörtern. Acht ist nicht z.B. fünf und drei, sondern das, was nach sieben kommt. In der Verlängerung ist vierzehn das, was nach dreizehn kommt, aber nicht die Zusammensetzung aus zehn und vier, einem Zehner und vier Einern.
- Zehner und Einer müssen in Schrift und Wort *sorgfältig unterschieden* werden. Die räumliche Anordnung in der Ziffernschrift ist eine kulturelle Konvention, die Kinder erst lernen müssen; die Aneignung wird in der deutschen Sprache durch zahlreiche Irregularitäten erschwert, v.a. durch den Widersinn zuerst gesprochener, rechts zu notierender Einer und danach gesprochener, links zu notierender Zehner.
- Zehner und Einer müssen *in ihrem Zusammenhang* verstanden und verwendet werden. Die 4 in 45 muss ebenso als vier Zehner wie als vierzig Einer gedacht werden können, diese vierzig (etwa zur Lösung von 40 – 5) wenn nötig als drei Zehner und noch zehn Einzelne weiterverarbeitet werden, usw. usf.. Das zuvor angesprochene *Unterscheiden* von Zehnern und Einern genügt für viele Anwendungen, etwa das Addieren von zweistelligen Zahlen mit der (deshalb gerade bei Kindern mit Lernschwierigkeiten so beliebten) Strategie „Stellenwei-

se“ (zumindest bei Aufgaben ohne Zehnerüberschreitung). Aber schon das (deshalb für viele Kinder erst einmal unlösbare) titelgebende Halbieren von 90 gelingt nur, wenn in der 9 an der Zehnerstelle die Einer mitgedacht werden (z.B. als 80 + 10, 8 Z + 10 Einer).

Durch den Unterricht mitverursachte Schwierigkeiten

In meinem Vortrag auf dem LehrerInnentag der GDM-Tagung 2014, der diesem Beitrag zu Grunde liegt, war mir wichtig, auf drei Bereiche hinzuweisen, in denen eine meiner Wahrnehmung nach im deutschen Sprachraum verbreitete Unterrichtspraxis Lernschwierigkeiten im Bereich des Dezimalsystems provozieren und verstärken kann.

Da ist zum einen die Tradition sorgfältig gestaffelter „Zahlenräume“. Die erste *unterrichtliche* Beschäftigung mit mehr als einstelligen Zahlen erfolgt dieser Tradition gemäß für viele Kinder im engen Bereich der Zahlen 10 bis 20. Für das Erarbeiten von Einsicht in das Bündelungsprinzip ist diese Beschränkung wohl kontraproduktiv: Das Bündeln kann bei Betrachtung nur dieser Zahlen ja gar nicht als *Prinzip* in Erscheinung treten, es bleibt eine vereinzelte Veranstaltung. Aus kindlicher Perspektive ist nicht nachvollziehbar, warum die Gleichsetzung „10 Einer sind ein 1 Zehner“ im Bereich bis 20 bedeutsamer sein sollte als das Bündeln von 5 Einern zu einem Fünfer, von 8 zu einem Achter usw.. Die Aufgabe 16 – 10 erwies sich in einer Interviewstudie mit 139 Kindern am Ende des ersten Schuljahres als besonders schwierig; etwa 62 Prozent der Kinder konnten sie nur durch eine mühselige Zählstrategie oder gar nicht lösen (vgl. Gaidoschik 2010). Dass hier nur „ein Zehner weg“ gedacht werden müsste, war diesen Kindern nicht zugänglich; offenbar war „Zehner“ für sie noch keine wesentliche Kategorie. Sie alle hatten vor dem Interview aber monatelang im Zahlenraum bis 20 gerechnet; aber eben auch *nur* im Zahlenraum bis 20.

Zweitens: Die angesprochene Idiotie der deutschen Sprache, welche Kindern beim Lesen und Schreiben zweistelliger Zahlen einen Verstoß gegen genau *die* Richtungsorientierung zumutet, auf die wir sie in unserem Kulturkreis sonst jahrelang (und nicht immer erfolgreich) hin trimmen, ist Schulbüchern zumeist nicht mehr wert als eine Fußnote: „Merke: Man spricht die Einer zuerst!“ Dabei wäre es ein Leichtes, diese für viele Kinder nun einmal beträchtliche Hürde ein wenig nach hinten zu rücken. Wenn Bündelungs- und Positionsprinzip einmal geklärt sind, lassen sich die Tücken der deutschen Sprache wohl eher bewältigen. Warum also geben wir uns nicht anfangs damit zufrieden, dass Kinder, die sich über Bündelungshandlungen ein erstes Verständnis von Zehnern noch erarbeiten müssen und gerade erst lernen, dass auch die Position einer Ziffer Bedeutungsgehalt hat, etwa 34 sprachlich als „drei Zehner, vier Einer“, dann „dreißig und vier“ festhalten? Das wäre ja auch für die Kinder förderlich, die auf prozeduraler Ebene bereits wissen, dass 34 üblicherweise „vierunddreißig“ heißt!

Drittens und in diesem begrenzten Rahmen letztens: Es besteht in unserer Community meiner Wahrnehmung nach Einigkeit darüber, dass „das von Dienes in den 60-er Jahren propagierte didaktische Prinzip [...] der Variation der Veranschaulichungsmittel […] im Lichte neuerer Erkenntnisse relativiert zu betrachten“ ist (Krauthausen & Scherer 2007, S. 261). Aus guten Gründen: Jedes Veranschaulichungsmittel ist zuallererst *Lernstoff*, muss in seiner Struktur verstanden werden, um dann allenfalls zum *Mittel* für eine Vertiefung und Erweiterung von Verstehen und Können zu werden. Dennoch folgen in gängigen Schulbüchern bei der Erarbeitung des Hunderterraums in raschem Wechsel Veranschaulichungsmittel von gänzlich unterschiedlicher Struktur: Zehnerbündel und Einer werden auf der nächsten Doppelseite abgelöst von Hunderterfeld und Hundertertafel, die wiederum Platz machen für Hunderterreihe und Zahlenstrahl. So soll dann ein Kind etwa auf einer Doppelseite links oben ein Teilquadrat des Hunderter*feldes* als einen Einer, je zehn davon als einen Zehner denken; rechts daneben dagegen, auf der Hunderter*tafel,* ein solches Teilquadrat als 34, ein anderes als 70 usw.. Dazu Lorenz (2000, S. 21): „Materialvielfalt ist eher ein Ausdruck von Hilflosigkeit, bestenfalls einer theoretischen Hoffnung.“

Um nicht weiter vergebens hoffen zu müssen, plädiere ich dafür, Materialien für das Dezimalsystem nur auf Basis einer sorgfältigen stoffdidaktischen Analyse einzuführen. Die leitende Überlegung müsste sein: Was könnten Kinder, sofern sie die Struktur des Materials verstanden haben, damit über das Zehnersystem lernen, was sie mit anderem Material nicht mindestens ebenso gut lernen können? So manches Material – etwa die Hundertertafel – würde dann zwar nicht aus den Schulbüchern verbannt werden müssen, aber zu einem wesentlich späteren Zeitpunkt (und mit klarer definierter didaktischer Zielsetzung) als bisher zum Einsatz kommen...

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht*. Frankfurt/Main: Peter Lang.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg – Berlin: Spektrum, 3. Auflage.

Lorenz, J.-H. (2000). Aus Fehlern wird man... Irrtümer in der Mathematikdidaktik des 20. Jahrhunderts. In: *Grundschule*, H. 1., S. 19-22.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In: Lester, F. K. Jr. (Ed.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 1, Charlotte, NC: NCTM, S. 557-628.

Hedwig GASTEIGER, München

Mathematische Lerngelegenheiten bei Würfelspielen – Eine Videoanalyse im Rahmen der Interventionsstudie MaBiiS

Im Rahmen der MaBiiS-Studie (Elementare mathematische Bildung in Spielsituationen) wurde der Einfluss herkömmlicher Würfelspiele auf die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindergartenkindern untersucht (Gasteiger 2013). Welche mathematischen Lerngelegenheiten sich im Detail für Kinder im Spiel ergeben und welche Funktion erwachsene Spielleiter dabei einnehmen, zeigen Ergebnisse einer explorativen Videoanalyse der Spielsituationen, die hier berichtet werden.

Frühe mathematische Bildung durch Würfelspiele

Die Interventionsstudie ist einzuordnen in den Ansatz früher mathematischer Bildung in natürlichen Lernsituationen (Gasteiger 2010, 2014):

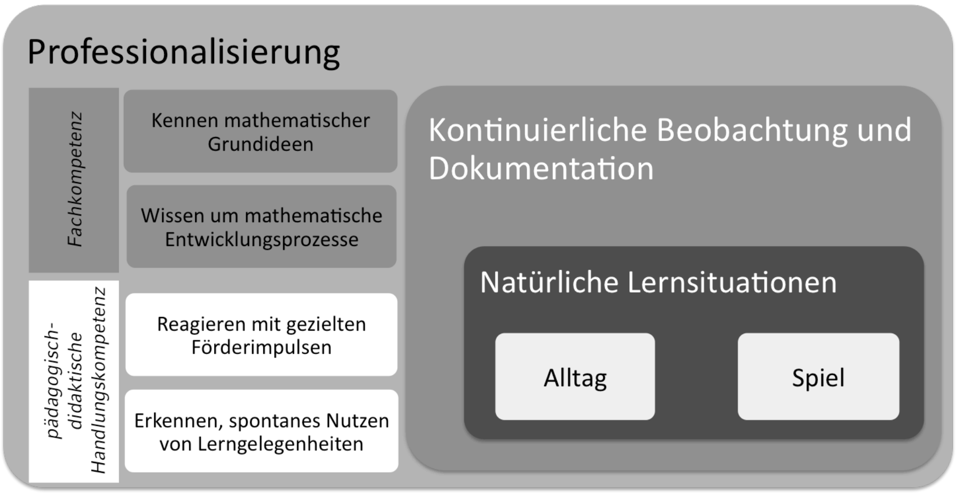


Abb. 1 Frühe mathematische Bildung in natürlichen Lernsituationen (Gasteiger 2010, 2014)

Für Kinder ergeben sich bereits in frühen Lebensjahren im Alltag und im Spiel zahlreiche natürliche (im Gegensatz zu eher instruktiven) Lernsituationen mit enormem Potenzial für mathematisches Lernen. Damit dieses Potenzial wirksam entfaltet werden kann, benötigen Erziehende Fach- und pädagogisch-didaktische Handlungskompetenz. Diese zeigen sich einerseits in der Kenntnis zentraler mathematischer Grundideen – nur auf dieser Grundlage können die Lerngelegenheiten auch als mathematisch erkannt und bewusst mit anregenden Impulsen angereichert werden. Andererseits benötigen die Erziehenden einen guten Einblick in die Prozesse mathematischer Entwicklung, um individuelle Lernstände der Kinder einschätzen und passgenaue, gezielte Förderimpulse geben zu können. Kontinuierliche Beobachtung und Dokumentation der individuellen Entwicklungsprozesse

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 399–402). Münster: WTM-Verlag

liefern eine Basis dafür, dass Kinder bei der Nutzung natürlicher Lerngelegenheiten möglichst optimal unterstützt werden können (Gasteiger 2010).

Herkömmliche Würfelspiele sind – im Gegensatz zu Lernspielen zum Zweck gezielter Förderung – als natürliche Lerngelegenheiten anzusehen. Sie sind meist intrinsisch motiviert, kommen durch freie Wahl zustande und messen in der Regel dem Spielprozess mehr Bedeutung zu als dem Ergebnis (Einsiedler 1994). Zahlreiche Studien weisen nach, dass geeignete Würfelspiele zur Förderung mathematischer Kompetenzen beitragen können (z.B. Ramani & Siegler 2008, Gasteiger 2013). Um diese Kompetenzzuwächse einordnen zu können, sind Informationen hilfreich, welche mathematischen Lerngelegenheiten sich während des Spiels wirklich ergeben.

Zur Rolle des erwachsenen Mitspielers

Inwieweit das Potenzial des Spiels für mathematisches Lernen wirklich ausgeschöpft wird, hängt jedoch unter anderem von den erwachsenen Mitspielern bzw. Mitspielern mit einem Wissensvorsprung ab. Verbale, der individuellen Leistungsfähigkeit des Kindes angepasste Impulse der erwachsenen Spielpartner können maßgeblich dazu beitragen, dass Lerngelegenheiten im Spiel von den Kindern produktiv genutzt werden können (Bjorklund et al. 2004, Wood & Middleton 1975). Beim Würfelspiel können in Anlehnung an Bjorklund et al. (2004) und Wood & Middleton (1975) verschiedene Levels der Unterstützung unterschieden werden: *Verbale Impulse ohne konkrete Instruktion*, wie z. B. „Was kannst du denn jetzt machen?“ lenken sehr wenig. *Gezielte Impulse mit Strategievorschlag* („Kannst du jemanden rauswerfen?“) geben bereits einen Hinweis auf mögliche Aktionen. *Interaktionen mit modellierendem Charakter* zeigen dem Kind beispielhaft mögliche Aktionen auf, die es umsetzen kann (z. B. „Du müsstest hier hin: 1, 2, 3“). Wird eine *Antwort konkret vorgegeben* („Ah, jetzt hast du sechs gewürfelt“), überlässt man dem Kind keine Freiheit zur eigenen Handlung oder zum eigenen Denken. Das Lernpotenzial wird durch Äußerungen dieser Art stark eingeschränkt. Die Interaktionen während des Spiels genauer zu fassen, ist eine gute Grundlage für die Professionalisierung der Erziehenden im Sinne des oben geschilderten Ansatzes.

Videoanalyse zu mathematischen Lerngelegenheiten bei Würfelspielen

Im Zuge der Interventionsstudie zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten durch den Einsatz herkömmlicher Würfelspiele (Experimentalgruppe N=48, Kontrollgruppe N=47; weitere Informationen in Gasteiger 2013) spielte jedes Kind der Experimentalgruppe sieben mal je 30 Minuten mit 1-2 Kindern und einer erwachsenen Spielleiterin ‚Fang den Hut‘ (Ravensburger), eine Variante von ‚Mensch-ärgere-dich-nicht‘ (Schmidt-Spiele) und

‚Schätze sammeln'(ein Würfelspiel, bei dem Steinchen vorgegebener Anzahl gesammelt werden; Zahlenzauberei, Oldenbourg Schulbuchverlag).

Eine explorative Videoanalyse von Spieleinheiten mit diesen Würfelspielen widmete sich folgenden Fragen:

- Welche mathematischen Lerngelegenheiten ergeben sich konkret während des Spiels und wie hoch ist deren Zeitanteil?
- Wie lassen sich die Aktivitäten der Spielleiterinnen charakterisieren?

Dazu wurden 9 Spieleinheiten videographiert. Die Zeitdauer aller Aktivitäten und Äußerungen wurden getrennt nach Spielleiterin und Kinder codiert.

Ergebnisse

Abb. 2 zeigt die Nutzung der aktiven Zeit aller Kinder über die 9 Einheiten.

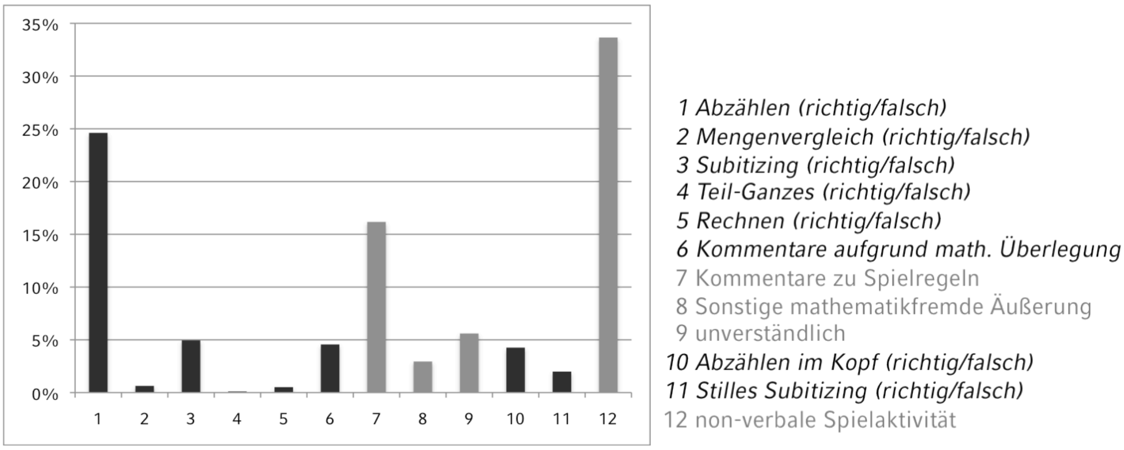


Abb. 2 Aktivitäten bzw. Äußerungen der Kinder (verbal: 1-9, nonverbal: 10-12)

34% der Zeit verbringen Kinder mit non-verbalen Spielaktivitäten, wie z.B. Würfel weitergeben, Spiel herrichten, würfeln (12). Mit 42% wird ein beträchtlicher Anteil der Spielzeit mathematisch genutzt (Kategorien 1-6, 10-11). Ein Viertel der aktiven Spielzeit zählen die Kinder ab, 7% der Zeit verwenden sie, um Würfelbilder oder Mengen auf einen Blick zu erkennen. Sie benennen die Mengen direkt (3) oder ziehen den Spielstein sofort passend weiter, ohne das Würfelergebnis zu nennen (11). In knapp 5% der Zeit kommentieren die Kinder eigenes oder fremdes Spielverhalten aufgrund mathematischer Überlegungen. Äußerungen dieser Art sind beispielsweise: „Ich sehe etwas! Dass du jemanden fangen kannst!". Abzählen, verbales Zählen und Subitizing waren also die zentralen mathematischen Lerngelegenheiten, die sich in den Spielsituationen ergaben, wohingegen kaum Äußerungen zum Vergleichen oder Rechnen beobachtet werden konnten.

Die Spielleiterinnen benötigen 35% ihrer aktiven Zeit für nicht-mathematische Erklärungen zum Spiel oder zum Spielverlauf. Sie agieren –

ebenso wie die Kinder – in 42% ihrer aktiven Zeit mathematisch. Verbale Impulse ohne konkrete Instruktion oder mit Strategievorschlag nehmen 13% dieser Zeit ein und Interaktionen mit modellierendem Charakter 12%. Dazu gehört vor allem das Ausüben einer Vorbildrolle, indem laut mitgezählt wird, die eigene Würfelanzahl benannt wird oder eigene strategische Überlegungen verbalisiert werden. Mathematische Erklärungen oder Korrekturen machen 11% und Bestätigungen mathematischer Äußerungen der Kinder 6% der aktiven Zeit aus.

Fazit

Die Analyse der aktiven Zeit der Kinder während der Würfelspiele zeigt, dass durch das Spielen für das Mathematiklernen zentrale Prädiktoren (Dornheim 2008), wie Zählen, Abzählen oder Simultanerfassung geschult werden. Mit 42% ist der Anteil an aktiver Zeit, die mathematisch genutzt wird sowohl bei den Kindern als auch bei den Spielleiterinnen hoch. Dies spricht dafür, dass herkömmliche Würfelspiele – zumindest, wenn die Erziehenden bewusst mit großer, fachlich motivierter Aufmerksamkeit für das eigene Spiel und das Spiel der Kinder agieren – eine natürliche Lerngelegenheit mit hohem mathematischen Potenzial darstellen.

Literatur

Bjorklund, D., Hubertz, M. & Reubens, A. (2004). Young children's arithmetic strategies in social context. *Intern. Journal of Behavioral Development,* 28(4), 347–357.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten.* Berlin: Logos.

Einsiedler, W. (1994). *Das Spiel der Kinder. Zur Pädagogik und Psychologie des Kinderspiels* (2. Aufl.). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes.* Münster: Waxmann.

Gasteiger, H. (2013). Förderung elementarer mathematischer Kompetenzen durch Würfelspiele - Ergebnisse einer Interventionsstudie. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 336-339). Münster: WTM - Verlag.

Gasteiger, H. (2014). Professionalization of Early Childhood Educators with a Focus on Natural Learning Situations and Individual Development of Mathematical Competencies. In U. Kortenkamp et al. (Eds.). *Early Mathematics Learning.* (pp. 275-290). New York: Springer.

Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79(2), 375-394.

Wood, D. & Middleton, D. (1975). A study of assisted problem-solving. *British Journal of Psychology*, 66(2), 181–191.

Thomas GAWLICK, Hannover

Über Aufgaben-, Prozess- und Problemlösertypen bei K10

Probleme sind Aufgaben, in denen eine Barriere auftritt - das beschreiben wir theoretisch (Gawlick 2013) und empirisch (Gawlick & Begerow in diesem Band) durch Abgrenzung von *Routineaufgaben*: Bei letzteren verfügt der Bearbeiter in der ES (epistemische Struktur sensu Dörner) über kognitive Schemata, die die Heurismen der HS (die heuristische Struktur) zur Konstruktion eines Lösungsweges nutzen. Dem entsprechen durch Lösungsgraphen operationalisierte Bearbeitungsphasen (Gawlick 2013):

(AZI) Ausgangs- und Zielzustand der Aufgabe werden identifiziert.

(TOI) Mögliche Zwischenzustände und Operatoren werden identifiziert.

(PLE) Es wird ein Handlungsplan für die Kombination der Operatoren entworfen.

(DPL) Der Handlungsplan wird ausgeführt.

(KMD) Die Ausführung wird kontrolliert und der Handlungsplan ggf. modifiziert.

Bei diesen Bearbeitungsphasen sprechen wir von *Assimilation* (sensu Piaget). Ist eine Anpassung der Schemata oder der Aufgabe (!) nötig, handelt es sich um *Akkommodation* – erkennbar am Umbau des Lösungsgraphen.

Kann nicht assimiliert oder routinemäßig akkommodiert werden, tritt ein Problem auf - wir definieren also: Eine *Problemaufgabe* (für einen Löser) ist eine Aufgabe, bei deren Bearbeitung problemhafte Akkommodation oder Akquisition (Erwerb neuer Schemata) auftreten. Die Phasen dazu:

(POF) Fragen aus Polyas Tabelle zum „Ausdenken eines Plans

(SZA) Situations- und Zielanalyse (nach Duncker (1935))

(OPS) Operatorsynthese

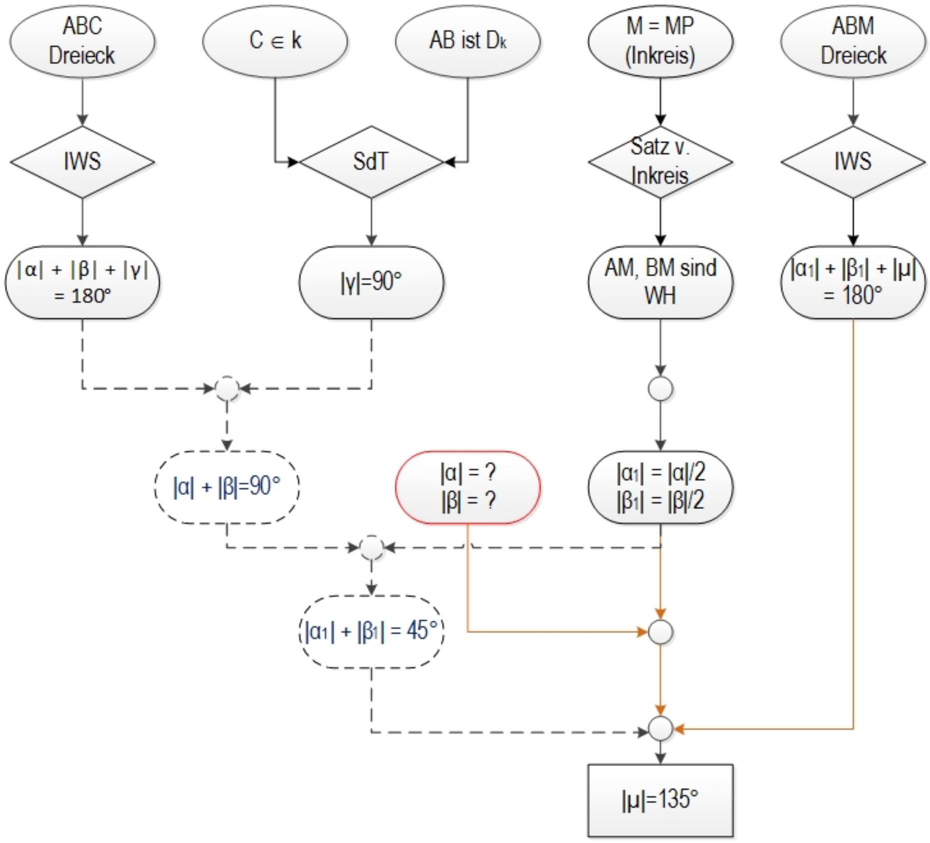
Die TIMSS-Aufgabe K10 ist ein *potentielles Interpolationsproblem*, d.h. nur in der Phase PLE werden Barrieren erwartet. Denn der Ausgangszustand ist explizit gegeben, der Zielzustand kann durch Messen bestimmt werden, die nötigen Operatoren wie SdT (Satz des Thales) und IWS (Innenwinkelsumme) sind bekannt. Warum aber dann die Barriere?

Tatsächlich zeigt sich, dass bei einem erheblichen Anteil der Probanden mangels be- oder erkannter Operatoren ein *Synthese*problem vorliegt. Dies analysieren wir hier nicht weiter – sondern die Frage, wo bei K10 die *Interpolations*barriere liegt: in einem einzelnen Schritt oder in der Art, wie Schritte zu verknüpfen sind? Wir wollen zeigen, dass ersteres der Fall ist. Dazu gilt es theoretisch und empirisch zu beschreiben, welche Heurismen routinemäßig verfügbar sind. Im Projekt HeuRekAP (Brockmann-Behnsen in diesem Band) wurden verschiedene Polya-Fragen trainiert. Die entsprechenden Heurismen lassen sich so beschreiben: GA (Gleiche Aufgabe), VA

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 403–406). Münster: WTM-Verlag

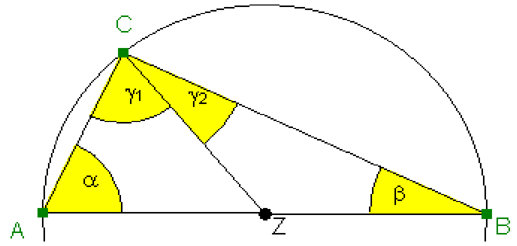
(Vorwärtsarbeiten), RA (Rückwärtsarbeiten), HA (Hilfsaufgabe), und als Meta-Programm TOTE (Test-Operation-Test-Exit, vgl. Dörner 1976). Dabei ist folgende Kombination denkbar, wenn GA keinen Erfolg bringt: TOTE ruft solange VA auf, bis alle erreichbaren Zwischenziele gefunden sind (wobei beim Test sinnvoller Weise geschaut wird, ob sich die Folgerungsketten zielführend entwickeln.) Falls das Ziel dabei nicht erreicht wird, wird der Heurismus gewechselt: Per RA wird versucht, die Lücke zu schließen. Misslingt auch das, erfolgt eine weitere Umorientierung: Es wird mit HA nach einer Hilfsaufgabe geschaut. Dieser letzte Schritt markiert auch den Beginn der problemhaften Akkommodation: „"Problemlösendes Denken erfolgt, um Lücken in einem Handlungsplan zu füllen, der nicht routinemäßig eingesetzt werden kann“ (Funke 2003, 25) – das wird an dieser Stelle erstmals erforderlich sein, während VA und RA noch routiniert ablaufen.

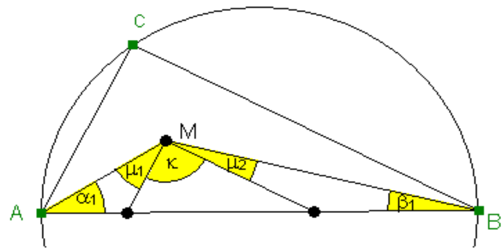
Bei K10 kann man mit VA die 4 „Säulen“ des Beweises aufbauen (Abb. s.u., schwarze Linien). Beim RA entsteht der Wunsch, das gesuchte μ aus α und β zu bestimmen (orangene Linien) – allerdings sind diese ja variabel, so dass dieser Plan nicht ausführbar ist – wir nennen dies die *α-β-Barriere*.



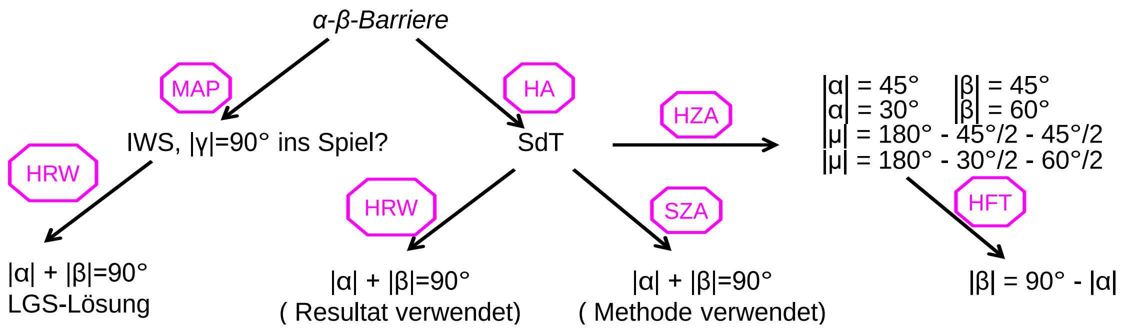
An dieser Stelle folgt in den untersuchten Prozessen häufig eine SZA, bei der die Lücke allerdings häufig nicht geschlossen wird. Möglich wäre dies über Polyas Frage „Hast Du die ganze Bedingung benutzt?“ (MAP), um |α|

+ |β| + |γ| = 180° und |γ|=90° ins Spiel zu bringen. Nötig ist allerdings noch der Heurismus Repräsentationswechsel (HRW), um darin keine Rechenausdrücke, sondern ein LGS zu erkennen. Routinemäßig führt das zu |α| + |β|=90° und weiter zur Zielerreichung (gestrichelte Linien). Diese routinemäßige Akkommodation kommt allerdings bei den untersuchten Neuntklässlern kaum vor – das macht diesen Schritt zum *Barriereschritt*! Stattdessen wechseln sie in POF und nutzen Heurismen zur Planentwicklung – z.B. wird HA aufgerufen: „Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen? [a)] Kannst Du ihr Resultat verwenden? [b)] Kannst Du ihre Methode verwenden? [c)] Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?“ (Polya 1949, 1) Wird dabei an Thales gedacht, führt a) wieder auf HRW (von |γ|=90° zu |α| + |β|=90°), doch bei b) endet die Routine: Hier muss der Beweisgang erinnert und akkommodiert werden – das erfordert problemlösendes Denken: So könnte z.B. versucht werden, die Hilfslinie CZ beizubehalten oder durch MZ zu ersetzen – doch beides führt nicht weiter. Eine SZA erhellt: die Funktion von CZ ist, den gesuchten Winkel in zwei Teilwinkel zu zerlegen. Bei K10 könnte man das gleiche so versuchen: $|\mu| = |\mu_1|+|\mu_2|+|\kappa|$, wobei μ_1,μ_2 zu α_1,β_1 kongruente Teilwinkel von μ sind und κ der Restwinkel. Dies führt auf |μ| = 90°+|κ|/2 und die Aufgabe, |κ| zu bestimmen, was auf verschiedene Weise möglich ist. Alternativ kann man auch zu einer „zugänglicheren Aufgabe“ übergehen (HZA), indem man |α| als gegeben annimmt und daraus |β|=90°- |α| ableitet (HFT).





Die Entstehung der o.a. Lösungswege im Wechselspiel von ES und HS veranschaulicht das „heuristische Galtonbrett“. Es zeigt damit zugleich Prozess- und mögliche Problemlösertypen auf, je nachdem welche Heurismenfolge gewohnheitsmäßig gebraucht bzw. was vernachlässigt wird. Das Prozessmodell ermöglicht dann eine differentielle Analyse, wie Problemlö-



ser sich auf diesem Brett bewegen und was dabei Erfolg verspricht.

Die Lösungsvariante, die Funktion von CZ zu übertragen, ist anscheinend in der Literatur noch nicht bekannt - wir verdanken die Idee einer Probandin, die sie aber leider nicht ausführt. Dies verdeutlicht, dass es nicht bloß auf die „richtigen" Heurismen ankommt, sondern auf die Art der Anwendung. Was zeichnet die erfolgreicheren Problemlöser dabei aus? Die bisher untersuchten K10-Prozesse lassen zweierlei vermuten:

a) Erfolgreiche wechseln Problemlöser beim Akkommodieren die Blickrichtung: Vom *schon Erreichten* (SZA) zum *noch Fehlenden* (POF).

b) Sie konkretisieren wenn nötig die Polya-Fragen (z.B. von „*Wie* kann ich das rausbekommen?" zu „*Mit welcher Formel* kann ich..?)"

Für Aussagen, welche Strategien die erfolgreicheren sind, ist es noch zu früh. Auch ist noch unklar, ob es sich mehr auszahlt, die Barriere zu umgehen als ihre Überwindung zu versuchen. Schon jetzt ist aber ein neuer Aspekt des Problemlösens deutlich: Viele Prozesse enthalten scheinbar unproduktive Abschnitte, was bisher als erfolgshinderlich galt („wild goose chase", vgl. Schoenfeld 1985) – wir beobachteten aber auch Möglichkeiten, sie als Inkubation produktiv für eine Illumination zu machen:

– *Distraktion* (sachfremde Abschweifung)
– *Rumination* (Hin- und Herwenden eines unbefriedigenden Ansatzes)

Evtl. liegt hier ein noch nicht beschriebener Typus erfolgreichen Problemlösens vor. Probandenäußerungen wie „hab ich immer erstmal die ganzen Formeln hingeschrieben damit ich schon mal einen ersten Überblick bekomme und hab mir dann überlegt wie ich weiter arbeiten kann" im stimulated recall deuten auf eine HS, die das VA zunächst in die Breite und dann erst in die Tiefe verfolgt – dies und das (u. U. nachteilige) Aufschieben des Planens können dazu beitragen, ein „Verzetteln" zu vermeiden.

Literatur

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, Stattgart: Kohlhammer.

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin: Springer.

Funke, J. (2003). *Problemlösendes Denken.* Stuttgart: Kohlhammer.

Gawlick, Th. (2013): Problem - das Gegenteil von Routineaufgabe? Zur Konzeption von Problemlösen. *Beiträge zum Mathematikunterricht.*

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press.

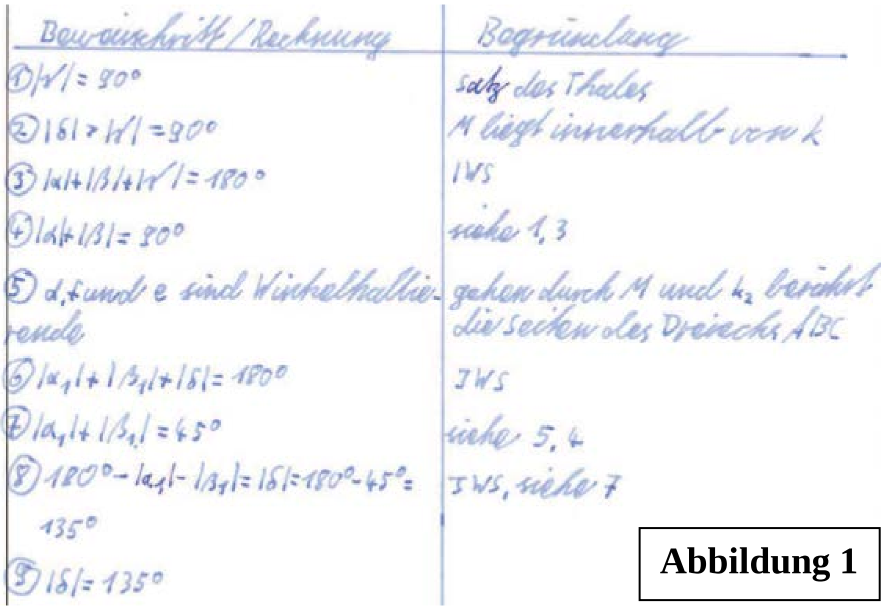
Thomas GAWLICK, Susanne BEGEROW, Hannover

Analyse der Graphen von Lösungen der TIMSS-Aufgabe K10

Mathematisches Problemlösen ist infolge des mittelmäßigen Abschneidens deut-scher Schülerinnen und Schüler bei Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA als Prozesskompetenz in den hiesigen Curricula fest veran-kert.Problemlösen bedeutet, einen Weg im Zustandsraum der Aufgabe vom Anfangs- zum Zielzustand zu finden. Bei der Analyse von Schülerlösungen kommt es daher nicht nur auf die Ergebnisse an: Reiss et al. (2000) zeigten, dass bei der TIMSS-Aufgabe K10 das nötige Faktenwissen zwar vorhanden war, es aber nicht zu Argumentationssträngen verknüpft werden konnte. Auf Grundlage von Polya (1919) und König (1992) haben wir daher den *Lösungsgraphen* entwickelt, mit dem Problembearbeitungen diesbezüglich ausgewertet werden können. Seine Knoten sind die Zwischenziele (Ovale) und Hilfsmittel (Rauten) des Lösungsweges. Die Kanten geben an, inwieweit die Elemente von den SuS verknüpft wurden.

Per Qualitativer Inhaltsanalyse wurde anschließend ein Kategoriensystem entwickelt und ein Kodiermanual erstellt, das als Grundlage für die Kodierung der 120 Schülerbearbeitungen (vgl. Sektionstext) diente. Ein entscheidender Vorteil dieses Systems ist, dass nun damit auch Irr- und Umwege sowie Auslassungen der SuS dargestellt werden können.

Die Auswertung ergab, dass 90% der untersuchten SuS denselben Weg wählten. Dieser *Standard-Lösungsweg* kann anhand einer Schülerlösung in Abb. 1 nachvollzogen werden. Diese Lösungsgraphen konnten daher normiert werden, indem die Elemente einer der Kategorien (Richtig, Fehlend, Falsch, Zusätzlich und Zusammenhanglos zum Standardweg) zugeordnet wurden, s. Ausschnitt in. Abb. 2. Bei zufällig ausgewählten 20% betrug die Interraterreliabilität 89,4%. Ab-



Bauanschritt/Rechnung	Begründung
1 $\lvert\gamma\rvert = 90°$	satz des Thales
2 $\lvert\delta\rvert > \lvert\gamma\rvert = 90°$	M liegt innerhalb von k
3 $\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert + \lvert\gamma\rvert = 180°$	IWS
4 $\lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert = 90°$	siehe 1, 3
5 d, f und e sind Winkelhalbierende	gehen durch M und k_2 berührt die Seiten des Dreiecks ABC
6 $\lvert\alpha_1\rvert + \lvert\beta_1\rvert + \lvert\delta\rvert = 180°$	IWS
7 $\lvert\alpha_1\rvert + \lvert\beta_1\rvert = 45°$	siehe 5, 4
8 $180° - \lvert\alpha_1\rvert - \lvert\beta_1\rvert = \lvert\delta\rvert = 180° - 45° = 135°$	IWS, siehe 7
9 $\lvert\delta\rvert = 135°$	

Abbildung 1

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 407–410). Münster: WTM-Verlag

schließend wurden die erstellten Graphen mit der Anzahl der richtigen Elemente bewertet. Die bewerteten Graphen werden nachfolgend analysiert.

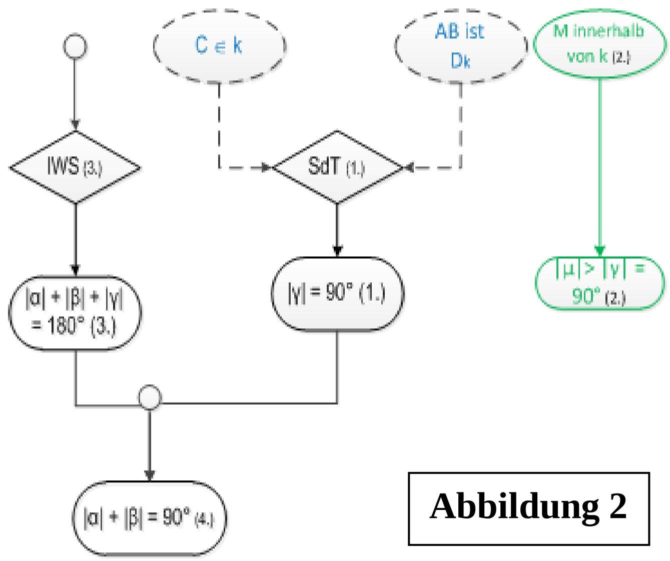


Abbildung 2

Die durchschnittlichen Punktzahlen, die in den Versuchsgruppen C und D bzw. den Kontrollgruppen A und B erzielt wurden, können Abb. 3 entnommen werden. In dieser Grafik sind die Knoten und Kanten getrennt voneinander dargestellt, um nicht nur eine Aussage über die Punktzahl treffen zu können, sondern auch über die Fähigkeit, Knoten geeignet zu verknüpfen. Zunächst einmal fällt auf, dass der prozentual erreichte Wert der Schülerinnen und Schüler der Studie im Vergleich zur maximalen Punktzahl relativ gering ist. Es wird aber deutlich, dass die Klasse D mit dem expliziten Training (ET) im Mittel eine höhere Punktzahl erzielen konnte, als die Vergleichsklassen. Die Klasse C mit implizitem Training (IT) liegt hingegen nur knapp über den Vergleichsklassen. Da aufgrund vergleichbarer Vornoten davon ausgegangen werden kann, dass der Leistungsstand in den vier Klassen vor Trainingsbeginn auf einem ähnlichen Niveau war, kann insbesondere in der ET-Klasse von einem Trainingserfolg gesprochen werden. In beiden Treatmentklassen ist der relative Anteil der angegebenen Verknüpfungen deutlich größer. Bzgl. der Fähigkeit Begründungen angeben und argumentativ verknüpfen zu können, schneidet also auch die IT-besser ab.

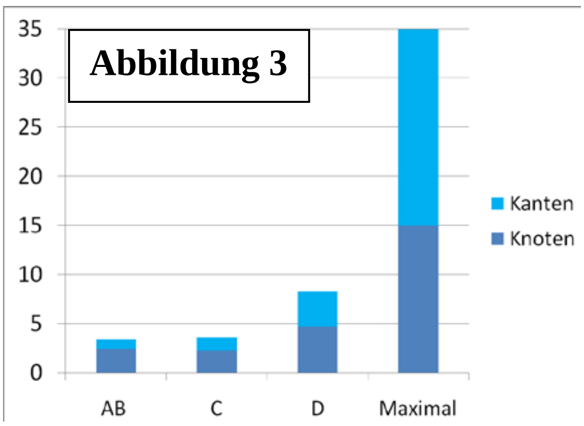
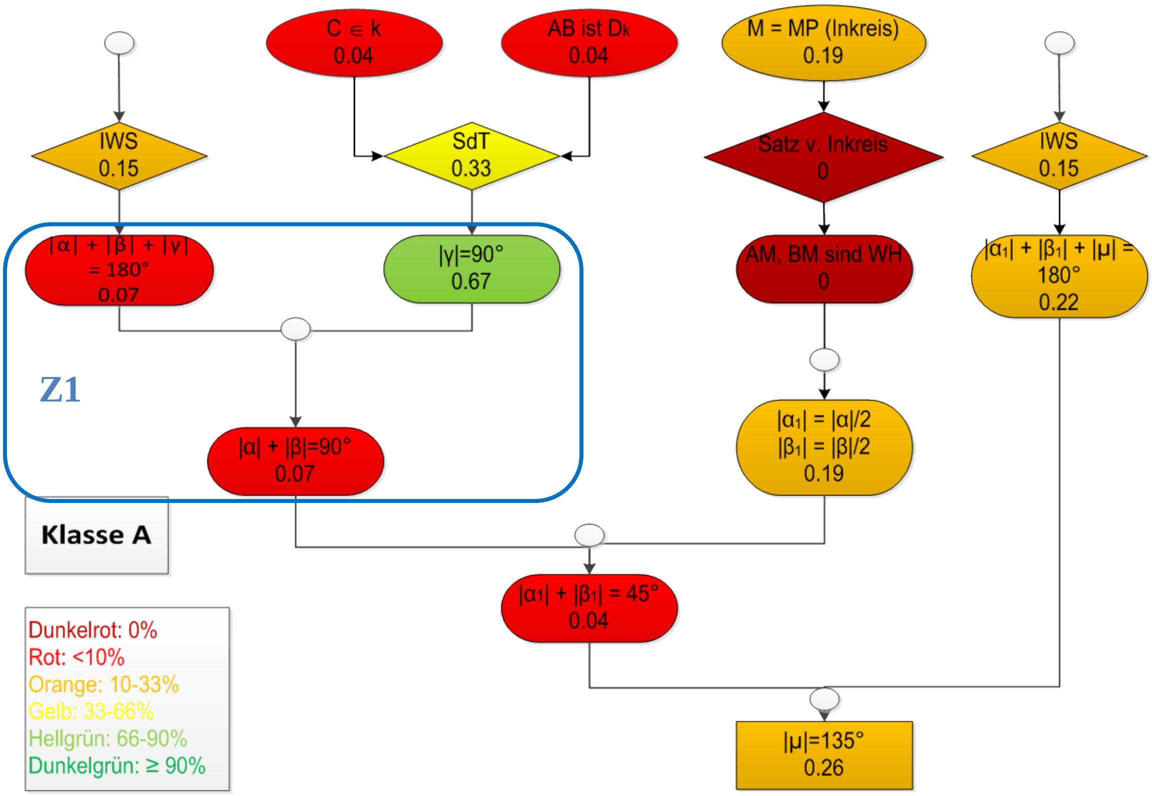


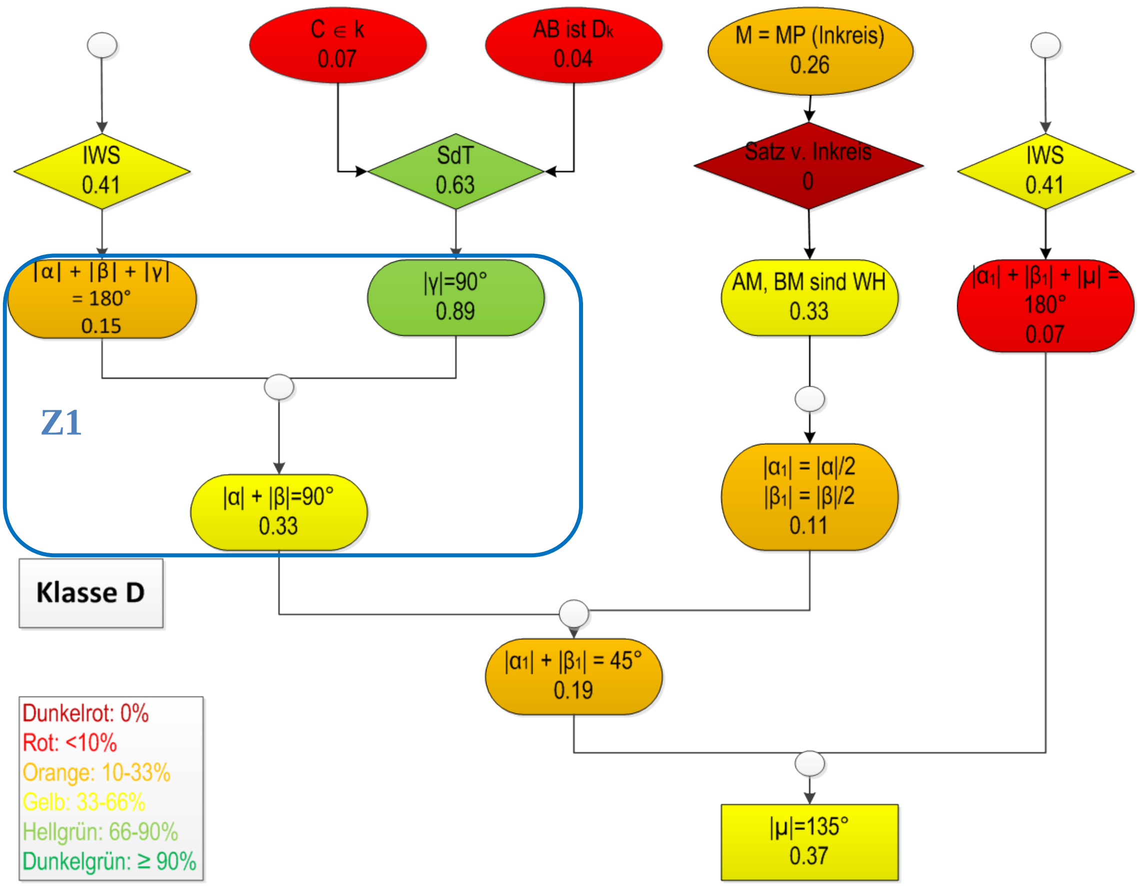
Abbildung 3

Klasse	Notenschnitt Klasse 7	Punkte K10
A	2,61	4,06
B	2,56	2,31
C	2,90	3,12
D	2,44	7,20
Durchschnitt	2,63	4,18

Ein Vergleich der Profilklassen A und D zeigt, dass in der ET-Klasse fast alle Elemente des Lösungswegs mit höherer Wahrscheinlichkeit genannt werden als in der Kontrollgruppe.



Insbesondere bei den Hilfsmitteln und den *lokalen Zusammenhängen* (Argumente verküpfende Schritte: 4,7,9 in Abb. 1) ist dies deutlich:



Wir haben bei diesen Schritten untersucht, welcher Anteil der Probanden die Voraussetzungen erfüllt (*Erreichensquote* q_E) und welcher Anteil dieser SuS daraufhin auch den Schritt erfolgreich durchführt ($q_Ü$). Empirisch liegt die Barriere liegt offenbar in Z1 (Schritt 4 in Abb. 1), wo viele Schüler nicht weiter kommen, obwohl beide Voraussetzungen genannt sind. Bei den anderen lokalen Zusammenhängen ist dies nicht der Fall. Auch theoretisch wird hier eine Barriere erwartet: Da es nach der Liste in Polya (1949, S.1f) keinen Heurismus gibt, mit dem das Zwischenziel $|\alpha| + |\beta|=90°$ erreicht werden könnte, wird sie auch als *α-β-Barriere* bezeichnet. Abb. 4 zeigt *zwei* Trainingserfolge: In der Versuchsklasse konnten mehr Schüler die Barriere erreichen,also *vor* der Barriere mehr Teilziele und Operatoren identifizieren. Zudem überwand ein prozentual größerer Anteil dieser SuS im Anschluss auch tatsächlich die Barriere, konnte also die Voraussetzungen beim Barriereschritt besser verknüpfen.

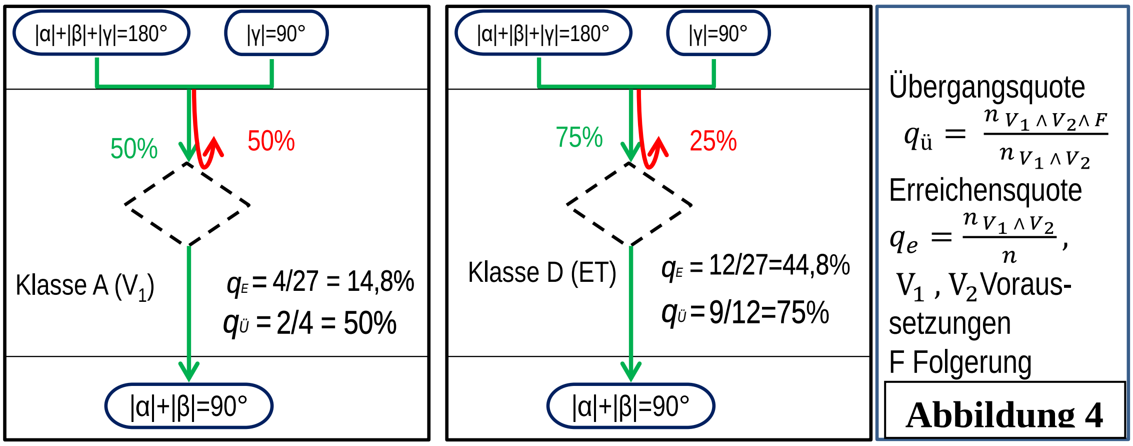


Abbildung 4

Bei den anderen lokalen Zusammenhängen, die bei der K10-Aufgabe hergestellt werden müssen, lag der Wert derjenigen, die sowohl beide Voraussetzung erreicht haben, aber dennoch scheiterten, deutlich niedriger (<17%).

Literatur

Kelle, U., Kluge, S. (1999). *Vom Einzelfall zum Typus.* Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. Opladen: Leske + Budrich.

König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. In: *Der Mathematikunterricht, 38 (3).* S. 24-38.

Pólya, G. (1919). Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. *Schweizerische pädagogische Zeitschrift*, 29(2), 53–63.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.

Reiss, K., Thomas, J. (2000): Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. In: *mathematica didactica, 23 (1*). S. 96-112.

Andrea GELLERT, Essen

Diskursive Aufrechterhaltung mathematisch fokussierter Lehr-Lern-Situationen

Interaktionsprozesse im Unterricht

Interaktionsprozesse, betrachtet als situativ emergierende Prozesse in der Auseinandersetzung von mindestens zwei Beteiligten, unterliegen häufig eingespielten Alltagsroutinen. Insbesondere in der Unterrichtsinteraktion entwickelt sich oft ein musterförmiger Interaktionsverlauf aufgrund sozialer Regelmäßigkeiten im interaktiven Wechselspiel zwischen Schülern und der Lehrperson. Analytische, rekonstruktive Betrachtungen dieser interaktiven Strukturen führten seit den 1970er Jahren zur Identifikation von Interaktionsmustern, dessen Spektrum von eher einfach strukturierten Interaktionsmustern bis hin zu komplexen Rekonstruktionen insbesondere aus interaktionstheoretischer Perspektive reicht. Zu den eher einfach strukturierten Mustern gehört bspw. das ‚Sandwich pattern' (Stubbs 1976). Als ‚sandwich pattern' werden kurze unterrichtliche Interaktionsverläufe bezeichnet, in denen alles, was ein Schüler äußert, eingerahmt wird von Äußerungen der Lehrperson, in der Regel durch Stellen einer Frage und der Kommentierung der gegebenen Antwort. Eine solch einfach strukturierte Regelmäßigkeit würde aus interaktionstheoretischer Sicht im Sinne Voigts (1984) noch nicht als Interaktionsmuster bezeichnet werden. So handelt es sich nach Voigt bei einem Interaktionsmuster um eine sich interaktiv konstituierende Struktur, die sich durch den interaktiven Austausch themenzentriert entwickelt, also nicht vorab festgelegt wird. Sie kann damit nur durch Analysen des Interaktionsgeschehens rekonstruiert werden.

Das prominenteste Beispiel aus interaktionstheoretischer Sicht ist die ‚Handlungsverengung durch Antworterwartung', vor allem bekannt als *Trichtermuster* (Bauersfeld 1978). Initiiert wird das Trichtermuster durch eine mathematische Fragestellung, die auf das Finden einer eindeutigen, nicht weiter zu diskutierenden, von den Schülern erwarteten Lösung ausgerichtet ist. In der sich entwickelnden Interaktion lassen sich fünf weitere Phasen finden. Zunächst erkennt der Schüler die mathematische Operation nicht. Die Lehrperson fragt nach der Operation, jedoch beantwortet der Schüler die Frage falsch oder gar nicht. Im dritten Schritt setzt die Lehrperson ihr Bemühen um eine einsichtsvolle Antwort fort. Da die erwartete Schüler-Antwort weiterhin ausbleibt, verengt die Lehrperson ihre Fragehaltung auf ein bloßes Hersagen der Antwort. Abschließend fällt die erwartete Antwort, entweder durch den Schüler oder durch die Lehrperson (vgl. Bauersfeld 1978).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 411–414). Münster: WTM-Verlag

Kontrastierend zum Trichtermuster spricht Wood (1994) vom ‚Focussing Pattern'.

> „The focusing pattern of interaction [...] is characterized by an exchange in which the teacher's guiding questions act to focus the joint action. Initially, this pattern appears to be similar to the funnel pattern as its intent is to provide opportunities for learning through joint activity. However, the pattern that emerges is quite different as the teacher's intent in questioning is to focus the attention of the student to the critical aspect of a problem – to pose a question which serves to turn the discussion back to the student leaving him/her with the responsibility for resolving the situation" (Wood 1994, 155).

Analog zu interaktionstheoretischen Ansätzen bedingen sich auch für Wood die Schüler und die Lehrperson in der Interaktion wechselseitig. Merkmale und Charakteristika eines solchen *Focussing Pattern* werden nicht rekonstruiert, sondern Wood nimmt eine eher konstruktive Sichtweise auf eine veränderte Unterrichtskultur, in der die Schüler ihre eigenen Überlegungen wie auch die ihrer Mitschüler reflektieren und begründen, ein. Dabei erwarten die Schüler auch anders herum, dass ihre Deutungen, Lösungen und Ideen von der Lehrperson akzeptiert werden (vgl. Wood 1994).

Begründungsbedürftigkeit

Wood macht auf die besondere Rolle eines „critical aspect of a problem" im Interaktionsprozess aufmerksam. Schwarzkopf spricht von einer Begründungsbedürftigkeit, die Argumentationsprozesse auszulösen vermögen: „Der im Unterricht stattfindende *soziale Prozeß*, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, diesen Begründungsbedarf zu befriedigen, wird als Argumentation bezeichnet" (Schwarzkopf 2000, 240, Hervorhebung im Original). Eine Begründungsbedürftigkeit, die sich in der Interaktion sogar zu einer Strittigkeit ausweiten kann, spielt eine wesentliche Rolle nicht nur für Argumentationsprozesse, sondern auch für die Möglichkeiten einer interaktiven Fokussierung auf eben jenes Begründungsbedürftige. So kann von der Initiierung einer fokussierten Lehr-Lern-Interaktion gesprochen werden, wenn im Sinne Schwarzkopfs ein Begründungsbedarf angezeigt wird, wodurch im Folgenden weitere (mathematikspezifische) Begründungsangebote eingefordert und diskutiert werden.

Zielsetzungen der empirischen Studie

Die empirische Studie zum Projekt ‚**Er**probung und Evaluation **fo**kussierender **L**ehr-Lern-Strategien im Mathematikunterricht der **G**rundschule (ErfoLG)' verfolgt vor allem zwei Zielsetzungen: Zum einen soll ein interaktives Setting zu mathematischen Gesprächen mit Kindern initiiert werden, in dem auf begründungsbedürftige Fragen fokussiert und eine Interaktion darüber aufrecht erhalten wird. Zum anderen sollen Merkmale und Charakteristika zum interaktiven Umgang mit Begründungsbedürftigem analytisch herausgearbeitet werden. Während Schwarzkopf die in diesem Prozess hervorgebrachten Begründungsangebote mathematikspezifisch als *Argumente* analysiert, werden in der vorliegenden Studie die durch das Anzeigen eines Begründungsbedarfs entstehenden, z.T. *musterförmig ablaufenden Interaktionsprozesse* vor dem Hintergrund soziologischer, interaktionstheoretischer und epistemologischer Theorien rekonstruiert. Ausgehend von einer Initiierung, in der ein Begründungsbedarf angezeigt wird, folgen Analysen bzgl. der Art und Weise der Fortführung im Sinne einer Aufrechterhaltung der Interaktion über jene Begründungsbedürftigkeit unter folgenden Fragestellungen: Wie wird mit der Erklärungs-notwendigkeit umgegangen? Welche Referenten werden zur Begründung herangezogen? Welcher (epistemologischen) Natur entspricht die Art der Beziehung zwischen der geäußerten Perspektive und den herangezogenen Referenten? In einem letzten Analyseschritt wird die Aufhebung im Hinblick auf den mathematischen Gehalt analysiert (Sachlogik vs. sozialer Interaktionslogik; siehe bspw. Krummheuer & Voigt 1991).

Aufrechterhaltung eines Begründungsbedarfs bis zur Klärung

Ein Analysebeispiel aus dem Projekt ‚ErfoLG' ergibt den Fall, dass ein Begründungsbedarf für eine operative Veränderung am Aufgabenbeispiel „Wer trifft die 50?" (Steinbring 1994; Abb. 1) angezeigt wird: Die Differenz von fünf zwischen den Zielzahlen. Die Begründungsbedürftigkeit wird nicht analog zum Trichtermuster aufgrund des korrekt ermittelten Ergebnisses fallen gelassen, sondern ins Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt. Falk stellt dazu eine Hypothese auf, die auf der Gleichverteilung der Differenz von 1 zwischen den Additionszahlen auf die Anzahl der Kästchen beruht. Während seiner Erklärung fällt ihm aber ins Auge, dass an zweiter Stelle keine Differenz vorhanden ist, sondern die gleichen Zahlen stehen. Ein neuer Begründungsbedarf entsteht. Er verändert seine Sichtweise, indem er die Differenzen der hinteren drei Kästchen aufsummiert und eine Differenz von sechs identifiziert. Auch diese Differenz passt nicht zu der Differenz zwischen den Zielzahlen. Kilian lenkt den Blick auf die Differenz zwischen den Startzahlen und erklärt darüber die Differenz von fünf zwischen den Zielzahlen. Der Begrün-

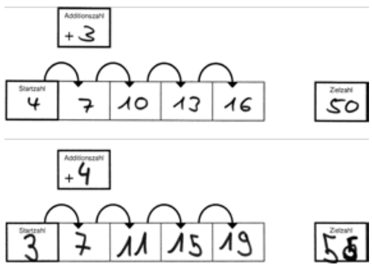


Abbildung 1

dungsbedarf wird aufgelöst und führt zu einem mathematisch-inhaltlich begründeten Konsens (basierend auf der Sachlogik).

Zusammenfassung

Es zeigt sich, dass sich eine Fokussierung auf den mathematischen Inhalt in der Interaktion ergeben kann. Diese Interaktion ist internen Regeln unterworfen, die jederzeit zu einer Auflösung führen können. Eine Fokussierung bedeutet nicht eine zunehmende Verengung auf einen Einzelaspekt, sondern gerade eine erneute Öffnung auf das gesamte Problem, möglicherweise unter verändertem Blickwinkel. Zentral erscheint die Fortführung begründungsbedürftiger Situationen. Im Gegensatz zu trichtermusterförmigen Interaktionsverläufen, die eher einer linearen Ablauflogik mit zunehmender Handlungsverengung folgen, scheinen fokussierende Interaktionsverläufe diese Linearität eher aufzubrechen hin zu einem mehrfachen Durchdenken des mathematisch Begründungsbedürftigen. In einer interaktiven Situation, die ein mehrfaches Durchdenken des mathematischen Problems einfordert, nehmen die Beteiligten im Gegensatz zum Trichtermuster veränderte Rollen ein. Diese genauer auszuarbeiten und begrifflich zu charakterisieren ist eines der weiteren Ziele des Projekts ‚ErfoLG'.

Literatur

Bauersfeld, H. (1978). Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht. Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. In. Bauersfeld, H. (Hrsg.): *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht* (S. 158–170). Hannover: Schroedel.

Krummheuer, G. & Voigt, J. (1991). Interaktionsanalysen von Mathematikunterricht. Ein Überblick über Bielefelder Arbeiten. In. Maier, H. & Voigt, J. (Hrsg.). *Interpretative Unterrichtsforschung* (S. 13–32). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Stein, M. et al. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. In. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313–350.

Steinbring, H. (1995). Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da! Wie Kinder im Arithmetikunterricht strategisch-strukturelle Vorgehensweisen entwickeln. In. Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.). *Mit Kindern rechnen* (S. 225–239). Frankfurt a. M.: AK Grundschule - Der Grundschulverband - e.V.

Stubbs, M. (1976). *Language, Schools and Classrooms.* London: Methuen.

Voigt, J. (1984): *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen.* Weinheim: Beltz.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In. Lerman, S. (ed.). *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom*, S. 149–168. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers.

Eva-Maria GERSTER, Hans-Stefan SILLER, Peter ULLRICH

Mathematik als Herausforderung im Studienbeginn

Mathematisches Wissen und Fertigkeiten verfügbar zu haben, stellt für viele Abiturientinnen und Abiturienten eine Schwierigkeit dar. Hieraus ergibt sich für die Lehrenden an einer Hochschule die Herausforderung, in den Veranstaltungen mathematischen Inhalts mit einer nicht nur großen, sondern vor allen Dingen auch heterogenen Lerngruppe umzugehen.

Vor diesem Hintergrund wurden im Wintersemester 2013/14 vor allem alle Studienanfängerinnen und -anfänger der Universität Koblenz-Landau am Campus Koblenz, welche Mathematikveranstaltungen im ersten Studiensemester besuchten, hinsichtlich ihres Wissens- bzw. Fertigkeitsniveaus diagnostiziert.

Neben den Ergebnissen dieser Untersuchung werden Ansätze vorgestellt, mit den festgestellten Defiziten konstruktiv umzugehen: Rückkoppelung mit den Schulen der Region und Differenzierung der – bereits angebotenen – Vorkurse hinsichtlich der spezifischen Anforderungen im jeweils anschließenden Studium.

1. Beschreibung des Tests

Die Evaluation (schul-)mathematischer Kompetenzen von Studierenden der Universität Koblenz-Landau wurde mittels eines Tests - bestehend aus zwölf Aufgaben - durchgeführt. Die Aufgaben wurden für diesen Test speziell erstellt, orientieren sich jedoch an Schulbuchaufgaben, Übungsaufgaben von Hochschulvorkursen und an Aufgaben eines Schulversuchs zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik vom Bundesinstitut bifie sowie dem österreichischen Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik der Alpen Adria Universität Klagenfurt (vgl. BIFIE, 2013 bzw. AECC, 2009). Um ein möglichst umfassendes Bild über die vorhandene Nachhaltigkeit des mathematischen Wissens der Studierenden zu erhalten, wurden nicht nur Aufgaben aus der Sekundarstufe II bzw. dem Abiturstoff, d. h. Aufgaben aus dem Themenbereich Analysis, Analytischer Geometrie bzw. Linearer Algebra sowie Stochastik in den Text mitaufgenommen, sondern auch Aufgaben aus der Sekundarstufe I. Dies erscheint uns deshalb wichtig, weil Ergebnisse vorliegen, dass der Stoff des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I bereits in der Sekundarstufe II nicht mehr verfügbar ist, ganz zu schweigen vom Zeitpunkt des Studienbeginns.

Um ein möglichst umfassendes Bild über die mathematischen Kenntnisse zu erhalten, wurde dieser Test nicht nur Studienanfängern im Lehramt

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 415–418). Münster: WTM-Verlag

Grundschule, Realschule plus (= die rheinland-pfälzische Version der nicht-gymnasialen Sekundarschule) und Gymnasium, sondern auch jenen der eher informatiorisch geprägten (= Informatik, Computervisualistik) und der eher wirtschaftswissenschaftlich geprägten (= Wirtschaftsinformatik, Informationsmanagement) Studiengänge des Fachbereichs Informatik in der ersten und zweiten Vorlesungswoche (Zeitraum 21.10. – 31.10.2013) des Wintersemesters vorgelegt.

Die Aufgaben waren so gestellt, dass sie mittels einer einfachen, aber psychometrisch begründeten (vgl. Rost, 2004), 0/1-Bepunktung korrigiert werden konnten.

1.4. Quadratische Gleichung(en):

Für welche $u \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung genau eine, zwei oder keine

$$x^2 - 6x + u = 0$$

	u
genau eine Lösung	**= 9**
genau zwei Lösungen	**< 9**
keine Lösung	**> 9**

1.2.2. Ordnen Sie folgende Brüche nach der Größe:

$$\frac{1}{10} < \frac{1}{9} < \frac{3}{20} < \frac{2}{13}$$

2. Beschreibung der Probanden

Die Eingangsdiagnostik wurde von insgesamt 538 Personen durchgeführt. Davon hatten 210 Probanden als Geschlecht „weiblich" und 313 Probanden „männlich" angegeben. (Der vergleichsweise hohe Anteil männlicher Studierender kommt durch die Einbeziehung der informatiknahen Studiengänge zu Stande.) 182 Probanden strebten den Abschluss Bachelor of Education, 45 den Abschluss Master of Education und 300 den Abschluss Bachelor of Science an. Das Alter der aller befragten Studierenden lag im Intervall [17; 40]; das Durchschnittsalter betrug 21 Jahre. Über die Hälfte der Studierenden befand sich zur Zeit des Tests im ersten oder zweiten Fachsemester. 57% der Probanden (mit Ausnahme der Bundesländer Bayern und Baden-Württemberg) hatten einen Leistungskurs in Mathematik belegt. Bis auf drei Studierende haben alle ihr Abitur in Deutschland absolviert, davon 68% in Rheinland-Pfalz, 17% in Nordrhein-Westfalen und 6% Hessen; drei Fünftel in den Jahren 2012 und 2013.

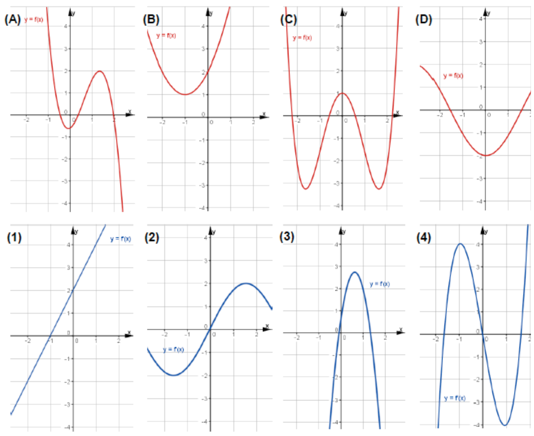
3. Auswertung des Tests

Betrachtet man das Ergebnis der Probanden ergibt sich folgendes Bild: alle 538 Teilnehmer erreichten eine durchschnittliche Punktzahl von 4 Punkten, der Median liegt bei 3 Punkten. Die Hälfte der Probanden erzielte also lediglich maximal 3 Punkte. Insgesamt konnten aber 12 Punkte erreicht werden.

Zu den Aufgaben aus der Mittelstufe wurden durchschnittlich 2 von 7 Punkten erzielt, zu den Aufgaben im Teil der Sekundarstufen II 1 Punkt, von fünf möglichen Punkten. Bei dem Beispiel, in dem vier Funktionsgraphen den Graphen ihrer Ableitungsfunktion zugeordnet werden mussten, konnten etwas mehr als die Hälfte aller Probanden diese richtig lösen. Das Skalarprodukt deuteten 47% korrekt und die Aussagen bzgl. der Lösbarkeit eines allgemeinen Linearen Gleichungssystems wurden von 10% richtig angekreuzt. Hingegen erreichten die 538 Probanden bei den Aufgaben zur Stochastik, bei denen das Wissen zur Bedingten Wahrscheinlichkeit sowie zur Kombinatorik getestet wurde, von 2 Punkten durchschnittlich gar keinen.

2.1. Graphen von Funktionen und ihre Ableitungen

Ordnen Sie jedem Funktionsgraphen (A-D) den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion (1-
zu.



(A) → (3) (B) → (1) (C) → (4) (D)→ (2)

4.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bei der Überprüfung von Fahrgästen in den Bussen der KEVAG wurde ermittelt, dass etwa 2
Schwarzfahrer unterwegs sind, davon sind 75% männlich. Allerdings wurden insgesamt auch 55
männliche Fahrgäste gezählt. Ein Fahrgast wird überprüft.

a) Füllen Sie die Vierfeldertafel (Abb. 1) aus.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine überprüfte Frau Schwarzfahrerin ist?

a)

	S	$\bar{S}$	
m	1,5%	53,5%	55%
w	0,5%	44,5%	45%
	2%	98%	100 %

Abb. 1: Vierfeldertafel

S – Schwarzfahrer; $\bar{S}$ – kein Schwarzfahrer; m – männlich; w – weiblich

b)

$$P_w(S) = \frac{P(w \cap S)}{P(w)} = \frac{\frac{0,5}{100}}{\frac{45}{100}} = \frac{0,5}{45} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{45} = \mathbf{\frac{1}{90}}$$

In den Aufgaben zum Mittelstufenwissen ist auffällig, dass einfache Sachaufgaben zum (antiproportionalen) Dreisatz und zur Flächenberechnung eines Kreises am ehesten beherrscht wurden. Auch der Vergleich von Dezimalzahlen wurde mit 49% im Vergleich zu anderen Aufgaben von relativ vielen Teilnehmern fehlerfrei durchgeführt. Die Aufgabe, die mit Abstand am aller seltensten vollständig korrekt gelöst wurde – von lediglich 8%, war diejenige, bei der Zahlen den jeweiligen Zahlenmengen zugeordnet werden sollten.

4. Ausblick

Ähnliche Studien zum Thema nachhaltiges Wissen in der Mathematik (vgl. Schwenk-Schellschmidt, 2013, Berger & Schwenk, 2006) oder auch populär – für die Allgemeinheit - aufbereitete Ergebnisse solcher Untersuchungen (vgl. Henn & Polaczek, 2007) belegen, dass Schwierigkeiten im Umgang mit mathematischen Wissen durchaus weit verbreitet sind. Die hier durchgeführte Untersuchung zeigt, dass sich dieses „Problem" nicht nur auf einen nicht mathematisch interessierten Personenkreis beschränkt, sondern viel tiefgreifender ist, wie dies auch im Beitrag von Büning (2004) ausgeführt ist.

Es zeigt sich ganz klar, dass Schülerinnen und Schüler beim Übergang Schule – Hochschule eine entsprechend adäquate Betreuung, beispielsweise durch Brücken- bzw. durch Vorkurse benötigen, um den Herausforderungen am Beginn eines Studiums gewachsen zu sein. Dies gilt in besonderer Weise für ein Studium in den sogenannten MINT-Fächern. Demgemäß wurden am Campus Koblenz der Universität Koblenz-Landau die bereits vorhandenen Kurse weiter differenziert im Hinblick auf die im Studium erfolgende Ausbildung in Mathematik. Längerfristig werden jedoch bessere Effekte erwartet von einem Austausch mit den Lehrkräften der Region, in dem die Universität transparent macht, welche Erwartungen – differenziert nach Studiengängen - im Studium an die Kompetenzen in der Mathematik gestellt werden.

Literatur

AECC (Hrsg.) (2009). *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik" (Version 9/09). Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen*. verfügbar unter http://www.uni-klu.ac.at/idm/, zuletzt geprüft am 21.03.2014.

BIFIE (Hrsg.) (2013). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen*. online verfügbar unter https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_ 2013-03-11.pdf, zuletzt geprüft am 21.03.2014.

Berger, M. & Schwenk, A. (2006). Zwischen Wunsch und Wirklichkeit: Was können unsere Studienanfänger?. *Die neue Hochschule*, Heft 2, 36–40.

Büning, H. (2004). Breites Angebot an falschen Lösungen. *Forschung und Lehre*, Heft 11, 618–620.

Henn, G. & Polaczek, C. (2007). Studienerfolg in den Ingenieurwissenschaften. *Das Hochschulwesen*, 55. Jg./Heft 5, 144–147.

Rost, J. (2004). *Testtheorie, Testkonstruktion*. Bern: Huber.

Schwenk-Schellschmidt, A. (2013). Mathematische Fähigkeiten zu Studienbeginn. Symptome des Wandels -Thesen zur Ursache. *Die Neue Hochschule*, 1/2013, 26–29.

Boris GIRNAT, Basel

Individuelle Curricula von Lehrpersonen zur analytischen Geometrie

In diesem Aufsatz wird ein Auszug aus einer qualitativen Interviewstudie vorgestellt, die Lehreransichten zur analytischen Geometrie in der gymnasialen Oberstufe zum Gegenstand hat und die subjektive Ziel-, Inhalts- und Methodenauswahl der neun teilnehmenden Gymnasiallehrpersonen als individuelle Curricula rekonstruiert (vgl. Eichler, 2007). An dieser Stelle wird in aller Kürze eine Übersicht über die wichtigsten Forschungsergebnisse gegeben:

1) Dominantes Ziel ist die Erfüllung der Abiturvorgaben. Der inhaltliche Schwerpunkt liegt in Schnitt- und Abstandsproblemen der metrischen analytischen Geometrie. Dieses „Kerncurriculum" wird positiver gesehen als in der Mathematikdidaktik, wo es oft als geometrisch uninteressant und zu algorithmisch aufgefasst wird. Die Lehrpersonen verbinden es hingegen mit vielfältigen, unter Allgemeinbildungsaspekten durchaus interessanten Lernzielen (Abb. 1)

2) Individuelle Unterschiede gibt es erst mit Blick auf fakultative Inhalte. Hier werden verschiedene inner- und außermathematiche Themen eingesetzt und von den Lehrpersonen mit Pro- und Contraargumenten belegt, von denen hier nur die außermathematischen Themen bzw. die mit Realitätsbezug abgebildet werden (Abb. 2).

3) Die Einführung des Vektorbegriffs wird nicht unter lerntheoretischen Gesichtspunkten beurteilt, wie es in der Fachdidaktik der Fall ist, sondern als Vorbereitung des Kerncurriculums oder individuell favorisierter fakultativer Inhalte (Abb. 3).

4) Als besonders wichtig empfinden die meisten Lehrpersonen eine spezifisch analytische Form des Problemlösens, bei der es darum geht, durch Rückgriff auf anschauliche geometrische Vorstellungen, angereichert um Fachbegriffe und -wissen aus der Elementargeometrie, Begriffe, Darstellungen, Formeln und Verfahren der vektoriellen analytischen Geometrie problemorientiert herzuleiten, was strukturelle Ähnlichkeiten zum Modellierungskreislauf hat (Abb. 4)

Die Details dieser vier Punkte werden im Folgenden durch vier Abbildungen dargestellt

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 419–422). Münster: WTM-Verlag

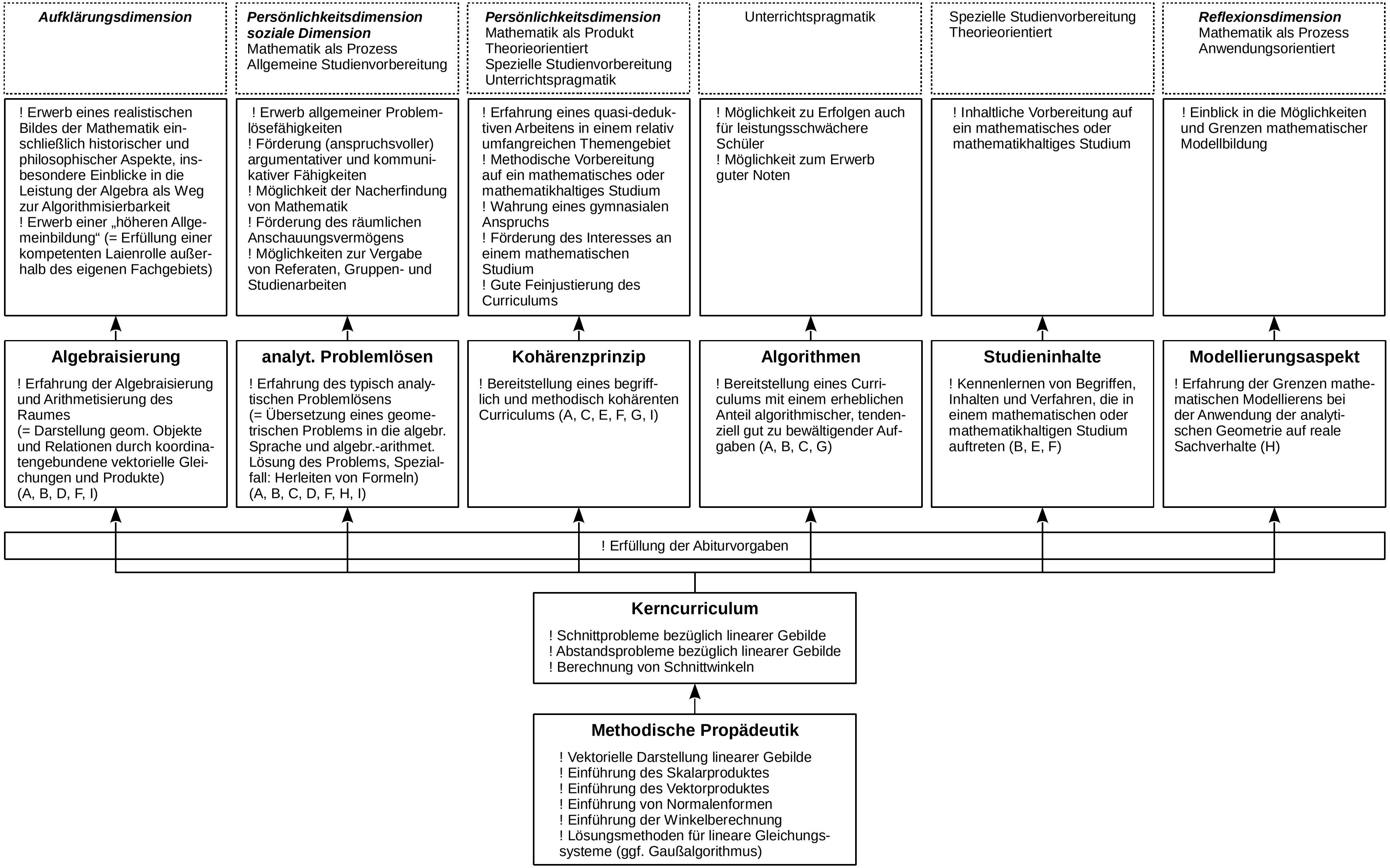


Abb. 1: Ziele des Kerncurriculums

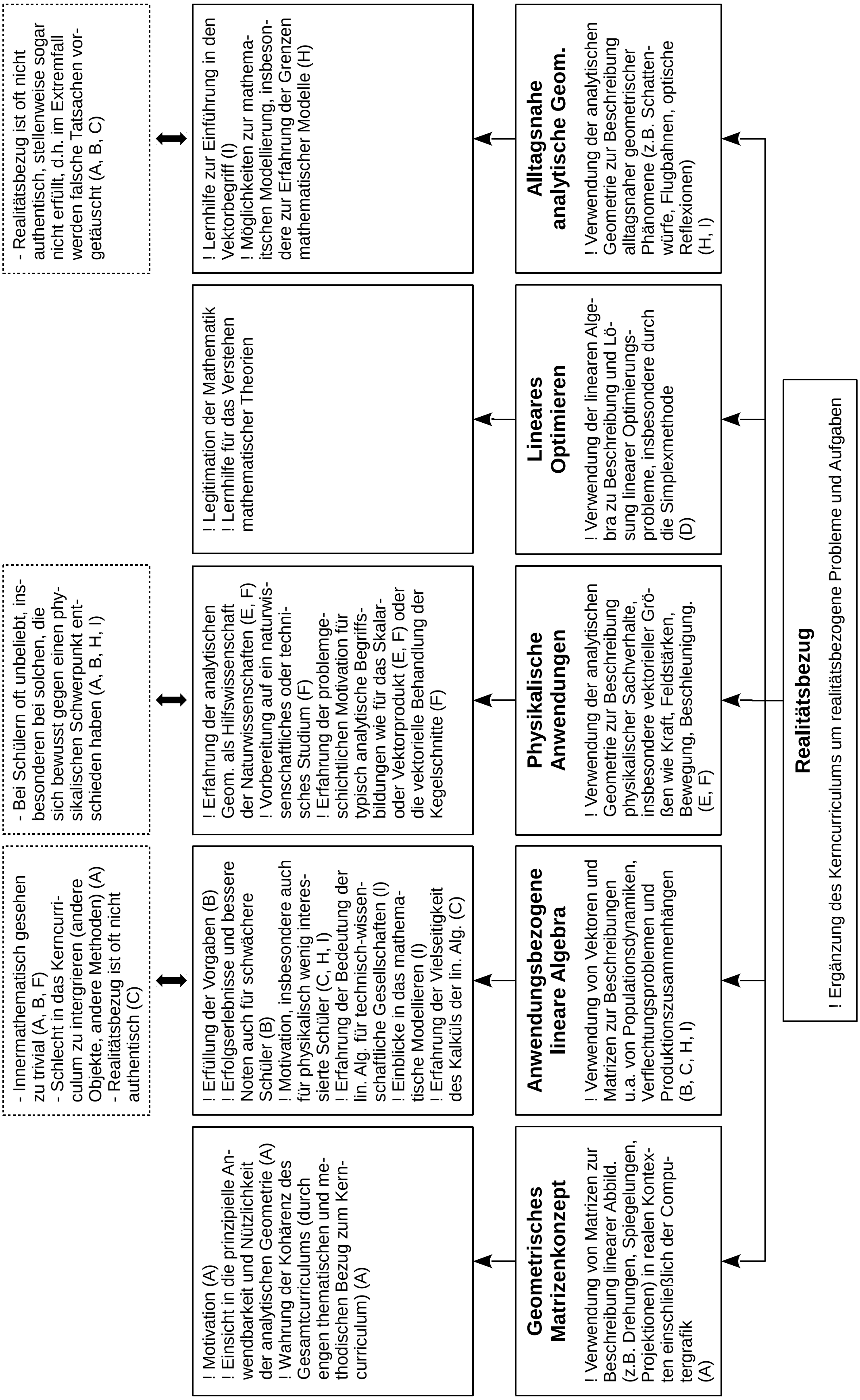


Abb. 2: Außermathematische Erweiterungen

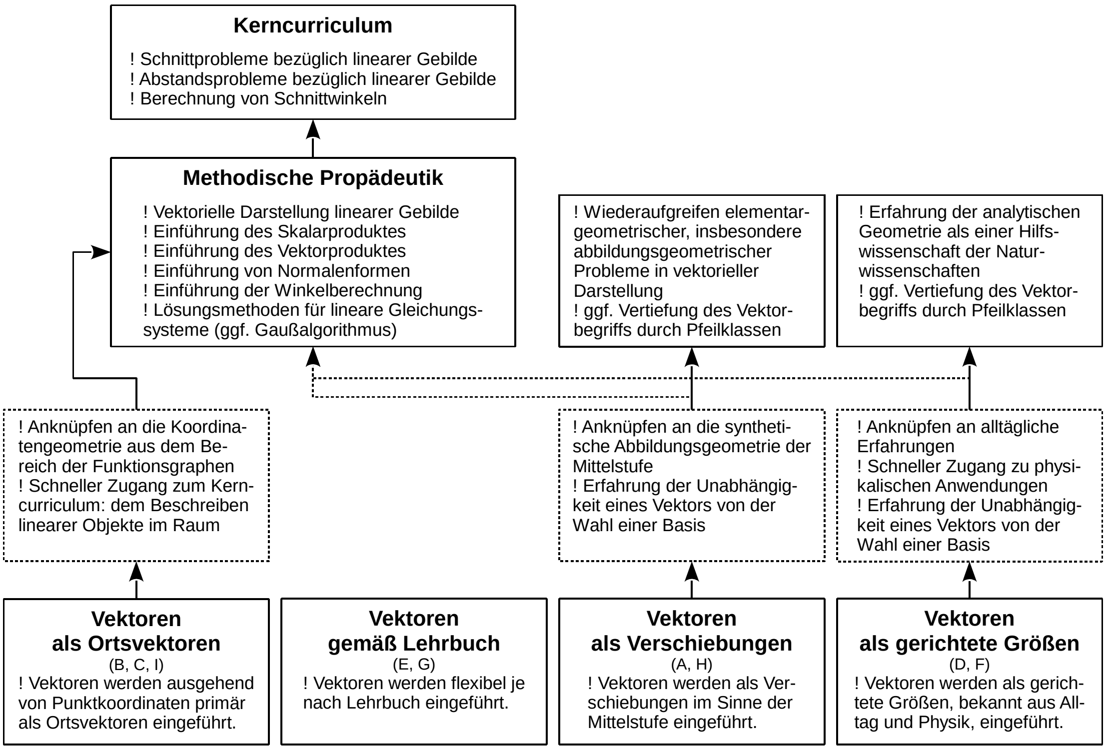
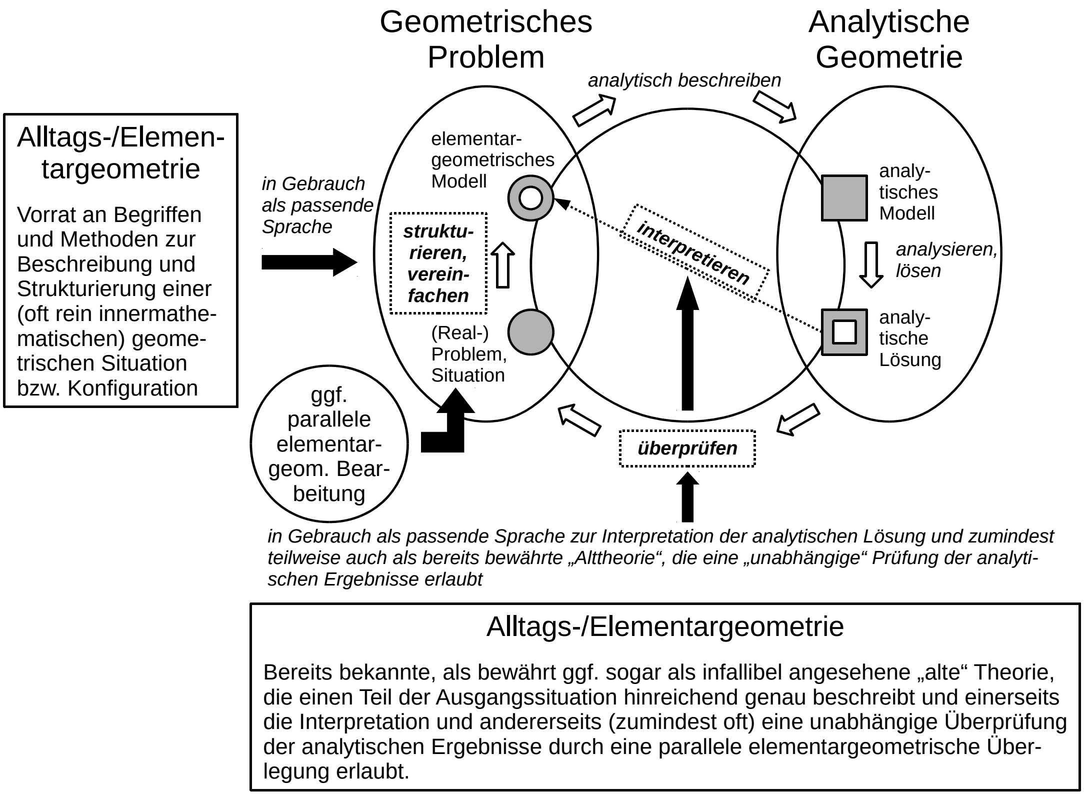


Abb. 3: Vektoreinführung



Literatur

Eichler, A. (2007). Individual curricula – Teachers' beliefs concerning stochastics instruction. IEJME 2(3). Online: http://www.iejme.com.

Matthias GLADE, Dortmund

Verläufe individueller Schematisierungsprozesse – vom Anteil vom Anteil zur Rechenregel

Fortschreitende Schematisierung

Altbekannt erscheint das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung als eines der Kernprinzipien von vorstellungsorientierten, und lernenden-aktivierenden Unterrichtskonzeptionen (Treffers 1987, Streefland 1991). Doch was ist Schematisierung genau, und wie verlaufen die Prozesse bei den Lernenden im Detail?

Unter Schematisierungsprozessen werden im Rahmen meines Dissertationsprojektes alle Prozesse begriffen, die von individuellen, informellen und durch Anschauungsmittel gestützten Lösungswegen zum Kalkül führen, gleich ob sie sich in Bildern, symbolischen Notationen, Sprache oder Handlungen manifestieren (Glade 2011 in Anlehnung an Treffers 1987). Diese Schematisierungsprozesse werden nicht als Abstraktion, sondern in Anlehnung an Aebli als Verdichtungen gefasst, um zu betonen, „dass der neue Begriff in Kontinuität an das bisherige Wissen anschließt und dass durch die Pyramide seiner Konstruktion hindurch die Bedeutungen weitergereicht werden, die im bisherigen Wissen und in der bisherigen Erfahrung angelegt sind" (Aebli 1981, 111). Diese Bedeutungsweitergabe soll die intendierte Verknüpfung von informellen vorstellungsbezogenen und kalkülmäßigen Wegen akzentuieren, anstatt die Entwicklung von Rechenregeln vornehmlich mit Vergessen verknüpfen (vgl. z.B. Krämers Dictum der „Kalkülisierung als Vergessenstechnik", Krämer 2003, 169.)

Lernumgebung zum Anteil vom Anteil

Ausgehend von Kontextproblemen wird das Konzept des Anteils vom Anteil entwickelt (Aufgabenmaterial nach Prediger et al. 2013, auch abgedruckt in Glade & Schink 2011) und Anteile von Anteilen in Rechteckbildern anschauungsgestützt bestimmt (vgl. Bilder im Kasten auf der übernächsten Seite). Daraus wird ein Kalkül-Weg zunächst nur für Stammbrüche (mit Zähler 1), dann für andere Brüche entwickelt. Dazu dienen die Schematisierungsimpulse im nebenstehenden Kasten.

Schematisierungsimpulse:

- Kann man das auch einfacher schreiben / lösen?
- Kann man das auch ohne das Zeichnen von Bildern lösen?
- Kannst du eine Regel finden?
- Begründe deine Regel.
- Moderationsimpulse: Vergleicht untereinander. Erklärt einander.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 423–426). Münster: WTM-Verlag

Forschungsdesign

Die Studie ist im Rahmen des langfristigen Entwicklungsforschungsprojekts KOSIMA (Hußmann, Leuders, Barzel & Prediger 2011) angesiedelt. Die Daten wurden in Designexperimenten (Gravemeijer & Cobb 2006) im Laborsetting mit 10 x 2 Sechstklässerinnen und -klässlern an einer nordrheinwestfälischen Gesamtschule und einem Gymnasium durch Videographie und Transkription erhoben.

Untersucht wurden Schematisierungsprozesse von 1-3 Schulstunden in oben skizzierter Lernumgebung, nicht wie oft üblich langfristige, über zum Teil Jahre angelegte Lernprozesse (vgl. z.B. Streefland 1991). Dies ermöglicht, die relevanten Prozesse auf einer Mikroebene zu rekonstruieren.

Die Analyse der Transkripte erfolgte auf der Basisebene durch Rekonstruktion der Theoreme- und Konzepte-in-Aktion (nach Vergnaud 1996), um sich den Prozessen interpretativ anzunähern. Die in der Basisanalyse rekonstruierten Konzepte- und Theoreme-in-Aktion wurden im zweiten Schritt durch deren intraindividuellen und interindividuellen Vergleich einheitlicher formuliert und ausgeschärft. Ihre Systematisierung zu einem strukturierten Analyseinstrument wird zusammen mit den Ergebnissen vorgestellt.

Einblicke in Prozess und Ergebnisse der Analyse

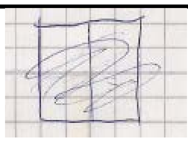
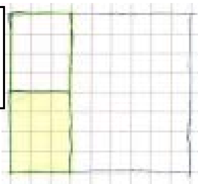
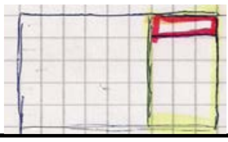
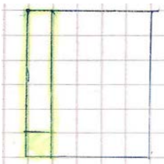
Die Untersuchung der rekonstruierten Konzepte und Theoreme-in-Aktion zeigte, dass sich die Entwicklung bei den jeweiligen Lernendenpaaren nicht unabhängig von den jeweiligen zu bearbeitenden Aufgaben beschreiben lässt. Stattdessen verlaufen die Schematisierungsprozesse entlang von Entwicklungslinien in „Handlungsaufgaben“, die sich auf die zu erledigenden Aufgabenstellungen beziehen (siehe Kasten).

Aufgabenstellung	*Handlungsaufgaben*
Zeichne ein Bild.	Ganzes **F**inden
	Ganzes **E**inteilen
Bestimme den Anteil vom Anteil.	Anteil vom Anteil **A**blesen
Versuche es ohne zu zeichnen.	Von Darstellungen **L**ösen

Es lassen sich entlang der Handlungsaufgaben Kategorien von Theoremen- und Konzepten-in-Aktion unterscheiden, die sukzessive in Schematisierungsprozessen durchlaufen werden. Diese inhaltlich unterscheidbaren Kategorien, die eine Beschreibung der Progression in der jeweiligen Handlungsaufgabe ermöglichen, bezeichne ich als **Schematisierungsstufen**.

Die hier vorgestellten Ebenen der Analyse sind in der Tabelle unten in konzentrierter Form angedeutet. (Theoreme-in-Aktion sind nicht abgedruckt. Für Transkriptauszüge vgl. Glade & Schink 2011.)

Schematisierungsstufen in der Handlungsaufgabe „Ganzes Finden“

Transkriptauszüge	**Konzept-in-Aktion**	**Schematisierungsstufe**
“Wie soll ich das in drei teilen?“ $\boxed{\frac{1}{2}\textit{von}\frac{1}{3}}$ 	Rechteck als beliebiges Ganzes	Unbestimmtes Ganzes wählen
„In der Länge habe ich 9 Kästchen gemacht, weil das kann man besser durch 3 teilen.“ „Die Länge habe ich gezählt. Die nach unten habe ich gar nicht gezählt.“ $\boxed{\frac{1}{2}\textit{von}\frac{1}{3}}$ 	Passung von einem Anteil und einer Seitenlänge / Ganzem als Teilbarkeit	Ein Anteil wird bei der Konzeption des Ganzen bewusst genutzt
„9 ist ja durch 3 teilbar, 3 mal 3 ist 9 und das ist dann ja ein Drittel jeweils.“ „Ich hätte bei der Größe 5 genommen. Weil 1/5.“  $\boxed{\frac{1}{5}\textit{von}\frac{1}{3}}$	Passung von zwei Anteilen und Seitenlängen / Ganzem	Beide Anteile werden bewusst bei der Konzeption des Ganzen genutzt
„Ich hab das verkürzt.“ $\boxed{\frac{1}{6}\textit{von}\frac{1}{5}}$  „Ich glaub ich hab einen Trick damit das schneller geht wie man das besser rein kriegt.“	Nenner als Seitenlängen (Vereinfachung)	Als Seitenlängen werden die Zahlen im Nenner genutzt

Die Entwicklung in der Handlungsaufgabe „Ganzes Finden“ ist dadurch gekennzeichnet, dass zunehmend Kriterien an das Ganze herangetragen werden, so dass es weiter vorstrukturiert und insofern weniger frei wählbar wird. **Verdichten** heißt für diese Handlungsaufgabe also: die Beziehung zwischen dem Ganzen und den Nennern zunehmend in den Blick zu nehmen und zu optimieren. Ist die Handlungsaufgabe durch das Entwickeln der Nutzbarkeit der Nenner als Seitenlängen schematisiert, wird sie nur durch Rückgriff darauf abgearbeitet, ohne sonderlich im Fokus zu sein. Dabei sind die weniger gut vorstrukturierten Konzeptionen des Ganzen nicht einfach nur vergessen, sondern sie sind im Konzept-in-Aktion ||Nenner als Seitenlänge|| verdichtet.

Fazit

Diese ersten Einblicke in ein komplexes Dissertationsprojekt (Glade 2015) deuten in der gebotenen Kürze an, wie sich Prozesse der fortschreitenden Schematisierung mit dem auf Vergnaud aufgebauten Analyseinstrument als Entwicklung durch Schematisierungsstufen in verschiedenen Handlungsaufgaben informativ beschreiben und besser verstehen lassen. *Verdichten* bedeutet dabei jedoch in den verschiedenen Handlungsaufgaben ganz unterschiedliches.

Literatur

Aebli, Hans (1981): Denken: das Ordnen des Tuns, Band II: Denkprozesse. Stuttgart: Klett-Cotta.

Glade, Matthias / Schink, Andrea (2011): Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen – Ein Weg mit System: fortschreitende Schematisierung. Mathematik lehren 162, 43-47. Online unter www.ko-si-ma.de

Glade, Matthias (2011): Vom Zeichnen zur Rechenregel - Individuelle Prozesse der fortschreitenden Schematisierung zum Anteil vom Anteil. In Beiträge zum Mathematikunterricht, 303-306.

Glade, Matthias (2015, in Vorbereitung): Fortschreitende Schematisierung als Verdichtung – empirische Rekonstruktionen von Schematisierungsprozessen zum Anteil vom Anteil. Dissertation. Dortmund: Technische Universität.

Gravemeijer, Koeno / Cobb, Paul (2006): Design research from the learning design perspective. In van den Akker, J, Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.): Educational Design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products. Routledge, London, 45-85.

Hußmann, Stephan, Leuders, Timo, Prediger, Susanne & Barzel, Bärbel (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) - ein fachdidaktisches Forschungs-und Entwicklungsprojekt. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 419-422

Krämer, Sybille (2003): "Schriftbildlichkeit" oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift. In Horst Bredekamp und Sybille Krämer (Hrsg.): Bild, Schrift, Zahl, München: Fink 2003, S.157 – 176.

Prediger, Susanne / Schink, Andrea /Schneider, Claudia / Verschraegen, Jan (2013): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken. In Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin, 143-164.

Treffers, Adri (1987): Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project.- Reidel, Dordrecht.

Streefland, Leen (1991): Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research, Kluwer, Dordrecht.

Vergnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. In L. P. Steffe & P. Nesher (Hrsg.), Theories of mathematical learning (S. 219-239). Lawrence Erlbaum: Mahwah, NY.

Eva GLASMACHERS, Birgit GRIESE, Michael KALLWEIT, Bochum

Transfer von Studienreformprojekten – Kolleg 2013 des Netzwerks Lehre^n

Mathematik ist eine zentrale Schlüsselqualifikation in allen naturwissenschaftlich-technischen Studienfächern, aber oft auch das Nadelöhr für angehende IngenieurInnen in der Studieneingangsphase: Besonders an den Mathematikveranstaltungen kristallisieren sich Defizite in fachlichen und methodischen Kompetenzen heraus. Diese führen dann zu unbefriedigenden Bestehensquoten und damit oft zum frühen Studienabbruch. Aus diesem Grunde wird bereits seit einiger Zeit an vielen Hochschulen an Reformen und Ergänzungen der bisherigen Lehrformate gearbeitet. Bisher fehlte aber ein systematischer Transfer von Best Practice Beispielen und Erfahrungen in die fachliche Breite.

1. Verortung und Akteure des Kollegs 2013

Das Bündnis für Hochschullehre *Lehre^n* hat diese Lücke erkannt und leistet hier systematische Unterstützung. Lehre^n ist eine Gemeinschaftsinitiative von der Alfred Toepfer Stiftung, der Joachim Herz Stiftung, der NORDMETALL-Stiftung, des Stifterverbandes für die Deutsche Wissenschaft und der Volkswagen Stiftung, die auch die Begleitforschung zum Lehre^n Jahresprogramm und Kolleg fördert.

Das Bündnis Lehre^n knüpft an die bereits bestehenden Fördermaßnahmen der beteiligten Stiftungen in der Hochschullehre an und hat in seinen Programmen seit 2010 Akteure unterschiedlicher Zielgruppen zusammengebracht. Mit dem Kolleg 2013 stehen erstmals beispielhafte Studienreformprojekte im Fokus, die sich auf die Studieneingangsphase in den Ingenieurwissenschaften, genauer genommen auf die dort verankerten Mathematikveranstaltungen, konzentrieren. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben ein Jahr lang offen ihre Ideen, Erkenntnisse und Erfahrungen aus den Projekten ausgetauscht und mit Personen aus der Hochschuldidaktik, der Lehr- und Lernforschung und der Hochschulleitung die jeweiligen Reformansätze reflektiert. Zentral waren ein Prozess des voneinander und miteinander Lernens sowie das Ziel, Methoden für den Transfer der bewährten Ansätze zu entwickeln.

Die im Kolleg 2013 zusammengeführten Projektteams sind an drei Universitäten und drei Fachhochschulen tätig. Sie sind im Abschnitt 3 einzeln aufgeführt.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 427–430). Münster: WTM-Verlag

2. Gemeinsame Prinzipien der Reformvorhaben

Die Reformprojekte haben das gemeinsame Ziel, die Studierenden zu ermutigen und zu befähigen, sich aktiv mit den Inhalten der Lehrveranstaltungen auseinanderzusetzen. Bei der Gestaltung der einzelnen Reformvorhaben wurde - ohne dass die Akteure im Vorfeld untereinander im Kontakt standen - von ähnlichen Prinzipien ausgegangen. Diese sind nicht neu, werden aber durch den Facettenreichtum der einzelnen Projekte sehr vielseitig mit Leben gefüllt und bildeten die Grundlage der gemeinsamen Arbeit im Kolleg.

Diese Prinzipien lauten im Einzelnen:

- Förderung des aktiven und eigenständigen Lernens
- Vermittlung von Lern- und Arbeitstechniken
- Intensivierung des Kontakts zwischen Lehrenden und Studierenden
- Einsatz gut ausgebildeter Tutorinnen und Tutoren in kleinen Gruppen
- Förderung der Kooperation der Studierenden untereinander
- Prompte Rückmeldung des Lernerfolges an die Studierenden

3. Inhalte der einzelnen Reformprojekte

Hochschule	Projektbeschreibung	Ziele
Fachhochschule Aachen	**ANPAK:** Langjährige Erfahrung mit Mathematik-Eingangstest als Prognose für den Studienerfolg und der Analyse der Defizite der Studienanfänger; Konzeption eines Anpassungskurses für vordefinierte Zielgruppe	Methodische und mathematische Kompetenzen fördern sowie Studienabbruchquote verringern
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg	**Themenwochen:** Neukonzeption des Studiengangs *Regenerative Energiesysteme und Energiemanagement;* Zeitliche und inhaltliche Synchronisierung der Grundlagenmodule, u.a. der Mathematik, der Physik, und der Elektrotechnik mit der Vorlesung *Energietechnik*	Sichtbarmachung praktischer Anwendungsbezüge von Studienbeginn an
Ostfalia Hochschule für Angewandte Wissenschaften Wolfenbüttel	**MF & FM (Mehr Feedback und formative Assessments in der Mathematik):** Neukonzeption von Lehrveranstaltungen mit aktivierenden Lehrmethoden; Einsatz u.a. von Clickern und Peer-Instruction sowie der elektr. Lernplattform (LON-CAPA) und semesterbegleitenden Tests	Verbesserung der Kommunikation und des Konzeptverständnisses; Etablierung innovativer Lehrmethoden

Technische Universität Berlin	**Uni Plus, Unitus:** Entwicklung von Lehr- und Lernressourcen für Erstsemesterveranstaltungen in Mathematik für die Ing-Wissenschaften; u.a. multimedial durchgeführte Tutorien, Berücksichtigung von Lerntypen, Lerner-zentrierte Methoden, Hinweise zu typischen Fehlauffassungen für Tutoren	Steigerung der Leistungen der Studierenden, insb. bei Hausaufgaben und Prüfungen
Ruhr-Universität Bochum	**MP^2-Mathe/Plus/Praxis:** *MathePlus* – Unterstützung im 1. Semester beim Erwerb adäquater Lern- und Arbeitsstrategien *MathePraxis* - Praxisprojekte mit klarer Mathematikanwendung im 2. Semester	Steigerung der Erfolgsquote im ersten Studienjahr und der Studienmotivation
Technische Universität Wien	**AKMATH/GKMATH:** *AKMATH* - Auffrischung der Mathematikkenntnisse zur Vorbereitung aufs Studium *GKMATH* - Verbesserung des Zeitmanagements in der Mathematikveranstaltung durch Blended-Learning: Auslagerung des Trainings der Fertigkeiten, Fokussierung auf Verständnis in der Präsenzlehre	Verbesserung des Verständnisses und der Rechenfähigkeit, Verringerung der Abbruchquote, Förderung der „Selbststeuerung“

4. Ergebnisse

Unter Einsatz von praxisbewährten Evaluationsmethoden wurden und werden alle Projekte vor dem Hintergrund der gesetzten Ziele kontinuierlich evaluiert und weiterentwickelt. Die Evaluationsergebnisse belegen, dass die Maßnahmen Wirkung zeigen:

- Die Studienmotivation der involvierten Studierenden sowie die aktive Beteiligung in den Lehrveranstaltungen und Tutorien sind im Verhältnis zu früher gestiegen.

- Die Studierenden nehmen ihre Lernfortschritte bewusster wahr. Sie können ihre Stärken und Schwächen reflektierter beurteilen und ihre Studienleistungen besser steuern.

- Die Evaluationsergebnisse belegen ein gestiegenes Verständnis der vermittelten mathematischen Konzepte und Regeln.

- Beim Einsatz von Praxisbezügen wird ein signifikant gestiegenes Interesse für die Mathematik gemessen sowie eine höhere Bereitschaft der Studierenden, Probleme selbst lösen zu wollen.

- Besonders erfreulich ist, dass mehr Studierende als früher die ihnen gestellten Hausaufgaben erfolgreich lösen und die mündlichen oder schriftlichen Prüfungen bestehen – ohne Senkung der Prüfungsstandards.

Zielführend dabei war zum einen, sich nicht allein auf eine einzelne Maßnahme zu konzentrieren, sondern mehrere aufeinander abgestimmte und ineinandergreifende Maßnahmen umzusetzen. Zum anderen ist eine kontinuierliche Optimierung aller Maßnahmen über längere Zeiträume unerlässlich. Nähere Informationen zu den einzelnen Evaluationsergebnissen sowie den zur Auswertung herangezogenen Evaluationsmethoden erteilen die einzelnen Projektteams des Kollegs.

6. Ausblick

Lehr- und Lernkonzepte, die den Lehre^n-Prinzipien folgen, sollen langfristig konsequent umgesetzt werden. Intensive Diskussionen, z.B. zur Frage nach einer Veränderung von Struktur, Inhalt und zeitlicher Reihenfolge des Stoffes sowie zum Einsatz neuer Formen der Leistungsüberprüfung müssen in diesem Rahmen fortgeführt werden.

Vom persönlich erlebten Erfahrungsaustausch zwischen den Mitgliedern der Projekte im Lehre^n Kolleg haben alle Beteiligten profitiert. Nach dem intensiven Austausch der sechs Projekte im Rahmen des Kollegs geht der Dialog in erweiterter Form weiter. Es soll nun der Kontakt zu anderen Projekten mit ähnlicher Stoßrichtung gesucht werden, um mit ihnen Erfahrungen auszutauschen und praxisnahe Ansätze weiterzuentwickeln. Ein erster Schritt hierzu ist die Transfertagung des HRK nexus und vom Bündnis Lehre^n am 8.4.2014 „Abgucken erlaubt! Transfer von Studienreformprojekten zur Mathematik in der Ingenieurausbildung“ (http://www.hrk-nexus.de/aktuelles/termine/transfertagung/).

Weitere Informationen zum Kolleg und den einzelnen Mitgliedern und Projekten sind auf der Internetseite von Lehre^n zu finden (http://www.lehrehochn.de/mathing).

Literatur

Bündnis Lehre^n. (2014). *Lehre^n Kolleg 2013: Mathematik in der Ingenieurausbildung: Positionspapier, überarbeitete Auflage*. Hamburg: Alfred Toepfer Stiftung F.V.S.

Dubravka GLASNOVIĆ GRACIN, Zagreb, Ljerka JUKIĆ MATIĆ, Osijek

Schulbuch als Teil des implementierten Curriculums

Eine Umfrage, die 2008 im Rahmen der Studie von Glasnović Gracin (2011) durchgeführt wurde, zeigte, dass Schulbücher im kroatischen Mathematikunterricht in hohem Ausmaß benutzt werden. Diese Ergebnisse entsprechen den Resultaten aus anderen Ländern (etwa Johansson, 2006; Peppin & Haggarty, 2001; Robitaille & Garden, 1989). Befragt wurden ca. 1000 TeilnehmerInnen, was ungefähr 50% aller MathematiklehrerInnen der Sekundarstufe I in Kroatien entspricht. Da die Ergebnisse in Glasnović Gracin (2011) durch eine deskriptive Analyse gewonnen wurden, zeigte sich ein Bedarf an tieferen Analysen der Ergebnisse und an weiteren Studien. Diese Studien umfassen qualitative Forschungen (Interviews und Unterrichtsbeobachtungen) die das Ziel hatten, die Rolle der Mathematikschulbücher in der Praxis zu erforschen. Die Ergebnisse können helfen, ein besseres Bild über die Rolle der Schulbücher zu bekommen.

Ziele und Methode

Ziele der Forschung „Schulbuch als Teil des implementierten Curriculums" waren:

- Metrische Merkmale und weitere Analysen (Faktoranalyse, Kreuztabellen) der Umfrage zu untersuchen.

- Schulbuchbenutzung durch Interviews und Unterrichtsbeobachtungen in der Sekundarstufe I zu untersuchen.

Schließlich wurden durch Triangulation die Ergebnisse der quantitativen Forschung (Umfrage) mit den Ergebnissen der qualitativen Forschung (Interviews und Unterrichtsbeobachtungen) verglichen.

Metrische Merkmale und tiefere Analysen der Umfrage

Die durchgeführte Faktoranalyse hat vier Faktoren über die Schulbuchbenutzung erbracht (Domović et al, 2012a; 2012b): „Blindes" Folgen des Schulbuchs, Üben von Schulbuchaufgaben, Differenzierung nach Schülerbedürfnissen und Verwendung anderer Materialien (nicht das Schulbuch). Weitere Analysen der Umfrageergebnisse haben gezeigt, dass es Unterschiede in der Schulbuchbenutzung hinsichtlich MathematiklehrerInnenbildung und Erfahrung gibt.

In der Sekundarstufe I in Kroatien können MathematiklehrerInnen in zwei große Gruppen unterteilt werden. Eine Gruppe bilden die

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 431–434). Münster: WTM-Verlag

MathematiklehrerInnen, die ihr Studium bis 1980 an den ehemaligen pädagogischen Hochschulen abgeschlossen haben (PH Gruppe). Die zweite Gruppe besteht aus MathematiklehrerInnen, die an den Universitäten ausgebildet wurden (MAT Gruppe). Beide Gruppen machen insgesamt ca 85% aller MathematiklehrerInnen der Sekundarstufe I aus.

Die Ergebnisse zeigen, dass beide Gruppen in hohem Maße das Schulbuch zum Üben benutzen. Im Gegensatz zur MAT Gruppe benutzt die PH Gruppe die Schulbücher öfter zum Erlernen von neuem Stoff und folgt stärker deren Struktur, Inhalt, methodischen Verfahren, Beispielen, usw. Die MAT Gruppe findet die mathematische Präzision in Schulbüchern sehr wichtig, während sich die PH LehrerInnen mehr an die Bedürfnisse der Kinder und Schulbuchinhalten orientieren. Diese Ergebnisse der quantitativen Studie verlangten weitere qualitative Forschungen.

Interviews und Unterrichtsbeobachtungen

Die qualitative Studie umfasste Unterrichtsbeobachtungen und Interviews von 12 Mathematiklehrerinnen (6 aus der PH Gruppe und 6 aus der MAT Gruppe). Jede Teilnehmerin wurde 3-4 Unterrichtsstunden beobachtet, das ergibt (insgesamt) 45 beobachtete Unterrichtsstunden. Nach den Beobachtungen wurden semistrukturierte Interviews durchgeführt.

Auch hier erweisen die Ergebnisse, dass das Schulbuch das dominierende Mittel für die Unterrichtsvorbereitung ist. Andere Materialien werden benutzt, aber nicht in so großem Ausmaß. Beim Erlernen von neuem Stoff dominiert Frontalunterricht, der auf Schulbuchinhalten basiert, danach folgt die individuelle Arbeit mit Hilfe von Schulbuchaufgaben.

Zitat (Unterrichtsbeobachtung): *„Öffnet das Schulbuch Seite... Lest den Titel... Schreibt den Titel ins Heft.“*

Zitat (Interview): *“Wir folgen dem Schulbuch. Seiner Struktur. Falls jemand abwesend war, soll er sich auf diese Weise zurechtfinden.“*

Wie in der Umfrage, zeigte sich das Schulbuch wieder als zentrales Mittel fürs Üben und für die Hausaufgaben.

Zitat (Interview):*“Nachdem wir den neuen Stoff erlernt haben, üben wir mit Hilfe der Schulbuchaufgaben.“*

Die inhaltliche Analyse der Anfderungen in kroatischen Schulbüchern zeigt eine Dominanz innermathematischer operativer Aufgaben (Reproduktion oder das Herstellen einfacherer Verbindungen) sowie geschlossene Antwortformate (Glasnović Gracin, 2011). Diese Ergebnisse verweisen auf die traditionellen Charakteristika des Mathematikunterrichts in Kroatien.

Durchschnittlich wird bei der MAT Gruppe öfter Gruppenarbeit und Partnerarbeit durchgeführt, diese Gruppe ist flexibler in der Anwendung verschiedener Unterrichtsmethoden und benutzt öfter andere Materialien sowie Technologie als die PH Gruppe. Auf der anderen Seite zeigen die Beobachtungen, dass die PH Gruppe in größerem Ausmaß der Schulbuchstruktur folgt. Diese Ergebnisse bestätigen die Umfrageergebnisse.

Diskrepanz zwischen Umfrage- und Beobachtungsergebnissen

Die Ergebnisse der qualitativen Forschung haben zwei Diskrepanzmomente zwischen Umfrage und Beobachtungen erbracht. Die erste Diskrepanz bezieht sich auf Motivationsbeispiele, die zweite auf Unterrichtsvorbereitungen bezüglich unterschiedlicher Schülerbedürfnisse.

Ungefähr drei Viertel der Befragten behaupten in der Umfrage, dass sie die Motivationsbeispiele aus Schulbüchern fast immer oder oft benutzen. In den Interviews finden alle Teilnehmerinnen die Motivationsbeispiele aus dem Schulbuch wichtig und behaupten, dass sie sie benutzen. Sie beklagen aber auch, dass sie mit den vorhandenen Schulbuchmotivationsbeispielen nicht immer zufrieden sind. Die Beobachtungen ergeben ein anderes Bild: In der Mehrheit der beobachteten Stunden gab es keine Motivation. Beide Gruppen zeigen hier ähnliche Ergebnisse. Diese stehen in Diskrepanz mit den Aussagen aus den Interviews und Umfragen, wo die Teilnehmer angegeben haben, dass sie oft Motivationsbeispiele aus dem Schulbuch benutzen.

Auch bei den Unterrichtsvorbereitungen bezüglich unterschiedlicher Schülerbedurfnisse zeigten sich Widersprüche. In der Umfrage behaupten 87% der Befragten, dass sie intensiv nach den Anforderungen unterschiedlicher Schülerbedürfnisse differenzieren und dafür das Schulbuch benutzen. Die Beobachtungen haben aber gezeigt, dass es fast keine Differenzierung der Anforderungen nach unterschiedlichen Schülerbedürfnissen gibt. Mehr als 75% der observierten Unterrichtsstunden zeigen überhaupt keine Differenzierung. Alle TeilnehmerInnen beschweren sich in den Interviews darüber, dass für die Differenzierung zu wenig Unterstützung vonseiten der ExpertInnen angeboten wird.

Schlussfolgerung

Umfrage, Interviews, als auch die Unterrichtsbeobachtungen haben gezeigt, dass das Schulbuch im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle spielt. Es wird besonders zur Vorbereitung und für Übungsaufgaben benutzt. Die

MathematiklehrerInnen, die an den ehemaligen pädagogischen Hochschulen ihr Studium abgeschlossen haben, halten überwiegend traditionellen Unterricht und orientieren sich stärker am Schulbuch.

Hinsichtlich Motivationsaufgaben und Differenzierung nach unterschiedlichen Bedürfnissen, zeigen die Ergebnisse, dass sich die Praxis von den Antworten in Interviews und Umfragen unterscheidet. Diese interessanten Ergebnisse geben Anlass zu weiteren Nachforschungen.

Literatur

Domović, V.; Glasnović Gracin, D.; Jurčec, L. (2012a): Use of mathematical textbooks with regard to sex and years of service of mathematics teachers, *Napredak* 153, 187-202. In Croatian.

Domović, V.; Glasnović Gracin, D.; Jurčec, L. (2012b): Initial teacher education and the use of mathematics textbooks, *Sociology and Space* 50/2 (193), 237-256. In Croatian.

Glasnović Gracin, D. (2011). *Requirements in Mathematics Textbooks and PISA Assessment.* Doktorarbeit. Klagenfurt: Alpen-Adria-Universität.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks. A classroom and curricular perspective.* Doktorarbeit. Luleå: Luleå University of Technology.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – The International Journal on Mathematics Education*, 33 (5), 158-175.

Robitaille, D. F. & Garden, R. A. (Hrsg.) (1989). The IEA study of mathematics II: Context and outcomes of school mathematics. Oxford: Pergamon Press.

Robin GÖLLER, Hans-Georg RÜCK, Kassel

Studienwahlmotive und Beliefs zu Beginn des Mathematikstudiums

In einer Studie von Briedis et al. (2008) geben ca. 90 % der Studienanfänger an, dass Fachinteresse, sowie persönliche Neigung und Begabung wichtige bzw. sehr wichtige Gründe für die Wahl des Studienfachs waren. In diesen Punkten unterscheiden sich Studierende des gymnasialen Lehramts Mathematik kaum von Studierenden der Bachelorstudiengänge Mathematik, Informatik, Elektrotechnik oder der Geisteswissenschaften. Dagegen spielen ein fester Berufswunsch und soziale Motive, wie z. B. viele Kontakte zu Menschen oder anderen zu helfen für die angehenden Lehrer als Studienwahlmotive eine größere Rolle, als für die anderen o. g. Studiengänge. Für etwa drei von vier Studierenden des Lehramts Mathematik ist eines der genannten Motive das entscheidende für die Studienwahl.

Nicht beantwortet wird hierbei die Frage, was Studienanfänger damit meinen, wenn sie als Studienwahlmotive persönliche Neigung und Fachinteresse angeben. Im Folgenden soll u. a. untersucht werden, inwieweit sich dies über ihre positiv belegten Beliefs erklären lässt.

Es gibt keine allgemein anerkannte Definition für den Begriff Beliefs. Traditionell hält man sich an die Beschreibung von Schoenfeld (1998): *„Beliefs are mental constructs that represent the codifications of people's experiences and understandings."* Dabei ist anzumerken, dass Beliefs stets mit einem „Objekt of Belief" auftreten, auf das sich die Beliefs in diesem Fall beziehen (vgl. etwa Goldin et al. 2009). Wir fokussieren uns an dieser Stelle auf Beliefs zur Mathematik an sich, die man auch als „Mathematisches Weltbild" bezeichnet. Dieses wird gewöhnlich (vgl. Grigutsch et al. 1998) in einen System- und einen Prozess-Aspekt unterteilt, wobei der Systemaspekt die Dimensionen „Formalismus" und „Schema" und der Prozess-Aspekt die Dimensionen „(Erkenntnis-)Prozess" und „Anwendung" enthält. In einer Studie von Törner & Grigutsch (1994) zeigte sich, dass sowohl der System-, als auch der Prozess-Aspekt zum mathematischen Weltbild der Studienanfänger gehörten, wobei der Prozess-Aspekt leicht dominierte.

Fragestellungen

In den oben dargestellten Studien von Briedis et al. (2008) und Törner & Grigutsch (1994) waren die Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Demzufolge stellt sich die Frage, ob man zu ähnlichen Antworten kommt, wenn man Studierende frei berichten lässt. Zudem bleibt die schon oben erwähnte

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 435–438). Münster: WTM-Verlag

Frage bestehen, was Studierende meinen, wenn sie von Fachinteresse sprechen. Insgesamt ergeben sich also folgende Fragestellungen:

1. Welche Studienwahlmotive formulieren Studierende des gymnasialen Lehramts Mathematik zu Beginn ihres Studiums?
2. Welche positiv belegten Beliefs zur Mathematik unterstützen die Studienwahl?

Methodisches Vorgehen

Die Daten zur Beantwortung der o. g. Forschungsfragen entstammen Interviews zu Lernstrategien, die etwa zwei Wochen vor Studienbeginn durchgeführt wurden. Die sieben Interviewteilnehmer (sechs weiblich, einer männlich) besuchten einen Mathematikvorkurs und waren im Studiengang gymnasiales Lehramt Mathematik eingeschrieben. Die Teilnahme war freiwillig und wurde nicht vergütet. Eine systematische Auswertung der Daten konnte bis jetzt noch nicht realisiert werden. Daher sei der vorliegende Artikel als „Werkstattbericht" verstanden und die Ergebnisse mit entsprechender Vorsicht interpretiert.

Studienwahlmotive

Zu den Studienwahlmotiven für das Lehramt betrachten wir zunächst folgendes Zitat:

„Ich denke eben, es ist ein schöner Beruf, weil man hat viel mit Menschen zu tun und vor allem, also ich mag das Vermitteln total gern, deshalb habe ich auch Gymnasium genommen, weil man da am meisten Stoff vermitteln kann und, also ich finde es macht ziemlich viel Spaß, wenn man merkt, dass man was erklärt und das dann vielleicht auch ankommt."

Hier finden sich gleich mehrere Studienwahlmotive für den Lehrerberuf wieder, die häufig genannt wurden. Dies sind zum einen soziale Motive, wie der Kontakt mit Menschen und zum anderen das „Vermitteln können". Letzteres wird positiv verstärkt, wenn der Lernerfolg sichtbar wird, das Vermitteln also erfolgreich ist. Mathematik wird als Fach gesehen, in dem sich der Lernerfolg besonders gut beobachten lässt. Fast alle Interviewteilnehmer berichten von positiven Erfahrungen als Nachhilfelehrer, auf deren Grundlage Ideen entwickelt wurden, wie dieser Vermittlungserfolg erreicht werden könnte.

Die Studienwahlmotive für das Studienfach Mathematik scheinen viel schwerer formulierbar zu sein. Die am häufigsten geäußerten Motive sind der Erfolg im Schulfach Mathematik und das Fachinteresse: *„Also Mathe und Physik, das waren eigentlich immer so meine besten Fächer (...), wo* *ich eigentlich immer alles verstanden hab,"* oder *„Mathe ist es geworden, weil ich irgendwann mit Mathe gar keine Probleme mehr hatte (...) Ich dachte mir, das liegt mir eigentlich ganz gut und ich finde es auch wirklich interessant."* Allerdings sind diese beiden Motive keineswegs unabhängig voneinander. Die Notwendigkeit des Kompetenzerlebens für das Entstehen von Interesse ist aus der Literatur bekannt (Krapp, 2005) und zeigt sich auch in dieser Stichprobe, insbesondere in den Begründungen, warum gewisse Teilbereiche der Schulmathematik als weniger interessant angesehen werden: *„Was mir nicht so viel Spaß gemacht hat, war die Analysis, aber das lag halt glaub ich zum Teil daran, dass ich am Anfang keine Ahnung davon hatte."* Demgemäß könnte man vermuten, dass das Erfolgsmotiv das Interessemotiv dominiert. Gegen diese Sicht wendet sich das folgende Zitat: *„Ich weiß nicht, lief ganz gut in letzter Zeit in Mathe und vor allem hab ich mir das jetzt nicht ausgesucht, weil ich das jetzt kann oder nicht kann, sondern eher, weil es mir halt Spaß macht, und weil ich jetzt nicht der Fan davon bin irgendwas auswendig zu lernen."* Zudem zeigt sich hier als weiteres Motiv, die Erwartung, *„dass man in Mathe nicht viel* (auswendig) *lernen muss, dass man einfach verstehen muss."*

Positiv belegte Beliefs

Als positiv belegte Eigenschaften der Mathematik wurden in dieser Stichprobe zum einen die Eindeutigkeit der mathematischen Ergebnisse (*„Ich weiß gar nicht genau, was mir daran Spaß gemacht hat, aber es ist glaube ich einfach diese Eindeutigkeit, dass man weiß, ich hab ne Aufgabe und es kommt eine Lösung bei raus, und diese Lösung ist dann auch entweder richtig, oder ich hab's falsch gemacht"*) und andererseits die der Mathematik innewohnende Logik (*„Mathematik ist ja größtenteils halt Logik"*) herausgestellt. Zudem wurde (überraschend) häufig die Anwendbarkeit der Mathematik als wichtiger und interessanter Aspekt beschrieben, durch den die Mathematik erst ihren Sinn, ihre Berechtigung erhält.

Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Inhalten wird einerseits in der Durchführung von Verfahren (*„Ich mag das sehr gerne Kurvendiskussion durchzuführen"*) und andererseits im Knobeln (*„Also ich habe bisher immer Spaß an Mathematik gehabt, das ist für mich immer so ein bisschen Knobelei"*) empfunden. Hierbei tendieren die Einzelpersonen stets zu einem dieser beiden Pole und lehnen den anderen eher ab, indem sie ersteres als nur Schreibarbeit sehen bzw. in letzterem die gewünschte (Verfahrens-)Sicherheit nicht finden.

Diese Sicherheit wird sowohl durch die Eindeutigkeit der mathematischen Ergebnisse (*„wenn Mathe richtig ist, dann ist es richtig, dann ist es gut"*), als auch durch die Logik der Mathematik (*„Mathe ist halt einfach logisch (...). Das ist halt einfach so, da kann man sich dran halten und dann macht man das so“)* vermittelt. Dabei werden die Worte „Logik“ bzw. „logisch“ meist in dem Sinne verwendet, dass etwas nachvollziehbar, klar, evident ist, also verstanden werden kann. Insgesamt wird die positive Belegung der Eindeutigkeit und Logik der Mathematik über die Sicherheit im Erfolgs- (*„Weil das reizt mich so (...), dass Mathematik das Fach ist, wo man das größte Erfolgserlebnis haben kann, weil‘s ja diese eine Lösung gibt, es gibt vielleicht mehrere Lösungswege, aber es gibt nur ein richtig, das ist in Deutsch nicht so“*) und Evidenzerleben (*„wenn alles so klar ist und man, obwohl‘s so abstrakt ist, irgendwie da richtig gut im Kopf mit hantieren kann, dann find ich das irgendwie ein gutes Gefühl“*) gefestigt.

Zusammenfassung / Diskussion

Die Motive für die Studienfachwahl Mathematik lassen sich - im Gegensatz zu den Motiven für die Studienwahl Lehramt - nur schwer formulieren. Am häufigsten werden Erfolg im Schulfach Mathematik und Fachinteresse genannt. Durch die Betrachtung von positiv belegten Beliefs zur Mathematik hat sich gezeigt, dass die Eindeutigkeit und Logik der Mathematik und das dadurch vermittelte Sicherheits- und Evidenzerleben, die Anwendbarkeit, sowie die gern ausgeführten mathematischen Tätigkeiten Aspekte des Fachinteresses sind. Vermutlich wirkt sich ein Rückgang der Erfolgserlebnisse und der empfundenen Sicherheit negativ auf die positive Belegung der o. g. Beliefs aus, was emotional-motivationale Schwierigkeiten und ein Nachlassen des Fachinteresses in der Studieneingangsphase erklären kann.

Literatur

Briedis, K., Egorova, T., Heublein, U., Lörz, M., Middendorff, E., Quast, H., & Spangenberg, H. (2008). Studienaufnahme, Studium und Berufsverbleib von Mathematikern. Einige Grunddaten zum Jahr der Mathematik.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs—no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results, 9-28.

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. Journal für Mathematik-Didaktik, 19(1), 3-45.

Krapp, A. (2005). Basic needs and the development of interest and intrinsic motivational orientations. Learning and Instruction, 15(5), 381–395.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. Issues in Education, 4(1), 1-94.

Törner, G., & Grigutsch, S. (1994). „Mathematische Weltbilder” bei Studienanfängern—eine Erhebung. Journal für Mathematik-Didaktik, 15(3-4), 211-251.

Thomas GÖTZ, Koblenz

Mathematische Modellierung – zwei Beispiele aus der Unterrichtspraxis an Schule und Uni

In diesem Beitrag werden exemplarisch zwei Beispiele von Modellierungsaufgaben vorgestellt, die im Rahmen von Modellierungswochen sowohl mit Schülern der gymnasialen Oberstufe als auch mit Mathematikstudenten im Bachelor und Master bearbeitet wurden.

Wie besteigt man einen Berg?

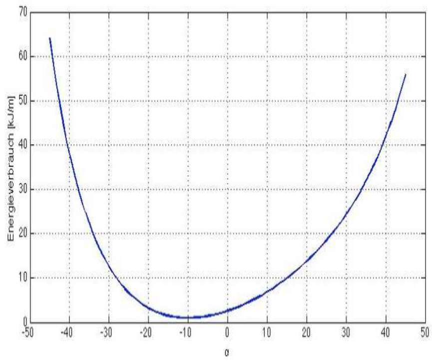
In Spiegel Online fand sich am 07.03.2008 ein Artikel mit dem Titel *„Die Mathematik des Bergsteigens"*. Hierin wird von zwei englischen Mathematikern berichtet, die energieoptimale Wege auf Berge untersucht haben. Ausgehend von einem empirisch gefundenen Zusammenhang zwischen der Steigung eines Weges und der dabei von einem *„typischen"* Wanderer verbrauchten Energie wurde der hypothetische Berg „*Mount Conicus*" –ein perfekter Kegel– untersucht. Dies war der Startpunkt der Fragestellung energieoptimale Wege auf *reale* Berge zu berechnen.

Als Daten standen zur Verfügung

- die Energieformel von Margaria (1938), verbrauchte Energie M je Meter Weglänge in Abhängigkeit von Steigungswinkel α mit $s = \tan(\alpha)$

$$M(s) = 2.635 + 17.37\, s + 42.37\, s^2 - 21.43\, s^3 + 14.93\, s^4$$

- diskrete Daten der Topographie aus einem GIS (Geoinformationssystem), typischerweise Höhendaten in Metern auf einen 10 x 10 m Raster.



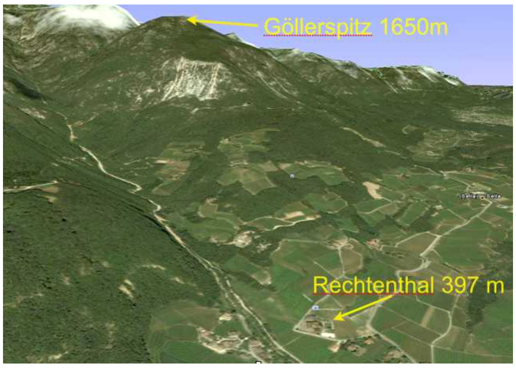


Abb.1 (links) Graph der Energieformel von Margaria (1938).

Abb2. (rechts) Topographische Daten für die Schülergruppe in Tramin, Italien.

Dieses Problem wurde bereits mehrfach im Rahmen von Modellierungswochen eingesetzt

- Modellierungswoche Garmisch-Partenkirchen (Sek 2, LK Mathematik)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 439–442). Münster: WTM-Verlag

- Modellierungswoche Tramin, Italien (Sek 2)
- Modellierungs-Proseminar, TU Kaiserslautern (Bachelor, 3.-5. Semester)
- ECMI Modellierungswoche, Wroclaw, Polen (Master, 2.-4. Semester).

Weiterhin ist zu diesem Thema eine Diplomarbeit an der TU Kaiserslautern (Rau 2010) entstanden.

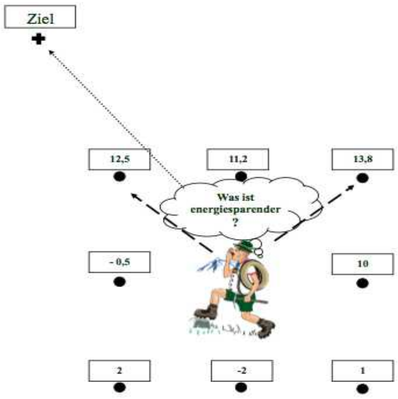
Von allen Gruppen wurde zuerst die Energie je Weglänge in den Energieverbrauch je gewonnenem Höhenmeter umgerechnet und hieraus ein energieoptimaler Steigungswinkel $\alpha_{\text{opt}} \approx 13{,}87°$ erhalten.

Der Lösungsansatz der Schülergruppen basierte auf der folgenden Heuristik

> Der Wanderer bewegt sich auf einem diskreten Rechteckgitter (vorgegeben durch die diskrete Datenstruktur der Höhendaten). In jeden Gitterpunkt wählt der Wanderer nun jene Richtung aus, in die die Steigung dem optimalen Wert α_{opt} am nächsten kommt.

Bei dieser Heuristik ist jedoch unklar, ob der Gipfel überhaupt erreicht werden kann. Zu Lösung dieses Problems wurde von der Schülergruppe aus Tramin eine zweite Heuristik vorgeschlagen, siehe Abbildung 3 und 4.

> Für jede der 8 möglichen Richtungen auf dem diskreten Gitter, wurde die Differenz (α_{opt} - α) zwischen optimaler und realer Steigung mit einem Strafterm $f_s(\varphi)$ in Abhängigkeit von der Abweichung zwischen gewünschtem Zielpunkt (Berggipfel) und Laufrichtung gewichtet.



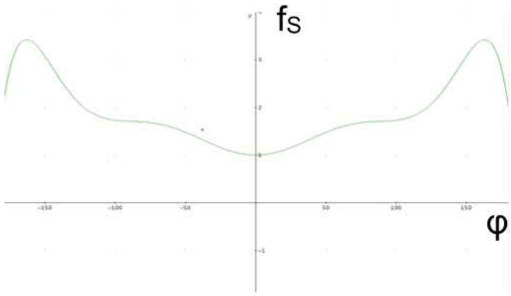
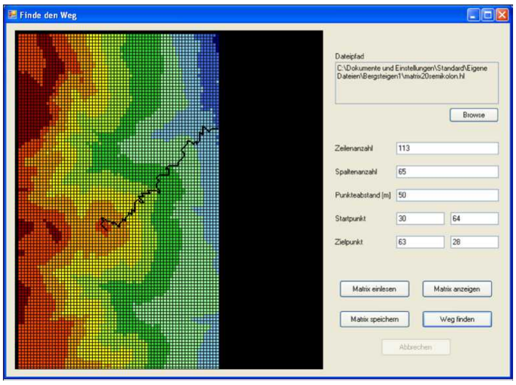


Abb 3. (links) Bewegung auf diskretem Gitter, Steigungswinkel in die acht Gitterrichtungen und Zielpunkt.

Abb 4. (rechts) Strafterm $f_s(\varphi)$ der Schülergruppe in Tramin.

Die Schülergruppe in Garmisch-Partenkirchen verwendete eine ähnliche Idee. Resultate waren jeweils ein Computerprogramm, welches eine Berechnung des Weges basierend auf gegebenen Topographie-Daten ermögliche, siehe. Abbildungen 5 und 6.



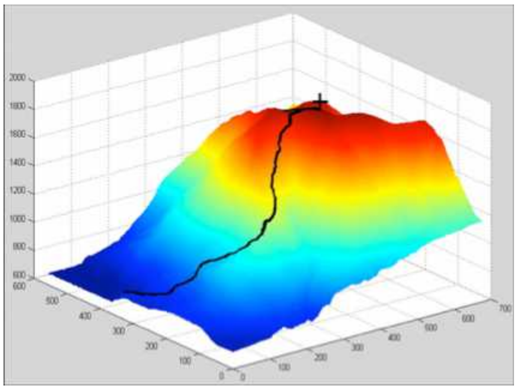


Abb. 5 (links) Screenshot des Simulationsprogramms der Schülergruppe aus Tramin.

Abb. 6 (rechts) Berechneter Optimaler Weg der Schülergruppe aus Garmisch-Partenkirchen.

Die Studentengruppen hatten im Vergleich zu den Schülergruppen mehr mathematische Werkzeuge und Techniken zur Verfügung. Hier wurden die diskreten Höhendaten als gewichteter Graph interpretiert. Die Punkte, an denen Höhendaten vorlagen bilden die Knoten des Graphs, jeder Knoten ist mit seinen acht Nachbarn über eine Kante verbunden. Der Energieverbrauch beim Bewegen entlang einer dieser Kanten entspricht dem Kantengewicht. Der energieoptimale Weg von einem gewählten Startknoten A zu eine beliebigen Zielknoten B kann nun mit dem *Dijkstra-Algorithmus* der Graphentheorie gefunden werden. Aufgrund der Asymmetrie der Energieformel von Margaria bezüglich Auf- oder Abstieg (α>0 bzw. α<0) ergeben sich unterschiedliche energieoptimale Wege bergauf oder bergab, siehe Abbildung 7.

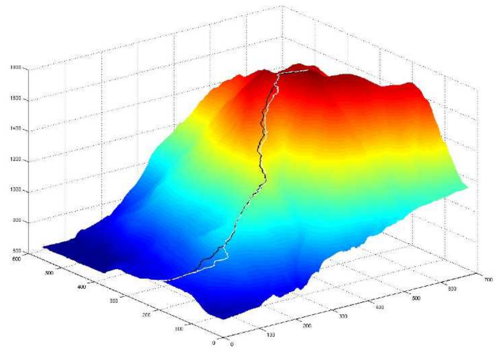


Abb 7. Energieoptimale Wege bergauf und bergab.

Wie bewässert man einen Garten?

Um einen Garten zu bewässern kann man Bewässerungssysteme mit fest installierten, versenkbaren Regnern einsetzen. Die Planung der Anzahl und Position der einzusetzenden Regner für einen beliebigen Garten ist ein nicht-triviales mathematisches Problem. Auf der Webpage der Firma Gardena (www.gardena.com/de) findet man ein ein Online-Planungs-Tool, welches für einen einzugebenden Gartenplan eine –in welchem Sinne?– optimale Anzahl und Positionierung verschiedener Regnertypen findet.

Die Überprüfung dieses Resultats durch einen eigenen Ansatz zur Optimalen Positionierung verschiedener Regnertypen war Ziel eines weiteren Modellierungsprojektes, welches mehrfach mit Schülergruppen (Sek 1 bzw. Sek 2) sowie im Rahmen von Modellierungs-Proseminaren an der TU Kaiserslautern durchgeführt wurde.

Von einer Studentengruppe eines Proseminars wurde folgende Lösungsheuristik vorgeschlagen

- Der gegebene Garten wird trianguliert; hierzu existiert eine Vielzahl leistungsfähiger Algorithmen.
- Für verschiedene *„Standardtypen"* von Dreiecken, wie *„lang & gleichschenkling"* oder *„spitzwinklig"*, werden optimale Teillösungen vorab berechnet.
- Diese Teillösungen werden zusammengeführt und ggf. verschiedene, benachbarte Regner zusammengefasst.

In der folgenden Tabelle ist ein exemplarisches Resultat im Vergleich zu der „Online"-Lösung von Gardena zusammengefasst.

	GARDENA	Studenten	Einsparung
Sprinkler	17	13	23,5 %
bewässerte Fläche	267,8 m^2	175,44 m^2	35 %
nicht bewässerte Fläche	ca. 1%	ca. 3%	–
mehrfach bewässerte Fläche	69,3 %	13,2 %	81,3 %

Literatur

Dambeck, H. (2008) Die Mathematik des Bergsteigens, http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/numerator-die-mathematik-des-bergsteigens-a-539366.html

Margaria, R. (1938). Sulla fisiologia e specialmente sul consumo energetico della marcia e della corsa a varia velocita ed inclinazione del terreno. *Atti Accad. Naz. Lincei Memorie, 7*, 299–368.

Rau, S. (2010). Energy optimal walking trails. Diplomarbeit TU Kaiserslautern, 64 S.

Daniela GÖTZE, Dortmund

Chancen und Möglichkeiten der domänenspezifischen Sprachförderung im Mathematikunterricht der Grundschule

Die sprachlichen Anforderungen des Mathematikunterrichts (MU) der Grundschule sind bekannter Maßen sehr hoch. Verbindliche Kompetenzerwartungen wie z.B. *eigene Vorgehensweisen beschreiben, gemeinsam reflektieren, Vermutungen entwickeln, Fachsprache benutzen*, sind in den Bildungsstandards fest verankert und betonen sowohl die kommunikative, verständigende als auch die kognitive, verständnisgewinnende Funktion von Sprache im Lernprozess (vgl. Maier & Schweiger 1999, S. 11). Eine geteilte Fachsprache unterstützt dabei „die Reflexion mathematischer [...] Sachverhalte [...] und führt damit zur verstehenden Konstruktion neuen Wissens“ (ebd., S. 150; siehe auch Sprache als *Lernmedium* vgl. Prediger 2013). Eine gezielte Förderung dieses Sprachregisters findet allerdings kaum statt, so dass mangelnde fachsprachliche Kompetenzen schnell zum *Lernhindernis* (vgl. Prediger 2013) werden können und in Folge dessen den Kindern höhere Lernziele möglicherweise verwehrt bleiben. Die Entwicklung einer geteilten Fachsprache stellt somit ein wesentliches *Lernziel* (vgl. ebd.) des heutigen MU dar. Im Sinne des Sprachkontinuums (vgl. Meyer & Prediger 2012) werden alltagssprachliche Kompetenzen der Kinder bewusst aufgegriffen, sprachliche Unterstützungsangebote gemacht (i.S. des scaffolding nach Gibbons 2006), um daraus fachsprachliche Kompetenzen anzubahnen. Angebote auf der reinen Wortebene reichen als sprachliches Gerüst allerdings nicht aus, da fachsprachliche Satzstrukturen benötigt werden, um mathematische Zusammenhänge und Beziehungen (z.B. relationale Beziehungen oder auch Propositionen) zu beschreiben (vgl. Prediger 2013).

In der in diesem Beitrag skizzierten Studie wurden operativ strukturierte und zugleich fachsprachlich anregende Lernumgebungen für den MU der Grundschule entwickelt. Folgende sprachfördernde Angebote kamen dabei zum Einsatz: Lehrer als Sprachvorbild (vgl. Wessel 2014 i.V.), Erarbeitung eines gemeinsamen Wortspeichers mit fachsprachlichen Begriffen und Satzbausteinen (vgl. Meyer & Prediger 2012; Götze 2013), sprachliche Vorbilder in Aufgabentexten (vgl. www.pikas.dzlm.de/epd) sowie metasprachliche Kommunikation über Kriterien für gute Beschreibungen (vgl. Link 2012). Der Vergleich der Eingangs- und Abschlusstandortbestimmung (ESOB und ASOB) sowie die Forscherhefteinträge erlauben einen Blick auf die Entwicklung der Beschreibungskompetenzen der Kinder. Für diesen Beitrag werden lediglich die Dokumente der LU „Schöne Päckchen“

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 443–446). Münster: WTM-Verlag

(neun Klassen 1./2. Schuljahr) herangezogen. Weitere Dokumente aus anderen Lernumgebungen existieren. Folgende Forschungsfrage ist für diesen Beitrag leitend (weitere werden im Projekt eruiert): Inwiefern entwickelt sich die Qualität der schriftlichen Beschreibungen?

Für die Auswertung wird auf ein Schema von Link (2012) zurückgegriffen, das in der Analyse von Kinderbeschreibungen operativer Aufgabenserien danach differenziert, ob die Objekte und operativen Veränderungen *generalisierend*, *exemplarisch* oder *gar nicht* beschrieben werden. Darüberhinaus kann bei generalisierenden Beschreibungen darin unterschieden werden, ob sie *eindeutig* in der Objektbeschreibung resp. *fortführbar* in der Operationsbeschreibung sind oder eben nicht. So werden in dem Dokument in Abb. 1 zwar zwei Objekte und deren Operationen generalisierend beschrieben. Es wird aber nicht deutlich, auf welche Objekte sich die Beschreibung genau bezieht (Welche zwei Zahlen?) und wie sie sich operativ verändern (Um wie viel mehr?). Somit hat dieses Kind zwei Objekte „generalisierend nicht eindeutig“ und deren operative Veränderungen „generalisierend nicht fortführbar“ beschrieben (für Details vgl. Link 2012).

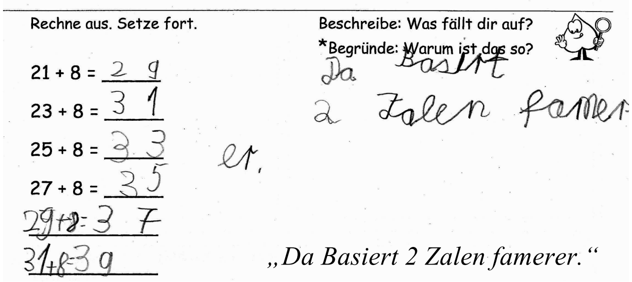


Abb. 1: Ein erster Beschreibungsversuch

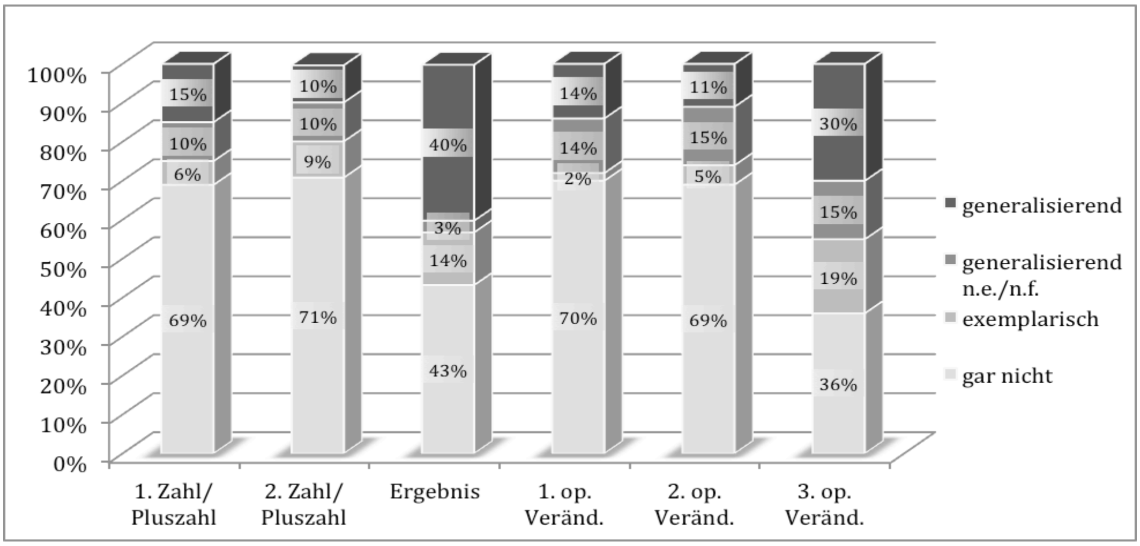


Abb. 2: Niveau der Beschreibungen in den Eingangs-SOBen (N=377)

Die Analyse der Beschreibungen in den ESOBen von 377 Kinderdokumenten zeigt, dass die Kinder zwar das operative Muster korrekt fortsetzen (so notiert das Kind in Abb. 1 zwei weitere zum Muster des Päckchens passende Aufgaben), und es somit erkennen und inhaltlich fortführen können. Beschreiben können sie ihre Entdeckungen allerdings nicht (vgl. Abb. 2).

Über 2/3 der Kinder haben den ersten resp. zweiten Summanden oder den Minuenden resp. Subtrahenden überhaupt nicht beschrieben. Tendenziell war es eher das Ergebnis, das sie bereits mit Worten umschreiben konnten. 40% der Kinder haben hierfür eine generalisierende und eindeutige Formulierung gefunden, vermutlich weil dieser Begriff im täglichen Unterrichtsgespräch bereits etabliert war. Ähnlich sieht es bei den operativen Veränderungen auf. Interessanterweise ist die Anzahl exemplarischer Beschreibungen relativ gering, was möglicherweise daran liegen könnte, dass es sich bei der zu beschreibenden Aufgabe um ein operatives Muster also um eine Aufgaben*serie* handelt und eine exemplarische Beschreibung zu einer recht aufwändigen Auflistung von Zahlen führen würde.

Nach der ESOB haben die Kinder eine im obigen Sinne beschriebene sprachfördernde aber zugleich fachlich reichhaltige Lernumgebung von circa vier Unterrichtsstunden durchlaufen. Im Anschluss daran wurde die ASOB durchgeführt. Abb. 3 zeigt die Ergebnisse der Analysen der ASOB.

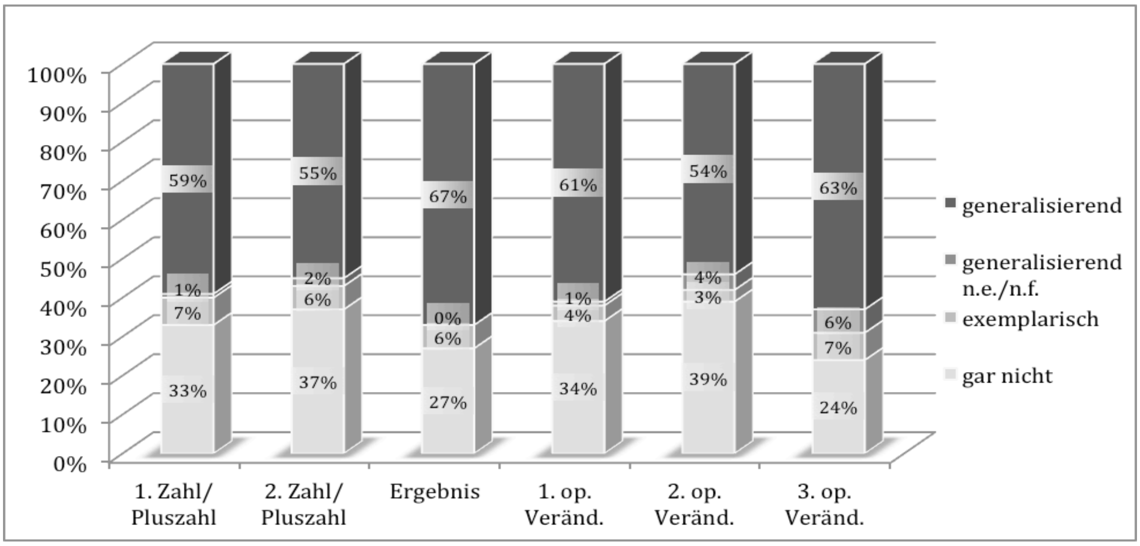


Abb. 3: Niveau der Beschreibungen in den Abschluss-SOBen (N=377)

Mehr als die Hälfte aller Kinder sind in der ASOB in der Lage, die Objekte und Operationen generalisierend und eindeutig resp. fortführbar zu beschreiben. Die Anzahl nicht beschriebener Objekte und Operationen ist deutlich zurückgegangen. Im Sinne des oben erwähnten Sprachkontinuums ist es natürlich, dass nicht alle Kinder am Ende der Lernumgebung sämtliche fachsprachliche Begriffe nutzen. Es sind sprachliche Angebote, auf die die Kinder zugreifen können oder eben nicht. Tendenziell ist aber zu erkennen, dass sehr viele Kinder dieses Angebot nutzen.

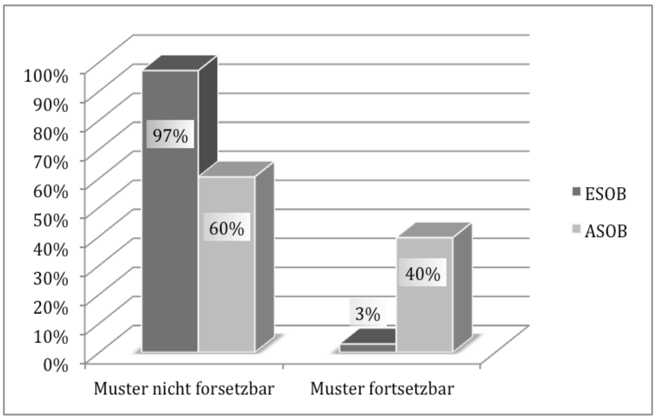


Abb. 4: Vollständigkeit der Musterbeschreibung (N=377)

Betrachtet man zudem die Vollständigkeit der Musterbeschreibungen (alle drei Objekte und deren operativen Veränderungen werden generalisierend und eindeutig/ fortführbar beschrieben) in der ESOB und ASOB sind auch hier deutliche Entwicklungen zu erkennen (vgl. Abb. 4). Während in der ESOB noch 97% aller Muster nicht vollständig beschrieben waren, waren es in der ASOB nur noch 60%. Bei 40% der Kinderdokumente kann demzufolge allein auf der Grundlage der schriftlichen Beschreibung die allgemeine mathematische Struktur der operativen Aufgabenserie verstanden werden.

Die hier dargestellten Daten zeigen, dass die Kinder sehr wohl die fachsprachlichen Formulierungen in ihre eigenen Formulierungen übernehmen und somit die schriftlichen Dokumente nicht nur generalisierend sondern auch zunehmend vollständig und auf einer geteilten Sprachbasis verfasst werden.

Literatur

Gibbons, P. (2006). Unterrichtsgespräche und das Erlernen neuer Register in der Zweitsprache. In P. Mecheril & T. Quehl (Hrsg.), *Die Macht der Sprachen. Englische Perspektiven auf die mehrsprachige Schule* (S. 269-273). Münster: Waxmann.

Götze, D. (2013). „Weil ich die Wörter, die ich noch nicht kannte, einfach gebraucht habe“ - Förderung (fach-)sprachlicher Kompetenzen im MU der Grundschule. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum MU* (S. 368-371). Münster: WTM-Verlag.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster: Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivtäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Maier, H. & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht.* Wien: öbv & hpt.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im MU - Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 54 (45), 2-9.

Prediger, S. (2013). Darstellungen, Register und mentale Konstruktion von Bedeutungen und Beziehungen. In M. Becker-Mrotzek, K. Schramm, E. Thürmann & H. J. Vollmer (Hrsg.), *Sprache im Fach – Sprachlichkeit und fachliches Lernen* (S.167-183). Münster: Waxmann.

Wessel, L. (2014 i.V.). *Fach- und sprachintegriert Fördern durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding – Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Gilbert GREEFRATH, Ronja KÜRTEN, Münster

Übergang Schule-Fachhochschule – Konzept und erste Ergebnisse aus dem Projekt Rechenbrücke

Im Rahmen des Kooperationsprojekts „Rechenbrücke" der Fachhochschule und der Universität Münster werden Studienanfänger eines ingenieurwissenschaftlichen Studiums in der Studieneingangsphase unterstützt schulmathematische Defizite auszugleichen. Im Folgenden werden Überlegungen zur Konzeption von Vorkursen und Tests im Zusammenhang mit diesem Projekt, das unter anderem einen modularisierten Vorkurs, diagnostische Tests und Online-Angebote enthält, vorgestellt und erste Ergebnisse präsentiert.

Vorkurs-Konzeption

Bei der Konzeption von Vorkursen können viele Aspekte berücksichtigt werden. Im Folgenden werden mögliche Entscheidungen zu Rahmenbedingungen, Zielen und Inhalten sowie Kompetenzen diskutiert, die bei der Erstellung von Vorkurs-Konzepten getroffen werden müssen.

Zunächst stellt sich die Frage, welche Studierende mit einem mathematischen Vorkursangebot angesprochen werden sollen. Dies können beispielsweise Lehramtsstudierende für eine bestimmte Schulform, Mathematik-Fach-Studierende, angehende Ingenieure oder Studierende weiterer Studiengänge sein. In der Regel sind Vorkursangebote auf wenige Studiengänge beschränkt. Eine Festlegung zur Teilnahmeentscheidung der Studierenden am Vorkurs ist ebenfalls zu treffen. So kann ein Vorkurs freiwillig oder als Option angeboten werden. Im Rahmen der Option können etwa Bonuspunkte für Übungszettel oder für eine Klausur nach dem ersten Semester vergeben werden. Denkbar ist auch ein Pflicht-Vorkurs, in dessen Rahmen etwa ein Test absolviert wird, der für das weitere Studium Bedingung ist. Angeregt durch die vielfältigen Möglichkeiten des Internets werden Vorkurse häufig nicht mehr als reine Präsenzkurse angeboten, sondern durch online verfügbare Materialien unterstützt. Die Spannweite reicht dabei von reinen Online-Kursen bis hin zu reinen Präsenzkursen.

Mathematische Vor- und Brückenkurse werden mit unterschiedlichen Zielsetzungen angeboten, wodurch sich ebenfalls unterschiedliche Schwerpunkte bei den behandelten mathematischen Inhalten ergeben: Ein Kurs zur Nachbereitung des Mathematikunterrichts wiederholt meist die Inhalte des Schulstoffs aus Sekundarstufe I oder II. Dient der Kurs der Vorbereitung auf das Mathematikstudium, so können bereits erste Inhalte aus den Anfängervorlesungen Inhalt des Kurses sein.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 447–450). Münster: WTM-Verlag

Die Vermittlung der mathematischen Kompetenzen in Vorkursen kann unterschiedlich akzentuiert stattfinden. So stellt sich einerseits die Frage, ob sie eher prozessbezogen, also mit einem Schwerpunkt auf allgemeinen mathematischen Kompetenzen etwa auf Problemlösen, Modellieren und Argumentieren oder eher inhaltsbezogen, also eher strukturiert nach mathematischen Sachgebieten, erworben werden.

Ein weiterer Aspekt ist die Entscheidung bezüglich der Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge. Diese Entscheidung hängt zusammen mit der Frage, ob die Vermittlung eher zum Ziel hat, Wissen einschließlich der Entwicklung entsprechender Grundvorstellungen zu vermitteln oder mehr auf das sichere Verwenden der entsprechenden Kalküle, also mathematische Fertigkeiten, abzielt. Ein Vorkurs kann aber ebenso konzipiert werden um allgemeine Kompetenzen für ein Studium zu vermitteln, etwa überfachliche Lernmethoden oder Studienorganisation einschließlich der universitären Arbeitsweise oder eher um soziale Kompetenzen zu vermitteln wie das Kennenlernen von Studierenden oder Dozierenden zu Studienbeginn.

Konzeptionen von Vorkurs-Tests

Ähnlich wie bei der Entwicklung von Vorkursen, können auch bei der Gestaltung von Vorkurs-Tests verschiedene Aspekte berücksichtigt werden. Zunächst stellt sich auch hier die Frage nach den Rahmenbedingungen der Testdurchführung. Die Teilnahme kann freiwillig, verpflichtend oder abhängig von einer Teilnahme am Vorkurs sein. Die Durchführung kann in der Hochschule oder zu Hause erfolgen.

Die Wahl der Zeitpunkte für die Testdurchführung steht in engem Bezug zu den Zielen, die erreicht werden sollen. Sollen Vorkenntnisse erfasst werden, muss eine Durchführung vor Beginn des Vorkurses stattfinden. Für (Selbst)diagnose und Lernempfehlungen sind Durchführungen vor, während oder nach dem Vorkurs möglich, je nachdem worauf die Lernempfehlungen bzw. die Ergebnisse der Diagnose abzielen. Für eine Evaluation des Vorkurses sind Testdurchführungen vor und nach dem Vorkurs empfehlenswert, wobei je nach Abstand des Tests zum Ende des Vorkurses kurz- oder langfristige Lernerfolge untersucht werden können.

Die Inhalte eines Vorkurs-Tests orientieren sich i.d.R. an den Inhalten des zugehörigen Vorkurses. Es wird jedoch meist eine Auswahl der abgefragten mathematischen Inhalte und allgemeinen Kompetenzen getroffen.

Schließlich gilt es noch das Format zu klären. Dabei kann zwischen papierbasiertem und PC-gestütztem Testformat unterschieden werden. Als Aufgabenformate eignen sich prinzipiell alle Aufgabenformate, die für Klausuren oder Tests eingesetzt werden können.

Die Rechenbrücke

Das Projekt „Rechenbrücke" ist ein Kooperationsprojekt von fünf Fachbereichen der Ingenieurwissenschaften der Fachhochschule Münster und dem Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik der WWU Münster. Im Rahmen des Projektes werden unterschiedliche Unterstützungsmaßnahmen im Bereich Mathematik für die angehenden Studierenden entwickelt. Zunächst wurde ein Mindestanforderungskatalog für die Mathematik in den Ingenieurstudiengängen der FH erstellt. Dieser Katalog basiert auf dem Mindestanforderungskatalog Mathematik, den das *cooperations-team schule - hochschule (cosh)* aus Baden-Württemberg als Konsens von Schulen und Hochschulen entwickelt hat. Dadurch kann der Katalog eine sinnvolle Grundlage für die Auswahl der mathematischen Inhalte eines Vorkurses oder eines Mathematiktests zu Studienbeginn liefern (vgl. Dürrschnabel et al. 2013). An der Fachhochschule Münster wurde der Katalog von *cosh* überarbeitet und in Abstimmung der Fachbereiche festgeschrieben. Ergänzt wurden die Ergebnisse von *cosh* dabei durch die Erfahrungen der Dozenten auf der Basis typischer Schwierigkeiten von Studierenden und typischer Fehler in Klausuren. Zur Erhöhung der Transparenz der Studienanforderungen an der Fachhochschule Münster wurde der Katalog für alle Studieninteressierten zugänglich veröffentlicht[1].

Basierend auf den im Mindestanforderungskatalog geforderten Fähigkeiten wurde an der Fachhochschule Münster ein modularisierter Vorkurs entwickelt, der von einem diagnostischen Vortest sowie einem Nachtest begleitet wird. Der Vortest erfasst vor Beginn des Vorkurses die Fähigkeiten der angehenden Studierenden und bietet ihnen mit der Rückmeldung eine Lernempfehlung für bestimmte Module des Vorkurses. Der Test besteht aus 13 Items, die hauptsächlich Inhalte der Sekundarstufe I abfragen. Der Vorkurs besteht aus zehn inhaltlichen Modulen zum Schulstoff der Sekundarstufe I und z.T. der Sekundarstufe II, die den Mathematikunterricht nachbereiten, sowie zwei Modulen zu allgemeinen Kompetenzen als Vorbereitung auf das Studium. Der Vorkurs findet als Präsenzkurs statt, der von E-Learning-Inhalten begleitet wird. Die Studierenden können frei entscheiden, ob sie die einzelnen Module im Präsenzkurs, online, beides oder gar nicht bearbeiten wollen. Dadurch liefert der Vorkurs eine große Flexibilität für das Lernen der Studienanfängerinnen und –anfänger. Im Anschluss an den Vorkurs findet der Nachtest statt. Dieser dient insbesondere der Evaluation des Vorkurses und ist als Paralleltest zum Vortest konzipiert.

---

[1] Der aktuell verwendete Katalog ist unter https://www.fh-muenster.de /studium/downloads/Mindestanforderungskatalog_Mathematik_FH_Muenster.pdf abrufbar (abgerufen am 29.01.2014).

Erste Ergebnisse

Der erste Durchlauf der Tests im Wintersemester 2013/2014 dient der Pilotierung von Test- und Vorkursdurchführung. Besonders niedrig sind die Lösungsquoten im ersten Test bei der Aufgabe zur Potenzrechnung (weniger als 25 %) und bei den Aufgaben zu Termumformungen, quadratischen Gleichungen, linearen Funktionen, Parabeln und Logarithmen (weniger als 50 %). In diesen Sachgebieten liegen nach diesen Ergebnissen große Defizite der Studienanfängerinnen und -anfänger vor.

Des Weiteren wurden Zusammenhänge zwischen möglichen Einflussfaktoren und der Gesamtpunktzahl im Vortest untersucht. Es haben sich signifikante Korrelationen für die Art des Schulabschlusses, die Abschlussnote, die letzte Mathematiknote und die Zeit seit dem Schulabschluss ergeben. Keine signifikante Korrelation konnte für die Art des benutzten Taschenrechners in der Oberstufe festgestellt werden.

Als dritter Aspekt wurden Veränderungen der Lösungserfolge an einer kleineren Stichprobe, bei der Vor- und Nachtest einander zugeordnet werden konnten, erhoben (N=209). Diese Daten zeigen signifikante Veränderungen mit kleiner Effektstärke (|Cohens d| > 0.2) bei einigen Aufgaben. Dabei war eine signifikante Verbesserung bei den Aufgaben zu den Grundrechenarten (15 %), Rechnen mit Potenzen (11 %) und der Proportionalität (15 %) zu erkennen. Bei der Aufgabe zu Bruchgleichungen ließ sich hingegen eine signifikante Verschlechterung (-17 %) feststellen.

Fazit

Erste Ergebnisse der Untersuchungen in Steinfurt haben Defizite der Studienanfänger in zahlreichen Inhalten der Mathematik ergeben, die an der Fachhochschule Münster für das Studium einer Ingenieurwissenschaft vorausgesetzt werden. Der Mathematikvorkurs des Projektes „Rechenbrücke“ hat bereits in einem ersten Durchgang Verbesserungen in einzelnen dieser Sachgebiete bewirkt. Bei anderen Inhalten konnte bisher keine signifikante Verbesserung festgestellt werden. Mögliche Gründe dafür werden im weiteren Projektverlauf genauer untersucht und der Vorkurs wird entsprechend angepasst.

Literatur

Dürrschnabel, K., Klein, H.-D., Niederdrenk-Felgner, C., Dürr, R., Weber, B., & Wurth, R. (2013). Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von MINT oder Wirtschaftsfächern (WiMINT), http://www.hochschuldidaktik.net/documents_public/mak20130201.pdf (abgerufen 27.01.2014).

Gilbert GREEFRATH, Christoph NEUGEBAUER, Münster,
Wolfram KOEPF, Kassel, Georg HOEVER, Aachen

Studieneingangstests und Studienerfolg. Mögliche Zusammenhänge am Beispiel zweier Hochschulen

Tests zu Studienbeginn werden an vielen Hochschulen durchgeführt, um die mathematischen Fähigkeiten der Studienanfänger zu ermitteln. Am Beispiel der Daten von der Universität Kassel und der Fachhochschule Aachen werden Einflüsse von Vorkursen und Zusammenhänge der Ergebnisse von Studieneingangstests und Mathematikklausuren der ersten Semester untersucht. Es zeigt sich ein durchaus unterschiedliches Bild – in Abhängigkeit der konkreten Rahmenbedingungen.

Untersuchung des Vorkurses an der FH Aachen

Die Untersuchung fand ab 2009 im Rahmen eines Vorkurses an der Fachhochschule Aachen statt. Die Teilnahme am zweiwöchigen Vorkurs für Studierende des Informatik- sowie des Elektrotechnik-Bachelor ist freiwillig. Jährlich nehmen zwischen 120 und 240 Studierende an diesen Kursen teil, das entspricht etwa 60 % der Erstsemesterstudierenden. Im Rahmen des Vorkurses werden täglich eine zweistündige Vorlesung und zusätzlich Tutorien angeboten in denen schulmathematische Inhalte aus beiden Sekundarstufen aus den Sachgebieten Analysis und der linearen Algebra bearbeitet werden.

Datenerhebung

Im Rahmen der Untersuchung wurden seit dem Wintersemester 2009/10 zwei 30-minütige Mathematik-Tests ohne Notenrelevanz für die Studierenden durchgeführt. Sie beinhalten auch eine statistische Erhebung zur Art und zum Zeitpunkt des Schulabschlusses, zur schulischen Vorbildung in Mathematik sowie zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht. An den Tests haben bisher 809 Studierende teilgenommen. Test 1 fand jeweils zu Beginn des Vorkurses statt, Test 2 eine Woche nach Ende des Vorkurses zu Beginn der regulären Vorlesungszeit. Außerdem wurden die Klausurergebnisse der Studierenden nach dem ersten und zweiten Semester erhoben. Die ohne Hilfsmittel zu bearbeitenden Mathematik-Tests bestehen aus 16 Items, die sich auf die Vorkurs-Inhalte beziehen. Für Test 1 und Test 2 wurden Parallelaufgaben entwickelt, die es auch erlauben eine Leistungssteigerung während des Vorkurses zu messen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 451–454). Münster: WTM-Verlag

Ergebnisse

Die Ergebnisse beziehen sich zum einen auf den Kenntnisstand zu Beginn des Studiums und zum anderen auf die Veränderungen, die nach Durchführung des Vorkurses festgestellt werden konnten. Studierende mit allgemeiner Hochschulreife lösen im Mittel 54 % der Items richtig, während solche mit Fachhochschulreife durchschnittlich 37 % lösen. Diese Ergebnisse zeigen sich praktisch unabhängig von der Art der Aufgabe. Sie sind lediglich bei Aufgaben mit sehr geringer Lösungsquote wie beispielsweise

- Für welchen Wert von x gilt $\lg(x) = 2$? Dabei ist lg der Logarithmus zur Basis 10.
- Führen Sie folgendes Polynomdivision durch: $(x^3 + 5x^2 + x - 15) : (x + 3) =$

nicht zu beobachten. Ebenfalls untersucht wurde ein möglicher Einfluss der Zeit zwischen dem Schulabschluss und dem Studienbeginn und dem Kenntnisstand zu Beginn des Vorkurses. Hier konnte lediglich eine signifikante schwache negative Korrelation beobachtet werden. Deutliche Unterschiede bei den Vorkenntnissen können für die unterschiedlichen Studiengänge festgestellt werden. Angehende Elektrotechnik-Studierende kommen mit deutlich besseren Vorkenntnissen an die Hochschule als Informatik-Studierende. Die schwachen Leistungen späterer Studienabbrecher zeigen sich bereits zu Beginn des Vorkurses.

Der Vergleich der Ergebnisse vor und nach dem Vorkurs zeigt eine deutliche Verbesserung der Testergebnisse von durchschnittlich 42 % auf 68 % Lösungsquote. Es konnten deutliche Steigerungen z. B. in den Bereichen Potenz- und Logarithmengesetze, Trigonometrie, Polynomdivision sowie Vektorrechnung von schwachen Test 1- zu guten Test 2-Ergebnissen beobachtet werden. Die Studierenden mit Fachabitur konnten im Vergleich durchschnittlich eine größere Steigerung erzielen als solche mit allgemeiner Hochschulreife. Dies lässt sich aber möglicherweise auch auf den Deckeneffekt zurückführen. Auch der Vergleich der Studierenden mit allgemeiner Hochschulreife im Test 2, die am Vorkurs teilgenommen haben, mit denen, die an Test 2 ohne Vorkurs teilgenommen haben, zeigt einen signifikanten Mittelwertunterschied zugunsten der Vorkursteilnehmenden.

Betrachtet man die Klausurergebnisse nach dem ersten und zweiten Semester in Abhängigkeit von der Vorkursteilnahme, so lassen sich auch nach dieser Zeit noch deutlich bessere Ergebnisse der Vorkursteilnehmenden innerhalb der einzelnen Notengruppen der Klausurergebnisse feststellen. Mögliche Korrelationen zwischen dem Ergebnis der Mathematik-Klausur nach dem zweiten Semester und den Tests zu Studienbeginn sowie der Mathematiknote in der Schule zeigen, dass der Test (1 bzw. 2) für den erfolgreichen Abschluss der Mathematikklausur nach dem zweiten Semester offenbar aussagekräftiger ist als die Mathematiknote in der Schule, die Art des Schulabschlusses und die Abschlussnote in Mathematik. Zur Durchschnittsnote des Schulabschlusszeugnisses, Art des Schulabschlusses und dem Einsatz von Taschenrechnern mit Grafik-Funktion in der Schule ist dagegen keine Korrelation nachweisbar.

Untersuchung des Vorkurses an der Universität Kassel

Die Untersuchung in Kassel fand ab 2010 im Rahmen eines sechswöchigen Präsenzkurses bzw. eines vierwöchigen E-learning Kurses für Studierende der Informatik sowie der Elektrotechnik statt. Während die Vorkurse freiwillig besucht werden, ist der Besuch bzw. das Bestehen des anschließenden Mathematiktests nicht freiwillig, sondern in der Prüfungsordnung verankert. Bei Nichtbestehen oder Nichtteilnahme müssen die Studierenden studienbegleitend einen Mathematik-Brückenkurs besuchen und erst nach Bestehen der studienbegleitenden Leistung können sie den Mathematiktest wiederholen. Nur bei Bestehen des Mathematiktests, der beliebig oft wiederholt werden kann, können Veranstaltungen nach dem 2. Semester besucht werden. In Kassel werden die Vorkurse jährlich von knapp 50 % der Erstsemesterstudierenden besucht, wobei sich die Präsenzvariante als die beliebtere abzeichnet. Inhaltlich entsprechen die Sachgebiete denen des Vorkurses aus Aachen.

Datenerhebung

Seit dem Wintersemester 2010/2011 nahmen von den 1034 Studierenden der Informatik und der Elektrotechnik 568 an einem Vorkurs teil. Neben der Bearbeitung mathematischer Aufgaben wurden im Mathematiktest auch statistische Erhebungen z. B. zur schulischen Vorbildung in Mathematik oder zur Belegung eines Mathematik-Leistungskurses durchgeführt. Die Tests wurden bisher von 759 Studierenden bearbeitet. Außerdem wurden die Ergebnisse der Studierenden zu den Klausuren der Analysis I und der Linearen Algebra I erhoben. Die Mathematiktests bestehen aus 30 Items, die sich auf die Vorkurs-Inhalte beziehen. Zur Bearbeitung des 90-minütigen Tests wurden keine Hilfsmittel zugelassen.

Ergebnisse

Die Ergebnisse beziehen sich auf die bereits oben vorgestellten Aspekte. Studierende ohne Vorkursteilnahme schneiden mit Mathematik-Leistungskurs deutlich besser im Mathematiktest ab als Studierende ohne Leistungskurs. Es wurden im Mittel doppelt so viele Aufgaben richtig beantwortet. Auch eine Vorkursteilnahme führt zu signifikant besseren Testergebnissen. So beantworteten Studierende mit Vorkurs im Schnitt 54 %

der Testaufgaben richtig, ohne Vorkurs dagegen liegt die Lösungsquote im Durchschnitt bei 44 %.

Angehende Elektrotechnik-Studierende kommen auch in Kassel mit deutlich besseren Vorkenntnissen an die Hochschule als Informatik-Studierende. Die durchschnittlichen Lösungsquoten im Mathematiktest liegen für die Studierendengruppen bei 48 % bzw. 40 %. Weiterhin wird der Mathematiktest von 51 % der Elektrotechnik-Studierenden, allerdings nur von 37 % der Informatik-Studierenden bestanden. Ohne Vorkursteilnahme liegt die Bestehensquote im Mathematiktest bei 24 % (E-technik) bzw. 18 % (Informatik), mit Vorkurs steigt die Quote auf 71 % bzw. 54 % an. Dies zeigt, dass Studierende der Elektrotechnik in Kassel bedeutend stärker von einem Vorkurs profitieren als Informatik-Studierende. Im Gegensatz zu Aachen zeigen sich in Kassel nur geringfügig bessere Klausurergebnisse nach einer Vorkursteilnahme, dagegen führt ein zuvor belegter Leistungskurs zu signifikant besseren Klausurergebnissen. Eine Korrelation zwischen den Test- und Klausurergebnissen zeigt deutlich, dass der gewählte Test eine gute Prognose für den weiteren Studienerfolg zulässt.

Diskussion

Verglichen mit dem seit vielen Jahren durchgeführten Eingangstest von Knospe (2008) zeigen sich zu Beginn des Vorkurses an der FH Aachen (42 %) und an der Universität Kassel (44 %) vergleichbare durchschnittliche Lösungsquoten. Nach dem Vorkurs steigen die Lösungsquoten aber auf 68 % in Aachen bzw. 54 % in Kassel. Im Unterschied zu Knospe wurden in Aachen und Kassel nur innermathematische Aufgaben und auch solche aus dem Bereich der Sekundarstufe II verwendet. Einige Defizite der Studierenden in hilfsmittelfreien mathematischen Kompetenzen lassen sich also zum großen Teil kurzfristig, im Rahmen eines geeigneten Vorkurses, beheben. Die Studierenden, die in Aachen am Vorkurs teilnahmen, zeigen auch nach einem Jahr noch bessere Ergebnisse in Mathematikklausuren als solche, die nicht zum Vorkurs kommen. Dabei sind allerdings deutliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Studierendenpopulationen (Elektrotechnik und Informatik) zu beachten. Nach den ersten Auswertungen sind die durchgeführten kurzen Tests zu hilfsmittelfreien Basisfertigkeiten aus den Sekundarstufen gute Indikatoren für den Erfolg in Mathematikveranstaltungen an den untersuchten Hochschulen.

Literatur

Knospe, H. (2008). Der Mathematik-Eingangstest an Fachhochschulen in Nordrhein-Westfalen, Proceedings des 6. Workshops Mathematik für Ingenieure, Wismarer Frege-Reihe, Heft 03, S. 6-11.

Birgit GRIESE, Michael KALLWEIT, Bochum

Lerntagebücher in der Studieneingangsphase – eine Bilanz

Lerntagebücher versprechen eine Kombination von Reflexion und Selbstregulation in einem für Forschungszwecke auswertbaren Format. Im Projekt MP²-Mathe/Plus, das Ingenieurstudierende in der Studieneingangsphase beim Lernen von Mathematik begleitet, wurden über Jahre Erfahrungen mit verschiedenen Lerntagebüchern gesammelt. Unsere Bilanz liefert Erkenntnisse über die Akzeptanz in der betrachteten Zielgruppe.

In der Servicelehre wird Mathematik oft als Stolperstein empfunden, an dem insbesondere Studierende der Ingenieurwissenschaften scheitern (Heublein, Richter, Schmelzer & Sommer, 2012). Dies ist bei Betrachtung des Abstraktionsniveaus verwunderlich, denn der bekannte Schulstoff wird nur um wenige Konzepte erweitert. Scheinbar scheitern die Studierenden nicht ausschließlich an fachlichen Unzulänglichkeiten, sondern an mangelnden Lernstrategien und fehlender Selbstregulation. Das Projekt MP²-Mathe/Plus (vgl. Dehling, Glasmachers & Härterich, 2012) nimmt sich dieser Hypothese an. Durch Vermittlung von Lernstrategien und Förderung von Selbstregulation soll der Studienerfolg begünstigt und unnötiger Studienabbruch verhindert werden.

Theoretischer Hintergrund

Selbstregulation verläuft nach Schmitz und Wiese (2006) in drei Phasen, die in einem Kreislauf aufeinander folgen und aufeinander Wirkung haben. In der *präaktionalen Phase* vor dem Lernen prüfen die Lernenden ihre Lernvoraussetzungen, nehmen ihre Ziele in den Blick und planen ihre Vorgehensweise, beeinflusst von den ihnen zur Verfügung stehenden Ressourcen. In der *aktionalen Phase* während des Lernens können die zur Verfügung stehenden Lernstrategien zum Einsatz kommen. Die Lernenden steuern diese bewusst oder unbewusst durch ihre kognitiven und metakognitiven Fähigkeiten und ihre volitionalen Einstellungen. Nach dem Lernen, in der *postaktionalen Phase*, reflektieren die Lernenden (unbewusst) ihr Lernergebnis und ihr Lernverhalten; Emotionen entstehen, die das Urteil bilanzieren. Insbesondere diese Emotionen werden vor der nächsten Lernphase erinnert und beeinflussen so die folgende präaktionale Phase. Um die Interdependenzen dieses Prozesses genauer zu untersuchen, ist eine Datenerhebung notwendig, die sowohl das Lernverhalten selbst als auch dessen Planung und die begleitenden Emotionen aufzeichnet. Lerntagebücher mit einem Frageteil vor und einem nach dem Lernen bieten sich dafür an. Die Lernphase selbst kann nur schwerlich dokumentiert werden, ohne dass sie

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 455–458). Münster: WTM-Verlag

beeinträchtigt oder gar verfälscht würde. Das Lerntagebuch ist an dem Doppelziel ausgerichtet, sowohl die Selbstregulation der Studierenden zu fördern, als auch Daten zu erheben, an denen die Entwicklung ihres Lernverhaltens beforscht werden kann. Die Forschungsfrage lautet daher, welche Form eines Lerntagebuchs diese Anforderungen erfüllt, insbesondere für die Zielgruppe.

Methodologie

In den ersten drei Jahren des Projektes MP²-Mathe/Plus wurden verschiedene Formen von Lerntagebüchern erprobt. Im ersten Jahr enthielten sie Items zu Lernorganisation, Befindlichkeit und Motivation (vgl. Landmann & Schmitz, 2007), mussten täglich ausgefüllt werden, und waren an Lerntagen in etwa 20 Minuten zu bewältigen. Nach Beendigung des Projektes wurden die TeilnehmerInnen nach ihrer Einschätzung der Projektmaßnahmen befragt. Diese und die Evaluation der durch das Lerntagebuch erfassten Daten waren, zusammen mit einem Abgleich der Klausurergebnisse, die Grundlage für Veränderungen des Lerntagebuchs.

Ergebnisse

Die Einschätzung der MP²-Mathe/Plus-Projektmaßnahmen zeigt ein klares Ergebnis: Das Lerntagebuch war die Intervention, die am stärksten abgelehnt wurde. Obwohl das Projekt als Ganzes große Zustimmung bekam (97% würden es überhaupt weiterempfehlen, 91% sogar sehr; Umfrage bei n=38 Studierenden, die an der Mehrheit der Projektmaßnahmen teilgenommen hatten), wurde das Lerntagebuch mehrheitlich abgelehnt (58% würden es insgesamt nicht empfehlen, 26% sogar überhaupt nicht; n=38). Im Detail bemängelten die Studierenden das Lerntagebuch als zu umfangreich (85%; Umfrage bei n=49 Studierenden, die das Lerntagebuch zur Verfügung hatten), zu häufig auszufüllen (86%) und nicht hilfreich für die Strukturierung des Lernens (80%). Auch die Projektgruppe, die keine wöchentlichen Gruppentreffen hatte, und somit eigentlich stärker auf das Lerntagebuch als Hilfe zur Lernunterstützung angewiesen wäre, lehnte es aus denselben Gründen mehrheitlich ab. Überdies blieb die Datenerfassung durch das Lerntagebuch hinter den Erwartungen zurück (Griese, Glasmachers, Kallweit & Rösken, 2012): es konnten keine signifikanten Zusammenhänge zwischen dem Lernverhalten und dem erzielten Klausurergebnis nachgewiesen werden. Dies kann jedoch auch an der geringen Nutzung des Lerntagebuchs, das oft unvollständig ausgefüllt wurde und insgesamt wenig Lernzeit dokumentiert, liegen.

Daher wurde das Lerntagebuch im zweiten Projektjahr auf eine wöchentlich auszufüllende Version (*LearningLog*) umgestellt, das pro Woche etwa

15 Minuten in Anspruch nahm und aus einer Rückschau auf die vergangene Woche, einem Teil zu Befindlichkeit und Motivation sowie einem Teil zur Planung der Folgewoche bestand. Trotz des auf diese Weise stark reduzierten Umfangs wurde das wöchentliche *LearningLog* ebenfalls von den Studierenden abgelehnt. Wieder stieß das Projekt MP²-Mathe/Plus auf große Zustimmung (98% würden es weiterempfehlen, 75% sogar sehr; Umfrage bei n=48 Studierenden), aber das *LearningLog* war die Projektmaßnahme, die am wenigsten geschätzt wurde (67% würden es nicht weiterempfehlen). Die Gründe waren dieselben wie im Jahr zuvor.

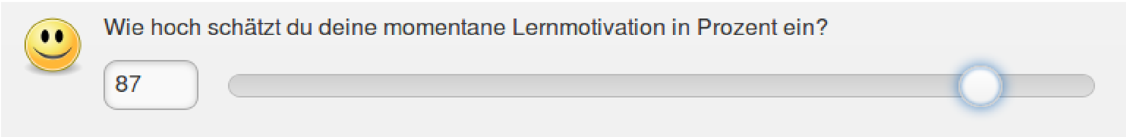


Abbildung 1: Ausschnitt aus dem *LearningLog online*; Smiley variiert je nach Position des Schiebereglers.

Auch im dritten Projektjahr wurde dennoch an der Idee eines Lerntagebuchs im Kern festgehalten, denn der Einfluss auf das Lernverhalten über ein solches Medium, das die Lernenden in individueller Reflexion ihres Verhaltens ausfüllen, kann nur schwer über andere Maßnahmen aufgefangen werden. Also wurde das *LearningLog online* (http://el.rub.de/matheplus/) kreiert, das eine radikale Verkürzung der bisherigen Lerntagebücher darstellt. Als zeitgemäße online-Version wird hier durch einige Taps bzw. Klicks über den Bildschirm eines Smartphones, Tablets oder PCs in Minuten das Lernverhalten geloggt, wahlweise täglich oder wöchentlich. Nach dem Einloggen müssen lediglich drei Schieberegler zu Lernzeit, bewältigtem Arbeitspensum und Lernmotivation (Abbildung 1) positioniert, sowie Zufriedenheit und Anstrengung über eine 4er-Likert-Skala eingeschätzt werden. Danach erhalten die Lernenden sofort kurze Rückmeldungen, z.B. über den Verlauf ihrer Motivation. So sollte der Anspruch, individuelle Selbstreflexion über das eigene Lernverhalten anzuregen, eingelöst werden.

Anzahl der geloggten Tage	49	36	35	33	29	22	21	19	18	14		
Klausurnote	4,0	?	3,3	0,7	2,3	2,0	1,7 2,0 5,0	3,7	2,7	2,7 3,3 3,3	3,7 4,0 5,0	5,0 ?

Tabelle 1: Daten aus dem *LearningLog online*, 14 oder mehr geloggte Tage.

Leider wurde auch diese Version des Lerntagebuchs von den Studierenden nicht angenommen. Nur drei TeilnehmerInnen loggten 35 Tage oder mehr, das entspricht der Hälfte der 10-wöchigen Projektzeit. Es ist kein Zusammenhang zwischen der Anzahl der geloggten Tage und der erreichten Klausurnote (sofern recherchierbar) erkennbar, siehe Tabelle 1. Die Konsequenz aus dieser Tatsache sowie das Evaluationsergebnis, dass männliche Studierende von den Projektmaßnahmen von MP²-Mathe/Plus weniger profitierten als weibliche (Griese, Roesken-Winter, Kallweit, Glasmachers, 2013), führten zu dem Entwurf der MatheMücke, einer Weiterentwicklung des *LearningLog online*, deren Gaming-Elemente motivierend wirken und sie speziell für männliche Ingenieurstudierende attraktiv machen sollten (vgl. Kallweit und Griese, 2014).

Fazit

Der Einsatz traditioneller Lerntagebücher scheint in der Studieneingangsphase, zumindest für die Mehrheit der Zielgruppe des Projekts MP²-Mathe/Plus, Erstsemester der Ingenieurwissenschaften, nicht sinnvoll. Eine Verschiebung des Fokus des eingesetzten Lerntagebuchs, weg von der Dokumentation des Lernverhaltens, hin zu unmittelbarer Rückmeldung und Motivation, kann jedoch Einfluss auf das Lernverhalten oder die Lernzufriedenheit ermöglichen. Dies gilt es in Zukunft weiter zu untersuchen.

Literatur

Dehling, H., Glasmachers, E., & Härterich, J. (2012). Mathematik im Doppelpack. *duz-Akademie*, *4*, 5.

Griese, B., Roesken-Winter, B., Kallweit, M., & Glasmachers, E. (2013). Redesigning interventions for engineering students: Learning from practice. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 5, S. 65). Kiel, Germany: PME.

Griese, B., Glasmachers, E., Kallweit, M., & Rösken, B. (2012). Lerntagebücher als Interventionsinstrument in der Studieneingangsphase. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 313–316). Münster: WTM.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R., & Sommer, D. (2012). *Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen: Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010*. *Forum Hochschule: Vol. 2012,3*. Hannover: HIS.

Kallweit, M., & Griese, B. (2014). Serious Gaming in der Studieneingangsphase - Mit Avataren zum Studienerfolg? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM.

Landmann, M., & Schmitz, B. (2007). Die Kombination von Trainings mit standardisierten Tagebüchern: Angeleitete Selbstbeobachtung als Möglichkeit der Unterstützung von Trainingsmaßnahmen. In M. Landmann & B. Schmitz (Hrsg.), *Selbstregulation erfolgreich fördern. Praxisnahe Trainingsprogramme für effektives Lernen* (S. 151–163). Stuttgart: Kohlhammer.

Schmitz, B., & Wiese, B. S. (2006). New perspectives for the evaluation of training sessions in self-regulated learning: Time-series analysis of diary data. *Contemporary Educational Psychology*, *31*, 64–69.

Matthias GROESSLER, Melanie PLATZ, Jörg RAPP, Stefanie BUCHHEIT, Engelbert NIEHAUS, Landau

Opportunities and constraints of presentation international virtual GDM-conference presentations

1. Introduction

The objective of this article is to present the opportunities and limits of international virtual conference (VC) contribution in the terms of a video presentations and discussions via a video conferencing system. The basis for this article is the positive experience made at international expert meetings in cooperation with the United Nations (UNOOSA) at the UN-Campus in Bonn organized by the University of Koblenz-Landau. The possibilities for international cooperation in the area of mathematics education with developing countries are visualised by the example of the spatial perception of risks. The basic principle of this virtual participation mode of a conference is a shift from high cost solutions to low cost solutions. On the one hand there might be always a drawback regarding to the performance and precision of the transfer of the content of the information and as well the acceptance of the audience might also not be given completely at the beginning as the options of interaction are limited by a certain degree. On the other hand the total cost of ownership can be reduced by a high amount and therefore the number of people who can afford to participate the conference can be increased especially for developing countries. The article will start with a comparison of the requirements and constraints of the conference and the benefits for authors and participants. Afterwards the concept of an open community approach will be presented. The results of the comparison and the ideas of the open community approach will then be summarized in recommendations and a conclusion for a VC mode for the GDM.

2. Requirements and Constraints

Resources, especially financial resources and time resources are always constraints for participants of a conference. Normally the universities or funders have the intention to keep the costs as low as possible. For VCs this objective is more driven by the participants, as they have to provide their time and their technical equipment to take part. Without the necessary technical equipment, i.e. a computer with Internet access and a microphone and speakers, it is not possible to attend a VC.

The time often is also limited by the VC time zone. This time zone has to be chosen in a way, that the majority of the participants can take part in the

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 459–462). Münster: WTM-Verlag

common office hours. If you have different local or regional meeting points all over the world, it is very difficult to determine an optimal presentation times for all time zones. Furthermore, if all participants joint the conference with their own computer, there is no face-to-face contact at all for VCs. The tested concept at the UN-Campus in Bonn used a kind of "Public Viewing" scenario for the participants at different international meeting points. This facilitates at least face-to-face contact with other participants at same meeting points and international connectivity to other regional meeting points. Therefore the aggregation of participants at regional meeting points (RMPs) could seen as a hybrid type of conference, that provides virtual connectivity and the face-to-face contact for the participants living in the same area. But also their resources, needed for regional travelling, could be a limiting factor and have to be considered. Another constraint is the provision of the video presentation material, which has to be available prior to the conference, in the right file format and a sufficient audio and video quality. Participants, who have never created a presentation video before might have problems to deliver the material according to the requirements.

Limitations for VCs are on the one hand a trusted network of people with one participant from the trusted network at least at every RMPs, which might not be the case in every countries that join the VC. The challenge of defining a proper conference time zone also has a security aspect, as only at office hours the security at the RMPs can be assured. Furthermore the number of participants is also limited in order to guarantee an interaction between everybody. For common video conferencing systems the limit is around 25 to 30 participants or RMPs per meeting room or session. If a larger number of participants or RMPs is necessary, the meeting room or session has to be divided. Additionally each meeting point should only have one computer with one sound system running at a time to avoid audio problems like feedback loops etc.

3. Benefits for the author and participants

The videos provided for the VC are at the same time contribution to the conference as a presentation but additionally they contribute to capacity building. As the videos are stored on a video streaming servers (e.g. Youtube), they are still available afterwards for people, who could not join the conference. Additionally, the regional meeting point structure provides face-to-face contact for the participants. Organizationally participants save time and travel expenses, as they could take part even from their home offices. For some participants the virtual participation mode just allows them to join the conference at all, as the threshold of traveling to the conference would have been too high.

Selection of presentations of the conference allows joining in conference tracks or single presentation that are of interest for the participant. This avoids the participation of the whole conference and reduces the huge effort of time and money. In turn the selection of people that at gathering at RMPs with overlapping interest is of great importance to assure the face-to- face communication. Furthermore the authors of the presentation have a benefit because they have to be available for discussions after their video presentations only. This concept could lead to presentations of international experts at the GDM-conferences that would not join the conference due to dominating language German at the conference talks. Nevertheless the long-term impact is the reduction of the carbon footprint by decreasing travel efforts between the participating countries.

The following passage will explain the structure and process of a virtual conference on the example of the UNOOSA expert meeting. As any other conference the framework of a VC is also the agenda. For a VC the agenda must be provided on a homepage, in order to include hyperlinks to the flashmeeting sessions and videos. During the whole conference those hyperlinks guide the participants through the conference in a way that partial participation in single talks and discussions is fully supported. The authors were supported by tutorial for authoring the video presentations or creating screencasts for the video presentations. This support was developed for all common operating systems and created in a way that only Open Source software of freely available software could be used. The slides for the videos are created with common presentation software (e.g. LibreOffice) and then exported as images. Afterwards the author records the audio comments for the slides (in general one audio file per slide) with microphone and audio record software (e.g. Audacity). The exported slides as image foils and the audio files are finally combined in video authoring software and uploaded to the YouTube channel of VC. At the VC the videos are started simultaneously, which is coordinated via chat functionality of the video conferencing system by the organizers. As soon as the videos have stopped the discussions with the authors start in the video conferencing sys- tem. A central server provides access for all kinds of participants, single users, RMPs and local meeting points. So far, the two browser-based conferencing systems Flashmeeting and OpenMeeting were tested.

4. Recommendations

Derived from the experience of the conducted VC for UNOOSA it can be derived that a conference track for scientists that have established a trusted network of collaboration (e.g. in the area of spatial sense and risk perception) has been created. This trusted network can help to create a RMP at the GDM conference and in countries that would like to take part at the GDM conference. Furthermore, a virtual presentation is always better than no participation from developing countries, as the possibility to interact with scientists of the GDM is facilitated. Virtual sessions at GDM complement scientific face-to-face collaboration and lead to more interaction in the future. Another recommendation derived from the experience at the UNOOSA VCs is to extend discussion time to 2:1 for direct contact to the researchers from developing countries at GDM, that means for example ten minutes presentation and 20 minutes discussion with the authors afterwards. Furthermore the participants at the GDM conference had to be aware of the fact that the can join the VC just by coming to the announced room for the presentation. If participants do not have prior experience in VCs with RMPs they do not know that the announced conference room is the Regional Meeting Point they can go to similar to other presentations/talks at the GDM conference.

5. Conclusion

The following steps towards sustainable VCs have already been reached so far. An IT-infrastructure and collaborative environment on the basis of Open Source has been created and verified as a structure for VCs. A thematic conference track ("Sektion") will be announced for Mathematics Education Subject for international collaboration. The track chair will organize an international RMP with 5-10 participants. Additionally there must be suggestions for the conference fee equivalent to the teacher's day fee for presentations at the international RMP and respectively it should be free for virtual participants at the virtual session of the conference. Furthermore there should be separate flashmeeting rooms for special interest groups and the track language should be English.

References

[1]http://at6fui.weebly.com (Date: 23.03.2014; Time: 10:00am)

[2] Anderson, T. D (1996): The Virtual Conference: Extending Professional Educati- on in Cyberspace Article Chesapeake VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE)

[3]Çakir A. E.(2002): Virtual communities - a virtual session on virtual conferences, Behaviour & Information Technology, DOI:10.1080/0144929021000048439

Svenja GRUNDEY, Hamburg, Christine KNIPPING, Bremen

Beweisvorstellungen und deren Einfluss auf das eigenständige Beweisen

Begründungen und Beweise spielen in der Mathematik und in den heutigen Bildungsplänen eine zentrale Rolle. Trotz dieser Bedeutung zeigen viele mathematikdidaktische Studien, dass Lernende große Schwierigkeiten mit dem mathematischen Argumentieren und Beweisen haben (z.B. Healy & Hoyles 1998, Reiss, Klieme & Heinze, 2001) und es wird versucht, Ursachen für die beobachteten Schwierigkeiten zu identifizieren. In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen, welchen Einfluss Beweisvorstellungen auf eigenständige Beweisprozesse von Lernenden haben können. Dies wird exemplarisch anhand prototypischer Fallbeispiele erläutert. Weiterhin wird ein theoretisches Konzept vorgestellt, welches einen möglichen Erklärungsansatz für beobachtete Schwierigkeiten aber auch für gelungene eigenständige Beweisprozesse liefert.

Die im Folgenden dargestellten Daten wurden im Rahmen einer Studie erhoben, bei der, angelehnt an das Dortmunder Modell der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Prediger et al. 2012), ein Designexperiment zur Förderung eines differenzierten Beweisverständnisses entwickelt und empirisch überprüft wurde.

Zur „Problematik der Sichtbarkeit“

Hemmi (2006) entwickelt einen theoretischen Ansatz, um Probleme beim Lehren und Lernen mathematischer Beweise zu erklären. Grundlage dieses Ansatzes ist die Annahme, dass mathematisches Beweisen ein Wechselspiel zwischen Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit darstellt. Unter Sichtbarkeit von Beweisen versteht Hemmi (2008), dass die Aufmerksamkeit explizit auf die Bedeutung mathematischer Beweise, etwa ihre logische Struktur oder Funktionen gerichtet wird. Damit wird der Fokus auf die Beweisebene gelegt, während die Inhalte in den Hintergrund rücken. Gleichzeitig sollen durch mathematische Beweise Inhalte, d.h. mathematische Theoreme und mögliche Zusammenhänge zwischen Theoremen vermittelt werden. Dabei rückt die Beweisebene in den Hintergrund. In diesem Fall findet eine Fokussierung auf die Inhaltsebene statt und Beweise werden hauptsächlich als Werkzeug betrachtet. Das Wechselspiel von Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit ist für Hemmi nicht nur charakteristisch für mathematische Beweise, sondern auch notwendig in mathematischen Beweisprozessen. Die Schwierigkeit für Lernende besteht ihrer Auffassung darin, dass ihnen dieses Wechselspiel häufig verborgen bleibt. Während eigener Beweisprozesse

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 463–466). Münster: WTM-Verlag

können daher Brüche und Probleme bei den notwendigen Wechseln zwischen der Beweis- und Inhaltsebene auftreten. Dies kann sowohl zu Schwierigkeiten bei der Entwicklung eines differenzierten Beweisverständnisses als auch zu Schwierigkeiten bei der Produktion eigenständiger Beweise führen. Im Folgenden werden anhand prototypischer Fallbeispiele mögliche Brüche in Beweisprozessen, wie auch gelungene Beweisprozesse beschrieben und mit Hilfe des theoretischen Ansatzes von Hemmi erklärt.

Konzeption des Designexperiments und Erhebung der Daten

Im Zentrum des Designexperiments zum Themenbereich „Analysis" stand ein Zyklus aus Beweisrezeption, Beweisdiskussion und Beweiskonstruktion. In der Studie wurde dieser Zyklus insgesamt drei Mal durchlaufen. Ausgangspunkt des Designexperiments waren bereits vorhandene Beweisvorstellungen der Lernenden. Am Ende des Designexperiments wurden ihre Vorstellungen erneut erhoben, um mögliche Veränderungen rekonstruieren zu können.
Anhand fiktiver Schülerbegründungen einer Aussage aus dem Bereich der Analysis sollten die Lernenden in der ersten Beweisrezeptionsphase für charakteristische Eigenschaften mathematischer Beweise sensibilisiert werden und sich ihrer eigenen Beweisvorstellungen bewusst werden. Die anschließende Beweisdiskussionsphase anhand der zuvor behandelten Schülerbeweise diente der expliziten Thematisierung charakteristischer Aspekte von Beweisen innerhalb der Klasse. Den Abschluss des ersten Zyklus bildete eine Phase, in der die Lernenden eigenständig eine mathematische Aussage beweisen sollten. Diese eigenständigen Beweise dienten im Anschluss als Grundlage für den zweiten Durchlauf.
Das Designexperiment umfasste 6 Unterrichtsstunden und wurde in zwei deutschen Klassen der Jahrgangsstufe 10 und zwei kanadischen Highschool-Kursen von den jeweiligen Lehrpersonen unterrichtet. Neben den schriftlichen Aufzeichnungen der Lernenden wurden zudem Audioaufnahmen während der Beweiskonstruktionsphasen gemacht. Beide Arten von Daten erlauben Einblicke in das Zusammenspiel von Beweisvorstellungen und Beweiskompetenzen, die ein zentrales Forschungsinteresse der durchgeführten Studie darstellen.

Wie bei Grundey (2010) beschrieben, verfügen die meisten Lernenden in dieser Studie zu Beginn des Designexperiments über eine algebraisch-mechanische Beweisvorstellung. In dieser Vorstellung werden durch Formeln und algebraische Umformungen mathematische Aussagen begründet und verifiziert. Auch Allgemeingültigkeit stellt ein wesentliches Kriterium für Beweise nach Auffassung der Lernenden dar.

Ergebnisse

Das erste Beispiel eines eigenständigen Beweises bezieht sich auf die Aussage, dass jede ganzrationale Funktion geraden Grades mindestens eine Extremstelle besitzt. Etliche Lernende der Studie begegnen auf der Beweisebene der Schwierigkeit, einen formal-algebraischen Ansatz für eine Polynomfunktion geraden Grades zu finden und die 1. Ableitung von dieser Funktion zu bilden. Ein solches Vorgehen entspricht ihrer Vorstellung von Beweisen, ist jedoch für sie algebraisch schwer realisierbar. Einige Lernende weichen daher aus und entwickeln stattdessen auf der inhaltlichen Ebene eine logisch korrekte Argumentation, die auf einer visuellen Vorstellung von Polynomen geraden Grades beruht. Da jedoch ihre formal-algebraischen Beweisvorstellungen an dieser Stelle des Lernprozesses noch sehr dominant sind, lehnen es die Lernenden ab, ihre korrekte Argumentation in narrativer Form zu notieren, wie der folgenden Interviewausschnitt aus einer kanadischen Klasse verdeutlicht.

> *Lehrerin: Yes. Write down in words what you just told me.*
> *Trevor: I can't.*
> *Lehrerin: Explain what you explained to me to Connor and Connor will write as you said.*
> *Trevor: Yeah but I can't...*

An dieser Stelle des Beweisprozesses wirken sich Trevors Beweisvorstellungen hinderlich auf seinen eigenständigen Beweisversuch aus. Obgleich er auf der Inhaltsebene durchaus tragfähige Beweisideen entwickelt, lässt er es aufgrund seiner Beweisvorstellungen nicht zu, diese zu realisieren.

Ein vergleichbares Beispiel findet sich bei dem Beweis- bzw. Widerlegungsversuch einer falschen Aussage. Die Lernenden sind angehalten zu beweisen bzw. zu widerlegen, dass das Schaubild eines Polynoms geraden Grades mindestens einmal die x-Achse schneidet. Ähnlich wie beim ersten Fallbeispiel gelangen die Lernenden auch hier mit Hilfe einer visuellen Vorstellung auf der Inhaltsebene zu einer Lösung. Sie stellen fest, dass die behauptete Aussage falsch ist. Auch an dieser Stelle beeinflussen jedoch die Beweisvorstellungen das weitere Vorgehen einiger Lernender. Für sie steht die Verwendung von Beispielen im Konflikt zu ihrer Auffassung von Beweisen als allgemeingültige Begründungen. Die Lernenden sind verunsichert, wie sie die Falschaussage widerlegen können. Dies zeigt sich etwa in dem folgenden Interviewausschnitt eines kanadischen Kurses:

> *Trevor: Is that good enough though to say like if* ***you show one example that doesn't work?***
> *Lehrerin: You need to.*
> *Trevor: Maybe that's a problem.*

In einem der kanadischen Kurse wurde die Möglichkeit der Widerlegung einer Aussage durch ein Gegenbeispiel explizit von der Lehrperson in der Beweisdiskussionsphase thematisiert (Grundey, 2011). Diese Lernenden verfügten neben einer Herangehensweise auf der Inhaltsebene ebenfalls über das notwendige Wissen auf der Beweisebene und führten ohne Zögern ein Gegenbeispiel zur Widerlegung an. Aufgrund der Passung beider Ebenen, konnte in diesem Fall ein positives Wechselspiel zwischen Inhalts- und Beweisebene festgestellt werden.

Fazit

Es scheint hilfreich zu sein, dass Lernende, besonders auch Lehrpersonen, ein Bewusstsein für das beschriebene Wechselspiel zwischen Beweis- und Inhaltsebene entwickeln, um beispielsweise bei Brüchen in Beweisprozessen die Ebene, auf der die Schwierigkeiten auftreten, zu identifizieren. Darauf aufbauend können gezielte Hilfestellungen auf der jeweiligen Ebene gegeben und gleichzeitig das meist unbewusst stattfindende Wechselspiel zwischen Inhalts- und Beweisebene explizit thematisiert werden. Eine weitere Notwendigkeit im Unterricht scheint darin zu liegen, den Fokus verstärkt auf die Beweisebene (z.B. auf Funktionen oder die logische Struktur) zu legen, um ein differenzierteres Beweisverständnis bei Lernenden zu fördern, welches nicht auf eine algebraische Darstellung beschränkt ist.

Literatur

Grundey, S. (2010). Eigenständige Beweisaktivitäten im Mathematikunterricht – Schülervorstellungen und Kompetenzen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010,* 361–364, Münster, WTM-Verlag.

Grundey, S. (2011). Lehrerhandeln in Beweisprozessen: auf die richtige Balance kommt es an. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011,* 323–326, Münster, WTM-Verlag.

Healy, H. & Hoyles, C. (1998). Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on a Nationwide Survey. 1998.

Hemmi, K. (2006). Approaching proof in a Community of Mathematical Practice. Stockholm, 2006.

Hemmi, K. (2008). Students‘ encounter with proof: the condition of transparency. In: *ZDM - The International Journal on Mathematics Education 2008, 40,* 413–426.

Prediger, S.; Link, M.; Hinz, R.; Hussmann, S.; Ralle, B.; Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: *MUN –Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 2012, 65 (8),* 452–457.

Reiss, K.; Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. *Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht.

Maike HAGENA, Kassel

„Wenn 1 m² plötzlich 100 cm² sind" – Studierende beim Umrechnen von Flächeninhaltsangaben

Das Umrechnen von Größenangaben ist ein Element nationaler sowie internationaler Curricula und ist dem Inhaltsbereich Größen und Messen zu zuordnen. Verschiedene Studien weisen auf Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern beim Umrechnen von Größenangaben hin, weshalb im Rahmen einer empirischen Studie untersucht wurde, welche Defizite Lehramtsstudierende insbesondere beim Umrechnen von Flächeninhaltsangaben aufzeigen.

1. Umrechnen von Größenangaben

Im Laufe der Grundschulzeit erwerben Schülerinnen und Schüler Fertigkeiten im Umgang mit Größen. Zu diesen Fertigkeiten zählt auch das Umrechnen von Größenangaben, welches auf Einsicht in die einem Größenbereich zugrunde liegenden Relationen zwischen einzelnen Größeneinheiten beruht. Bedeutung kommt dieser Fertigkeit dabei insbesondere deshalb zu, da diese als ein Indikator für das Besitzen von Größenvorstellungen, einem zentralen Element kompetenzorientierten Mathematikunterrichts (Franke & Ruwisch, 2010), anzusehen ist. Ebenso hat sich das Umrechnen in der Vergangenheit als notwendige Voraussetzung für das erfolgreiche Bearbeiten komplexerer Aufgaben wie etwa von Modellierungsaufgaben bewiesen (Hagena, 2013). Es wird erwartet, dass Schülerinnen und Schüler Ende der 4. Jahrgangsstufe das Umrechnen von Größeneinheiten einfacher Größenbereiche, wie etwa das Umrechnen von Zentimeter in Meter, sicher beherrschen, und dass diese Fertigkeit spätestens zu Beginn der Sekundarstufe I auf abgeleitete Größenbereiche wie Flächeninhalt und Volumen übertragen werden kann. Dies gelingt Schülerinnen und Schülern jedoch aus verschiedenen Gründen häufig nicht. Zum einen, da Schülerinnen und Schüler die spezifische Struktur, die dem Größenbereich Flächeninhalt unterliegt, nur schwer erfassen können (Outhred, 2013), zum anderen, da Lernende bereits beim Umrechnen von Größenangaben einfacher Größenbereiche, wie etwa beim Umrechnen von Längenangaben, scheitern (Kees Buijs, 2012). Als mögliche Erklärung für diese Lernschwierigkeiten wird oftmals angeführt, dass Lehrende nicht mit Lernschwierigkeiten in diesem spezifischen Teilbereich rechnen würden (Wilson & Osborne, 1992). Einen weiteren Erklärungsansatz sollen empirische Ergebnisse der im Folgenden dargelegten Studie anbieten, die zeigen werden, dass selbst angehende Lehrkräfte Defizite beim Umrechnen von Größenangaben aufweisen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 467–470). Münster: WTM-Verlag

2. Forschungsfragen

Im Rahmen einer empirischen Studie werden die Defizite angehender Lehrkräfte beim Umrechnen von Flächeninhaltsangaben untersucht. In diesem Zusammenhang wurde innerhalb einer ersten Erhebung folgenden Forschungsfragen nachgegangen:

FF Ia. Können Lehramtsstudierende Flächeninhaltsangaben umrechnen?

FF Ib. Welche Schwierigkeiten treten hierbei auf?

Anschließend wurde im Rahmen einer zweiten Erhebung eine Interventionsstudie zur Förderung der Umrechnungsfertigkeiten von Studierenden konzipiert, die folgende Forschungsfrage zu beantworten versucht:

FF IIa. Können Lehramtsstudierende nach einer kurzen Intervention Flächeninhaltsangaben erfolgreicher umrechnen als vor der Intervention?

3. Erhebung I

Zur Beantwortung der Forschungsfragen, die der ersten Erhebung zu Grunde liegen, wurden Größenvorstellungen von 83 Studierenden des Lehramts an Grundschulen sowie von 45 Studierenden des Lehramts an Haupt- und Realschulen im Rahmen einer Mathematikfachvorlesung bezüglich der Größenbereiche Länge und Flächeninhalt erhoben. Die Studierenden erhielten dabei neben Testitems, die das Umrechnen von Größenangaben verlangten, ebenso Testitems, die Wissen über Stützpunktvorstellungen als auch die Fertigkeit des Schätzens überprüften. Für die Bearbeitung dieser Items stand den Studierenden die Nutzung eines Taschenrechners frei.

Die Auswertungen der Testitems zum Umrechnen von Größenangaben (10 Items (5 Items zum Umrechnen von Längenangaben, 5 Items zum Umrechnen von Flächeninhaltsangaben), $\alpha = .84$) ergaben, dass in beiden Studiengängen lediglich etwas mehr als die Hälfte der Studierenden in der Lage waren, alle fünf Items zum Umrechnen von Längenangaben erfolgreich zu bearbeiten. Eine Auswertung der fünf Items zum Umrechnen von Flächeninhaltsangaben, bezugnehmend auf FF Ia., offenbarte noch weitaus größere Defizite – insbesondere bei den Studierenden des Grundschullehramts: Lediglich 9 von 83 Grundschullehramtsstudierenden konnten alle fünf Items richtig lösen (siehe auch Tabelle 1).

Anzahl richtig gelöster Items (Flächeninhalt)	*Lehramt Grundschule (gesamt 83)*	*Lehramt Haupt- und Realschule (gesamt 45)*
0	40	4
1	14	5
2	4	5
3	10	1
4	6	8
5	9	22

Tabelle 1: Anzahl richtig gelöster Items beim Umrechnen von Flächeninhaltsangaben

Gleichzeitig konnte festgestellt werden, dass Studierende des Haupt- und Realschullehramts signifikant besser bei der Bearbeitung der Items zum Umrechnen von Flächeninhaltsangaben abschneiden, als Studierende des Grundschullehramts ($t(126)=-6.3$; $p<.000$; $d=1.17$). Mögliche Erklärungsansätze für das Abschneiden der Grundschullehramtsstudierenden lassen sich nicht, wie vielleicht zunächst zu vermuten, durch die allgemeine mathematische Begabung dieser erklären. So zeigten sich keine signifikanten Korrelationen zwischen der Durchschnittsnote der Studierenden aus den vorangegangenen Mathematikfachvorlesungen und dem Abschneiden der Studierenden beim Test zum Umrechnen von Flächeninhaltsangaben. Allerdings konnte, bezugnehmend auf FF Ib., im Rahmen der Suche nach möglichen Ursachen für Schwierigkeiten beim Umrechnen festgestellt werden: Studierende des Grundschullehramts entscheiden sich im Gegensatz zu den Studierenden des Haupt- und Realschullehramts fälschlicherweise und kontinuierlich für diejenigen Umrechnungsfaktoren, die aus dem Größenbereich Länge bekannt sind.

4. Erhebung II

Im Rahmen einer zweiten Erhebung wurden 106 Studierende des Grundschullehramts in zwei nach Leistung parallelisierte Gruppen eingeteilt. Während die Studierenden der Kontrollgruppe eine einstündige Intervention zum Thema Bruchrechnung erhielten, nahmen die Studierenden der Versuchsgruppe an einer einstündigen Intervention teil, in welcher die dem Größenbereich Flächeninhalt zugehörigen Umrechnungsfaktoren an geeigneten Materialien erarbeitet wurden. Ein unmittelbar nach der Intervention durchgeführter Posttest sowie ein drei Monate später erfolgter Follow-Up-Test wurden eingesetzt, um untersuchen zu können, ob sich die Umrechnungsfertigkeiten der Studierenden bezüglich des Größenbereichs Flächeninhalt durch eine kurze Intervention fördern lassen (siehe FF IIa.). Es hat sich gezeigt, die Studierenden der Versuchsgruppe schneiden beim Umrechnen der Flächeninhaltsangaben signifikant besser ab als die Studierenden der Kontrollgruppe ($t(104)=-4.1$; $p<.000$; $d=0.8$). Dennoch konnten lediglich 16 von 55 Studierenden der Versuchsgruppe alle Items, die das Umrechnen von Flächeninhaltsangaben verlangten, richtig lösen.

5. Diskussion und Ausblick

Insgesamt zeigen die Studierenden beider Erhebungen keine befriedigen Ergebnisse beim Umrechnen. Obwohl die Ergebnisse der Interventionsstudie positiv stimmen, muss aufgrund der Tatsache, dass einige Studierende nach wie vor Schwierigkeiten beim Umrechnen von Flächeninhaltsangaben zeigen, die Frage aufgeworfen werden, ob es nicht noch einen effektiveren Ansatz gibt, um die Umrechnungsfertigkeiten der Studierenden bezüglich des Größenbereichs Flächeninhalt zu fördern. Ein möglicher Ansatz könnte sein, Lernende dazu anzuleiten, beim Umrechnen das eigene Wissen über Stützpunktvorstellungen hinzuziehen.

Zum jetzigen Zeitpunkt lässt sich festhalten, dass das Umrechnen von Größenangaben selbst für Studierende nicht trivial zu sein scheint und, dass die Größenvorstellungen von Lernenden vermutlich bereits in der Schule anders gefördert werden müssen. Ein möglicher Ansatz könnte hierbei der Aufbau sowie das Einbeziehen eines umfangreichen Repertoires an Stützpunktvorstellungen sein.

Literatur

Buijs, K. (2012). Gaps between the informal and formal knowledge of 13-14 years old pre-vocational students – and how to bridge them. Online verfügbar unter: http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0844.pdf.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Verlag.

Outhred, L. et al. (2003). Count me into measurement. A program for the early elementary school. In D. Clements & G. Bright (Hrsg.), *Learning and teaching measurement (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (S.81-100). Reston, VA: NCTM.

Hagena, M. (2013). „Das Backsteinhaus ist ungefähr 3,875 m hoch.“ Zum Einfluss der Größenvorstellungen auf die Modellierungskompetenz von Studierenden. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Münster: WTM Verlag.

Wilson, P.A. & Osborne, A. (1992). Foundational ideas in teaching about measure. In T.R. Post (Hrsg.), *Teaching mathematics in grades K-8. Research based methods* (S.89-121). Needham Heights, Massachusetts: Allyn & Bacon.

Heike HAHN, Erfurt

Wie fördern Grundschullehrerinnen und -lehrer die allgemeinen mathematischen Kompetenzen?

Anlass der Interviewstudie

Die 2004 erschienenen Bildungsstandards für den Mathematikunterricht der Primarstufe (KMK 2004) und in deren Folge die länderspezifischen Lehr- bzw. Bildungsplänen betonen explizit die Bedeutung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Demgegenüber weisen internationale und nationale Studien der letzten Jahre auf Defizite bei diesen Kompetenzen – v. a. beim Problemlösen und Argumentieren – hin (Walther 2007).

Fast 40 Jahre zuvor hat Heinrich Winter bereits auf den Wert allgemeiner Lernziele für den Mathematikunterricht hingewiesen und eine Liste mit zielfördernden Schüleraktivitäten vorgelegt (Winter 1975, S. 109ff).

Die neuerliche Debatte um das Verhältnis zwischen fachbezogenen und übergreifenden Lernzielen in Verbindung mit der Tatsache, dass die Bildungsstandards seit einer Dekade in Kraft sind, war Anlass für deine Interviewstudie mit Grundschullehrkräften. Ihr Ziel bestand darin, von den Unterrichtsexpertinnen und -experten zu erfahren, welche Impulse von den Kompetenzbeschreibungen für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichtes ausgehen. In der Untersuchung ging es einerseits um das Wissen der Lehrkräfte zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen und andererseits um ihre Beschreibungen kompetenzfördernder Unterrichtsprozesse. 85 zufällig ausgewählte Mathematiklehrkräfte aus verschiedenen neuen Bundesländern wurden so im Frühsommer 2013 mit Hilfe eines Leitfadeninterviews befragt. Zur Auswertung wurden Transkriptionstexte erstellt, die entlang der Struktur der Fragen nach inhaltlich vergleichbaren Aussagen analysiert wurden, um Kriterien entwickelnd Schwerpunkte herauszuarbeiten. Im Weiteren werden davon einige ausgewählte Ergebnisse vorgestellt.

Ausgewählte Ergebnisse der Befragung

Zu Beginn der Befragung wurden die Lehrerinnen und Lehrer gebeten, ihr Bild von einem guten, qualitätsvollen Mathematikunterricht zu beschreiben. Die Antwortliste enthält mit den häufigsten Aussagen wie ´Freude an Mathematik empfinden´, ´auf das Leistungsvermögen abgestimmte Lernangebote unterbreiten´, ´kognitiv aktivierende Lernaufgaben stellen´, ´auf Verstehen der Unterrichtsinhalte gerichtete Unterrichtsprozesse gestalten´ zahlreiche Aspekte eines kompetenzfördernden Unterrichts. Befragt da-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 471–474). Münster: WTM-Verlag

nach, welche Rolle dabei die allgemeinen mathematischen Kompetenzen spielen, wurden die auch im Alltag gebräuchlichen Begriffe des Kommunizierens, Argumentierens und Problemlösens genannt. Aus den Erläuterungen der Interviewten wird weiterhin deutlich, dass sie den Wert solcher Schüleraktivitäten wie etwas erklären, ein Vorgehen beim Rechnen oder Zeichnen beschreiben, Aufgaben oder Rechenwege miteinander vergleichen oder eine Begründung abgeben ebenso wertschätzen und umsetzen, wie die Ausprägung einer Schülerhaltung, sich komplexeren, schwierigeren Aufgaben zuzuwenden. Viele Lehrkräfte bestätigen, dass diese Unterrichtselemente zu ihrem festen Repertoire gehören. Problemlösen wird mit der Bearbeitung von Sachaufgaben interpretiert, d. h. Sachaufgaben werden als Problemaufgaben wahrgenommen. Demgegenüber spielen das Modellieren und Darstellen in den Lehreräußerungen kaum eine Rolle.

Im Zusammenhang mit der Überlegung, dass die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen eine langfristige Aufgabe ist, war die Frage von Interesse, inwiefern die Anforderungen an das Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen usw. im Laufe der Grundschulzeit gesteigert werden. Die Antworten spiegeln im Wesentlichen folgende Modellvorstellungen wieder: Etwa ein Fünftel der Befragten meint, dass die allgemeinen mathematischen Kompetenzen unterschiedlich schwierig sind und nehmen daher eine Stufung vor: Während Rechenwege oder geometrische Muster ab der ersten Klassenstufe von Schülerinnen und Schülern beschrieben und Äußerungen von Mitschülern aufgenommen werden können, sind das Problemlösen und Begründen von Aussagen oder Entdeckungen so anspruchsvoll, dass es eher den Klassen 3 und 4 vorbehalten ist. Eine andere Vorstellung geht davon aus, dass dem konzentrischen Aufbau mathematischer Inhalte mit dem größer werdenden Zahlenraum, der Zunahme zu beherrschender Rechenoperationen usw. eine Anforderungssteigerung bei den allgemeinen mathematischen Kompetenzen immanent ist. Diese Vorstellung wird ebenso von einem Fünftel der Lehrkräfte vertreten. Mit den geschilderten Beispielen lassen sich diese Vorstellungen belegen: Beim Kommunizieren und Argumentieren werden über den zunehmenden Umfang der Schüleräußerungen während der Grundschulzeit auch ihr Verallgemeinerungsgrad sowie das Einbeziehen von Gegenbeispielen in eine Argumentation genannt, wozu v. a. Dritt- und Viertklässler in der Lage sind. Bzgl. des Bearbeitens von Sachaufgaben werden eine zunehmende Anzahl an Rechenschritten, ein vermehrtes eigenständiges Formulieren von Fragen sowie der Gebrauch des heuristischen Hilfsmittels Skizze angegeben. Die Mehrheit der Interviewten bekundet bei dieser Frage jedoch Bedarf, Ansatzpunkte für eine Anforderungssteigerung bei den allgemeinen mathematischen Kompetenzen kennen lernen zu wollen und wünscht sich von mathematikdidaktischen Forschungsergebnissen entsprechende Impulse.

Werden die Äußerungen der Lehrkräfte zur Förderung des Kommunizierens und Problemlösens mit den in den Bildungsstandards angegebenen konkretisierenden Erläuterungen in Beziehung gesetzt, ist beispielsweise Folgendes festzustellen: Problemhaltige Aufgaben werden von Lehrkräften mit Umschreibungen wie ´komplexe Sachaufgaben´, ´Aufgaben mit mehreren Rechenschritten´, ´Aufgaben ohne Fragestellung´, ´von Schülern selbst verfasste Rechengeschichten´ charakterisiert. Beim Kommunizieren wird die Formulierung der Bildungsstandards ´Beschreiben von Vorgehensweisen in Verbindung mit dem Verstehen und Reflektieren von Lösungswegen´ genauso im Gespräch wiedergegeben wie auch der Gebrauch von Fachbegriffen. Dem gemeinsamen Bearbeiten von Aufgaben, bei dem Verabredungen getroffen und eingehalten werden, wird in den Interviews die unterrichtsmethodische Form der Partner- und Gruppenarbeit zugeordnet. Mit diesen Organisationsformen ist die Erwartung verbunden, beim Miteinanderarbeiten die kommunikativen Fähigkeiten von Schülern implizit zu fördern.

Inhalts- und prozessbezogene mathematische Kompetenzen erfordern ein Austarieren ihrer Akzente bei Beachtung ihres spezifischen Bildungswertes. Lehrkräfte wurden im Interview befragt, inwiefern diese Überlegung in die Unterrichtsplanung integriert wird. Die Befragungsergebnisse verdeutlichen, dass Lehrende die Konzeption mathematischer Lehr-Lern-Prozesse primär an den vertrauten und tradierten Mathematikinhalten ausrichten. Ansatzpunkte zur Förderung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen würden sich meist aus der Situation ergeben und brauchen daher nicht bewusst geplant zu werden. Nur einige Lehrerinnen und Lehrer sagen, eine Mathematikstunde pro Woche für das Bearbeiten von Sachaufgaben zu nutzen und deshalb besonders das Problemlösen zu fördern.

Im Interview spielte auch die Frage nach dem Wert von Fortbildungen eine Rolle. Gründend auf der Einsicht der letzten Jahre, dass eine Weiterentwicklung des Unterrichtes auch von der Bereitschaft der Lehrerinnen und Lehrer abhängt, sich im Beruf weiterzubilden (vgl. Müller, Steinbring & Wittmann 2002, S. 81), bestätigen die Befragten, regelmäßig an zentralen oder innerschulischen Fortbildungen teilzunehmen. Zentrale Veranstaltungen thematisieren in ihrer Wahrnehmung selten, wie Problemlösen, Kommunizieren oder Argumentieren im Unterricht gefördert werden können. Kommen die allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den Veranstaltungen zur Sprache, sind sie meist in eine Aufgabenanalyse eingebunden. Viele Lehrerinnen und Lehrer berichten, vor der Aufgabe zu stehen, einen schulinternen Lehrplan zu konzipieren, der auch die allgemeinen mathematischen Kompetenzen ausweist. Dieser Auftrag ist mit Ratlosigkeit gegenüber der Umsetzung verbunden. Zudem wird kundgetan, dass innerschulisch die Themenwahl für Fortbildungen von anderen Prioritäten bestimmt wird.

Zusammenfassung

Ein erster Einblick in die Ergebnisse einer Befragung von Grundschullehrkräften zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen zeigt, dass die im Alltag gebräuchlichen Bezeichnungen des Problemlösens, Kommunizierens und Argumentierens mit konkretisierenden Vorstellungen zur Kompetenzentwicklung verbunden werden können. Demgegenüber gehören für das Modellieren und Darstellen kaum zum Repertoire.

Die präzisierenden Erläuterungen zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen (KMK 2004) können z. T. mit Beispielen aus dem täglichen Mathematikunterricht illustriert werden. Zudem äußern Lehrkräfte die Erwartung, weitere Kriterien und Anregungen kennen zu lernen, mit denen sie im Alltag die allgemeinen mathematischen Kompetenzen gezielt entwickeln und als Beurteilungskriterien zur Einschätzung entsprechender Schülerleistungen nutzen können. Lehrkräfte wünschen sich erprobte Vorschläge für eine anforderungsgestufte Progression der Kompetenzentwicklung in den Klassenstufen der Grundschule.

Im Sinne einer berufsbegleitenden Qualifizierung kann festgehalten werden, dass die Interviewten eine hohe Fortbildungsbereitschaft signalisieren, jedoch Angebot und Bedarf passgenauer aufeinander abzustimmen sind.

Literatur

Müller, G., Steinbring, H. & Wittmann, E. (2002). Jenseits von PISA: Bildungsreform als Unterrichtsreform. Seelze: Kallmeyer.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. München & Neuwied: Luchterhand.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. In *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 7 (4), S. 106 – 116

Walther, G. u.a. (2007). Bildungsstandards für die Grundschule. Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen Verlag

Tanja HAMANN, Hildesheim

„Nieder mit alef“? – Ein Projekt zur Neuen Mathematik in der Grundschule

Den Empfehlungen der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968, die die Grundlage für die Einführung der Neuen Mathematik an westdeutschen Schulen darstellten, war bereits eine etwa 15 Jahre währende Phase reformatorischer Überlegungen zu den Inhalten des Mathematikunterrichts in den USA wie parallel in Europa vorausgegangen (Moon (1986), 47). Offiziell wurden diese Bemühungen in Europa mit dem OEEC-Treffen in Royaumont im Jahr 1959; ein früher Versuch der Umsetzung in Deutschland fand ab 1966 in Form des *Frankfurter Projekts* unter der Führung von Heinrich Bauersfeld statt. Ein den neuen Zielen, die im Zuge der inhaltlichen Neuorientierung formuliert wurden, entsprechend entwickelter Lehrgang wurde in mehreren Durchgängen an einer Reihe hessischer Grundschulen erprobt, mehrmals evaluiert und schließlich in einer überarbeiteten Version als Lehrwerk *alef* herausgegeben (Weis (1972), 589 f.). Der Lehrgang setzt sich zusammen aus einem ausführlichen Lehrerhandbuch und einem Satz Arbeitsblätter sowie zugehörigen Materialien wie dem *Begriffsspiel*, 48 unterschiedlichen Plättchen, von denen jedes aufgrund einer bestimmten Kombination aus vier Merkmalen (Form, Farbe, Größe, Griff) eindeutig beschreibbar ist, und dem *Formenspiel*, Plastikplättchen verschiedener geometrischer Grundformen. Ein Schülerbuch gibt es nicht. *Alef* erschien erstmalig 1969/70 und in einer zweiten, nochmals überarbeiteten Auflage 1975.

Die Neue Mathematik – in Deutschland besser bekannt unter dem Schlagwort „Mengenlehre“ – wurde in den frühen 1980er Jahren wieder abgeschafft und gilt heute als (zurecht) gescheitert. Dies scheint den Protesten aus der gesamten Bevölkerung, die im März 1974 in der *Spiegel*-Schlagzeile „Macht Mengenlehre krank?“ (Der Spiegel, (1974)) gipfelten, recht zu geben. Da ehemalige Schülerinnen und Schüler, die in Mengenlehre unterrichtet wurden, sich jedoch durchaus positiv über ihren Mathematikunterricht äußern, die Protagonisten viel Mühe investiert hatten und Lauter (1977, 27) die Meinung vertrat, die Lage hätte sich beruhigt und eine Rücknahme der Reform sei keine Option, werfen Rücknahme und Bewertung der Reform Fragen auf, allen voran die danach, woran die Neue Mathematik in den Grundschulen eigentlich gescheitert ist. Um sich dieser Fragestellung zu nähern, soll im Folgenden der *alef*-Band für die 1. Klasse (1. Ausgabe) auf seine didaktischen Elemente hin untersucht werden.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 475–478). Münster: WTM-Verlag

Als oberstes Ziel ihres Lehrgangs formulieren Bauersfeld und seine Mitarbeiter, dass Kinder rechnen lernen, und zwar entgegen früherer Konzepte nicht voraussetzungslos. Sie vertreten die Ansicht, dass begriffliche und strukturelle Grundlagen notwendig sind, um verständiges Rechnen zu lernen und somit die vorher häufig nicht zufriedenstellenden Rechenleistungen zu verbessern (Bauersfeld & Weis (1972), 72). Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler neben rein inhaltlichen Fähigkeiten vor allem prozessuale Kompetenzen wie die Fähigkeit zum intermodalen Transfer (ebd.), Problemlösestrategien und eine präzise Sprache (Bauersfeld (1970), 39) erwerben. Soziales Lernen wird ausdrücklich als Ziel formuliert (Bauersfeld & Weis (1972), 73). Dabei soll die Kooperationsfähigkeit der Kinder geschult, gleichzeitig aber auch selbstständiges Arbeiten gefördert werden. Die neuen Ziele bedingen gegenüber dem traditionellen Rechenunterricht neue Methoden und Inhalte wie Mengen, Relationen, Abbildungen und Geometrie (vgl. Bauersfeld et. al. (1970)); dabei wird durchweg betont, dass die zugehörigen Begriffe zu einem so frühen Zeitpunkt lediglich präfiguriert werden sollen und können. Zahlen und Rechnen fehlen dagegen in *alef 1* fast vollständig.

Die Darbietung der Unterrichtsinhalte auf vorgefertigten Abstraktionsstufen, wie sie offenbar im traditionellen Rechenunterricht üblich gewesen ist, lehnen Bauersfeld u. a. ausdrücklich ab (hierin liegt auch der Grund für den Verzicht auf ein Schülerbuch, ebd., 9 und 18). Hier offenbart sich ein konstruktivistisches Verständnis von Begriffsbildung. Dies entspricht dem durchgängig vorgeschlagenen genetisch-entdeckenden Zugang: Begriffe bzw. deren Präfigurationen werden aus Handlungen und Anschauungen abstrahiert, individuell bei der Arbeit mit Arbeitsblättern gefestigt und die Strukturen schließlich auf andere Bezugssysteme transferiert (ebd., 9, 61 und 90). Auf die Nutzung verschiedener Repräsentationsformen wird großer Wert gelegt und somit das auf Bruner zurückgehende EIS-Prinzip konsequent angewendet, sowohl explizit (Bauersfeld et. al. (1970), 99) als auch an vielen Stellen implizit. Für die 1. Klasse liegt dabei ein deutlicher Schwerpunkt auf der enaktiven und der ikonischen Ebene, häufig werden diese verknüpft, etwa wenn die Plättchen des Formenspiels aktiv-handelnd in zweidimensionale bildliche Ordnungsschemata einsortiert werden, wie dies z. B. bei der Einführung des Baumes als Darstellung vorgeschlagen wird. Die Kinder sollen an dieser Stelle zunächst frei ihre Assoziationen mit der für sie neuen Darstellung äußern, die Erfahrungen in den Projektklassen haben dabei gezeigt, dass das Schema häufig mit einem Schienennetz in Verbindung gebracht wird, eine Idee, die aufgegriffen und weitergeführt werden kann bzw. soll (ebd., 72). Hier zeigt sich zum einen exemplarisch, wie die neuen Inhalte an Alltagserfahrungen angebunden werden, zum anderen aber auch die Alltagsrelevanz der Begriffe sowie deren Modellcharakter. Symbole werden nur in geringem Ausmaß eingeführt, dennoch kommt der symbolischen Ebene im Hinblick auf die Sprachbildung eine besondere Rolle zu. Die Autoren von *alef 1* äußern die Überzeugung, dass Sprache keine unabdingbare Voraussetzung für Begriffsbildung ist, sondern im Gegenteil das Bilden nicht-verbaler kognitiver Schemata eine Voraussetzung für den Spracherwerb darstellt (ebd., 12 f.). Dies schlägt sich im gesamten Band nieder, indem zwar Sprachanlässe geschaffen werden sollen, aber immer wieder betont wird, dass die Verbalisierung nicht gefordert oder gar erzwungen werden soll. An sorgsam ausgewählten Stellen, wo dieses dennoch der Fall ist, wird großer Wert auf eine präzise, mit Bedacht gewählte Sprache gelegt (ebd., 19). Im Lehrgang sind Maßnahmen zur Differenzierung vorgesehen, sowohl in Form offener Aufgaben als auch in Vorschlägen für weitere Aufgaben im Ergänzungskurs. Einige Arbeitsblätter werden zudem explizit zur Diagnose vorgeschlagen. (ebd., 20).

Ein erheblicher Teil des Lehrgangs soll in Gruppen bearbeitet werden, häufig mit den zugehörigen Medien in Form von Regelspielen. Der regelhafte Umgang mit strukturiertem Material soll dabei dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler individuell den präverbalen Begriff präfigurieren. Dies kann z. T. in einer Art Freiarbeit geschehen, in der die Gruppen differenziert an unterschiedlichen Dingen arbeiten (vgl. ebd., 36-40), eine methodische Organisation, die an die Ideen von Maria Montessori erinnert, auch wenn diese namentlich in *alef 1* nicht genannt wird.

Festzuhalten ist bis hierhin, dass die Autoren von *alef* eine Fülle didaktischer Fragen bei der Konzipierung ihres Lehrgangs berücksichtigt haben, die bis heute von höchster Relevanz bei der Planung und Entwicklung von Mathematikunterricht sind: Differenzierung, Diagnose, Aufbau von Strategien, Sprachbildung, Wechsel der Darstellungsformen, das alles vor dem Hintergrund eines auf einem konstruktivistischen Begriffsverständnis beruhenden genetisch-entdeckenden Zugangs und der Idee, das Curriculum zu einem prozess- und kompetenzorientierten Curriculum zu entwickeln (Bauersfeld & Weis (1972), 65 und 70). In diesem Sinne muss der entsprechende Unterricht nach heutigen Kriterien in der Tat als ein moderner Mathematikunterricht gewertet werden, und es scheint schwer vorstellbar, dass in einem solch schlüssigen, kohärenten didaktischen Konzept – unabhängig davon, wie repräsentativ *alef* für die gesamten Reformbemühungen war – der Grund für das Scheitern der Reform zu suchen ist.

In der Geschichte der mathematischen Primarbildung stellt die Reform sicher einen Bruch mit der Tradition dar, dies wird allein an der strikten Ablehnung wesentlicher Elemente bisheriger Rechendidaktik klar. Zudem wird der Einfluss zeittypischer Entwicklungen, insbesondere aus der Psychologie, deutlich. Doch waren mitnichten alle Ideen geschichtslos, sondern finden ihre Vorbilder, z. B. in der Reformpädagogik des frühen 20. Jahrhunderts. Wirklich neu waren allerdings die Inhalte, die Rückstellung der Zahlen, des Rechnens und damit auch des Sachrechnens mag den Erwartungen der Kinder wie den Eltern entgegengestanden haben. Obwohl Bauersfeld et. al. davon überzeugt waren und ihnen empirische Ergebnisse bezüglich der Rechenfähigkeit im *Frankfurter Projekt* recht gaben (1975, 7), führten sie vorwiegend auf politischen Druck hin (ebd., 10) in der 2. Auflage Zahlen, Addition, Subtraktion und das Rechnen mit Geld bereits in der 1. Klasse ein und reagierten somit auf diese mögliche Problematik.

Alef liefert Hinweise auf weitere Problemfelder, die die Umsetzung der Reform beeinträchtigt haben dürften: Der Anspruch an Lehrkräfte war hoch, die Lehrerrolle eine völlig neue. Fundierte pädagogische, didaktische wie fachliche Kenntnisse waren unabdingbar für eine erfolgreiche Implementation. Die Klassengrößen Anfang der 1970er betrugen bis zu 50 (ebd., 9); Eltern argumentierten gegen die Reform, da sie die neuen Inhalte nicht kannten und ihren Kindern nicht helfen konnten (ebd., 11). Insgesamt verstärkt sich der Eindruck, dass das Gefüge aus belastenden Faktoren, das als ursächlich für das Scheitern der Neuen Mathematik angesehen werden muss, so komplex und vielschichtig ist wie die gesamte Reform.

Literatur

Bauersfeld, H. (1970). Mathematik in der Grundschule? *Die Reform der Grundschule*. Hannover: Schroedel.

Bauersfeld, H., Gnirk, H., Görner, U., Homann, G., Lubeseder, U., Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1970). *alef 1: Wege zur Mathematik; Handbuch zum Lehrgang*. Hannover: Schroedel.

Bauersfeld, H., Gnirk, H., Homann, G., Lubeseder, U., Mitsos-Görner, U., Radatz, H. & Rickmeyer, K. (1975). *alef 1: Wege zur Mathematik; Überarbeitete Fassung, Handbuch zum Lehrgang*. Hannover: Schroedel.

Bauersfeld, H. & Weis, V. (1972). Aus dem „Frankfurter Projekt zur Modernisierung des Mathematikunterrichts in der Grundschule". *Thema Curriculum: Beiträge zur Theorie und Praxis*. Bebenhausen: Rotsch, 65-94.

Lauter, Josef (1977). *Der Mathematikunterricht in der Grundschule: didaktisch-methodische Hilfen für die Unterrichtspraxis*. Donauwörth: Auer.

Moon, B. (1986). *The ‚new maths' curriculum controversy: an international story*. London: The Falmer Press.

Der Spiegel (1974), 28, 13.

Weis, Valentin (1972). Das Evaluationskonzept des „Frankfurter Projekts". *Die Deutsche Schule: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft und Gestaltung der Schulwirklichkeit 64 (9)*, 589-597.

Christoph HAMMER, München

Immer Ärger mit den Flächeninhalten!

Ein Thema, das von der Grundschule bis zur Sekundarstufe II immer wieder auftaucht, zahlreiche Anwendungen im Alltag hat und anschaulichen Unterricht ermöglicht – das sind doch beste Voraussetzungen für erfolgreiches Lernen!

Allerdings zeigen Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis erhebliche Probleme, die sich auch in verschiedenen Studien widerspiegeln. So konnten im nationalen Test PISA 2003 nur etwa 60% der beteiligten Schüler den Flächeninhalt eines L-förmigen Flächenstücks berechnen (Ulfig, 2013). Für diese offensichtlichen Schwierigkeiten gibt es vielfältige Ursachen. Hier soll diesbezüglich jedoch nicht ins Detail gegangen werden. Vielmehr werden auf der Basis grundlegender Betrachtungen Vorschläge für einen Unterricht gemacht, der nach Möglichkeit die genannten Probleme verringert.

1. Grundlegende Betrachtungen

Man muss es ja zugeben: einige Aspekte des Themas sind nicht ganz einfach. Es geht schon mit dem Begriff "Flächeninhalt" los. Angesichts der "Liniendominanz ebener Figuren" (Franke, 2007) fällt es schwer, tragfähige Vorstellungen von diesem Begriff zu entwickeln (Weigand, 2009). Es versteht sich von selbst, dass der axiomatische Ansatz hier nicht weiterhilft.

Im Folgenden wird gezeigt, wie das **Grundprinzip des Messens** zur Begriffsbildung beitragen kann. Dies ist schon deshalb bedeutsam, weil Flächeninhalte im Alltag selten gemessen, sondern nahezu ausschließlich aus Längenmaßen berechnet werden. Für die Abgrenzung zwischen Umfang und Flächeninhalt stellt dies eine zusätzliche Schwierigkeit dar.

Eine zweite Ursache für Schülerprobleme liegt darin begründet, dass die Flächeninhaltsformeln zu verschiedenen Figuren in unterschiedlichen Schuljahren behandelt werden und dadurch der Blick auf ihre Strukturgleichheit verstellt wird. Auch hier kann das Grundprinzip des Messens vernetzend als "roter Faden" helfen.

Schließlich dominiert – auch bei uns (?) – das lineare Denken. Nur ein Drittel der befragten Erwachsenen konnte bei der Studie "Bürgerkompetenz Rechnen" (Stiftung Rechnen, 2013) die Frage richtig beantworten, was mit dem Volumen passiert, wenn die Kantenlänge eines Würfels verdoppelt wird. Diese Aufgabe gehörte zu den am schlechtesten bearbeiteten des gesamten Tests. Zum Beispiel ist es ist ja auch schwer vorstellbar, dass das Volumen der Erde eine Million Mal in das der Sonne mit ihrem "nur" hun-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 479–482). Münster: WTM-Verlag

dertfachen Radius passt (die Erdkugel passt nicht so oft in die Sonne!). Die ebenen Beispiele zu diesem Problem handeln häufig von Pizzen mit unterschiedlichen Radien. In diesem Zusammenhang spielt bei den folgenden Vorschlägen die **zentrische Streckung** eine entscheidende Rolle, die auch ohne systematische Behandlung anschaulich genutzt werden kann.

2. Das Grundprinzip des Messens

Dieses Prinzip steht im Mittelpunkt der folgenden Vorschläge. Daher werden seine wesentlichen Aspekte hier kurz dargestellt:

- Zur Messung einer Größe wird ein Repräsentant aus dem entsprechenden Größenbereich (Zeit, Masse, Länge, Flächeninhalt, Volumen, …) als Einheit gewählt.
- Beim eigentlichen Messvorgang bestimmt man die Anzahl ("Maßzahl") der genau in die zu messende Größe passenden Einheiten.
- Das Ergebnis ist die Maßzahl zusammen mit der gewählten Einheit.
- Es gibt zu zwei Größen des selben Größenbereichs nicht immer eine geeignete Einheit (z. B. haben die Seiten eines DIN-Blatts ein irrationales Verhältnis und sind deswegen "inkommensurabel".).

Es dürfte kein Schulbuch geben, das dieses Prinzip bei der Herleitung der Flächeninhaltsformel beim Rechteck nicht verwendet. Daher wird darauf nicht genauer eingegangen. Zwei Gedanken seien dennoch hervorgehoben:

Bei der Messung geht es um die Bestimmung einer Anzahl. Wir bestimmen also die **Anzahl** der Einheitsflächenstücke, die in einen Streifen passen und die **Anzahl** der Streifen, die das Rechteck vollständig ausfüllen. Das Produkt aus diesen beiden Anzahlen ergibt die **Anzahl** der Einheitsflächenstücke im Rechteck. Voreiliges Messen von Längen und Rechnen mit der Formel verstellen den Blick auf den wesentlichen Gedanken (hier unterscheiden sich die Lehrbücher!) (vgl. Weigand, 2009).

Zweitens sollte nicht nur und nicht zu früh mit normierten Einheiten gearbeitet werden. Dies betrifft sowohl die Form als auch (vor allem) die Größe. Im Sinn des operativen Prinzips sind Aufträge der Art "was wäre, wenn die Seiten des Einheitsflächenstücks halbiert werden?" sehr lehrreich und spielen im Folgenden beim Kreis eine Rolle (vgl. Reiss & Hammer, 2012, S. 74 ff). So kann schon frühzeitig der quadratische Zusammenhang deutlich werden, der spätestens beim Umrechnen von Einheiten wichtig wird. Einen interessanten Vorschlag zur konkreten Umsetzung des Messens mit selbst gewählten Einheiten liefert Schmidt (Schmidt, 2014).

3. Flächeninhalt des Parallelogramms

Verbreitete Herleitungen der Flächeninhaltsformel für das Parallelogramm verwenden die Verschiebung eines Teildreiecks oder das Prinzip der Ergänzungsgleichheit. Grundidee ist die Rückführung auf ein Rechteck.

Hier wird dagegen vorgeschlagen, das Prinzip des Messens zu nutzen und vorzugehen wie beim Rechteck:

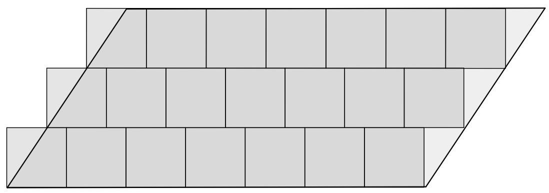


Abb. 1: Messung beim Parallelogramm

Beim Messen wird der Begriff "Flächeninhalt" durch die durchgeführte oder vorgestellte Handlung vertieft. Mir scheint wichtig, dass nicht eine spezielle Höhe verwendet wird, sondern dass "Höhe" gleichbedeutend mit "Abstand zweier Gegenseiten" ist. So wird die Gefahr der Übergeneralisierung von "Seite mal Seite" verringert. Das Problem der außerhalb des Parallelogramms liegenden Höhe kommt hier nicht vor.

Scherung des mit Quadraten ausgelegten Parallelogramms macht deutlich, dass alle Parallelogramme, die in Grundseite und Abstand der zugehörigen Gegenseiten übereinstimmen, gleichen Inhalt haben – auch das Rechteck.

4. Flächeninhalt des Kreises

Nun machen wir einen Sprung in eine höhere Jahrgangsstufe. Beim Flächeninhalt des Kreises sollten zwei Probleme beachtet werden, die mit vielen Lehrbuchdarstellungen einhergehen:

- Wenn die Flächeninhaltsformel aus der für den Umfang hergeleitet wird, muss klargestellt werden, dass so ein Zusammenhang im Allgemeinen **nicht** besteht. Andernfalls wird ein Fehlkonzept bestärkt. Im folgenden Vorschlag wird deshalb ein anderer Weg beschritten.
- Zu frühe und zu einseitige Fixierung auf den Inhalt **eines speziellen** Kreises und damit auf die Bestimmung eines Näherungswerts für π behindert das Verständnis für den entscheidenden Sachverhalt $A \sim r^2$, um den es im Folgenden gehen wird.

Wir messen näherungsweise den Flächeninhalt eines Viertelkreises:

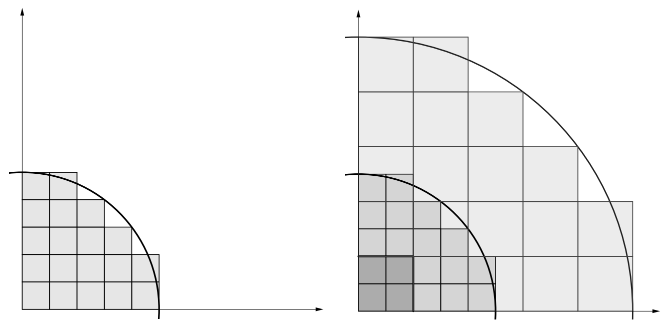


Abb. 2: Kreismessung

Dabei ist es nicht wesentlich, wie genau diese Messung ist. Verdoppelt man nun sowohl den Radius des Viertelkreises als auch die Seitenlänge der Quadrate, so bleibt deren Anzahl erhalten. In jedes der großen Quadrate passen aber vier kleine. Dieses generische Beispiel läßt sich verallgemeinern zu beliebigen Faktoren, die dem Kreisradius entsprechen, wenn man vom Einheitskreis ausgeht. Der Flächeninhalt eines Kreises ist also r^2-mal so groß wie der des Einheitskreises.

Abschließend gilt es natürlich, einen Näherungswert für den Flächeninhalt des Einheitskreises zu bestimmen. Im Grunde genügt dafür die einfache Abschätzung mit ein- und umbeschriebenen Quadraten.

Wohlgemerkt: Diese Überlegungen kann man verstehen, ohne genau über die zentrische Streckung Bescheid zu wissen. Sie zeigen einen Weg zu allgemeinen Beziehungen zwischen den Flächeninhalten ähnlicher Figuren bzw. den Rauminhalten ähnlicher Körper auf, der bis in die Hochschulmathematik reicht.

Literatur

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum

Reiss, K. & Hammer, C. (2012). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Basel: Birkhäuser

Schmidt, R. (2014). Flächenvergleich durch Stempeln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 55*, 11-14.

Stiftung Rechnen (Hrsg.). (2013). *Studie Bürgerkompetenz Rechnen – Ergebnisbericht.* http://stiftungrechnen.de/index.php/projekte/studie. [11.2.2014]

Ulfig, F. (2013). *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Weigand, H.-G. (Hrsg.). (2009). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer Spektrum.

Mutfried HARTMANN, Karlsruhe

Das Spiel „Dobble“ als Feld kreativen mathematischen Arbeitens

Spiele bieten oft sehr schöne Anlässe für mathematische Analysen. Am Beispiel der Analyse des Spiels Dobble soll hier exemplarisch aufgezeigt werden, welche Charakteristika ein solches Problem so attraktiv zur Entwicklung von Problemlösekompetenzen machen.

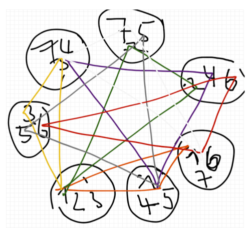
Spielstruktur und erste Beobachtungen

Das Spiel Dobble besteht aus K=55 Karten mit jeweils S_k=8 verschiedenen Symbolen pro Karte. Unabhängig von der Spielvariante läuft es immer darauf hinaus, möglichst schnell auf zwei Karten das übereinstimmende Symbol zu entdecken. Dazu wurden die Symbole von den Spieleentwicklern so geschickt auf die Karten verteilt, dass zwei Karten immer in *genau einem* Symbol übereinstimmen (*Zentrale Deckbedingung*). Hier stellt sich selbst bei nicht matheaffinen Personen die Frage: Wie geht das?

Im Rahmen zweier Workshops im WS 13/14 wurde von Schülern einer Nürnberger Schule und Studierenden der PH-Karlsruhe diese (noch recht unscharf) gestellte Frage bearbeitet. Zunächst dominierte bei beiden Gruppen die direkte Auseinandersetzung mit dem Material. Dabei wurden sehr schnell erste Beobachtungen gemacht. Sie bezogen sich teilweise auf das konkrete Deck und waren keine Folge der zentralen Deckbedingung. Z.B. wurde durch eine unzulässige Verallgemeinerung (fälschlicherweise) festgestellt, dass jedes der Symbole achtmal auftritt. Die Betreuer griffen zunächst inhaltlich nicht ein. Es erwies sich aber als nötig, heuristische Problemlösestrategien in den Prozess miteinzubringen (Link 2011).

Reduktion des Problems und Reichhaltigkeit an Darstellungen

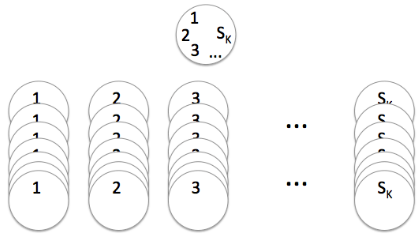
Um das Problem zu vereinfachen, wurden -um zulässige Spiele zu konstruieren- Symbole durch Zahlen ersetzt und entweder mit vorgegebener geringer Kartenanzahl K oder mit geringerer Anzahl S_K von Symbolen pro Karte Versuche durchgeführt. Dabei stellte sich heraus, dass es triviale Lösungen gibt: Jede Karte besitzt dasselbe Symbol. Um S_K zu erhöhen, können die Karten anschließend mit paarweise verschiedenen Symbolen beliebig aufgefüllt werden. Derartig asymmetrische Lösungen wurden damit zunächst als uninteressant verworfen.



Eine besondere Qualität des Problems ist die Vielfalt der Darstellungen, zu der es anregt. Dabei erweisen sich ver-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 483–486). Münster: WTM-Verlag

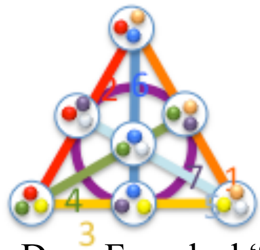
schiedene Darstellungen für unterschiedliche Ergebnisse zielführend. Am tragfähigsten zeigten sich für die Konstruktion kleinerer Decks Tabellen und im Kreis angeordnete Karten mit Zahlen als Symbolen mit farbigen Verbindungslinien, die die Verknüpfung der Karten durch bestimmte Symbole repräsentieren. Schnell wird bei dieser Darstellung auch klar, dass bei einer Symbolhäufigkeit von h_S =2 sich zu jeder Kartenzahl immer eine Lösung konstruieren lässt. Unter der Voraussetzung einer konstanten Symbolhäufigkeit h_S konnte eine wesentliche Formel sowohl aus der Interpretation als vollständiger Graph, der sich entsprechend der Symbole aus Cliquen zusammensetzt, als auch aus der Zerlegung des restlichen Decks entsprechend der Symbole 1,…, S_k einer vorher entfernten beliebigen „Masterkarte“ gewonnen werden: $K-1=S_K\cdot\left(h_S-1\right)$ *.



Unterschiedliche Zählweisen der Anzahl aller Zeichen liefert $S_K \cdot K = |S| \cdot h_S$ (S=Menge der Symbole). Die Formel * erweist sich insofern als wertvoll, indem sie viele zum Scheitern verurteilte Vorgaben wie etwa K=12 mit S_k=3 von vornherein als solche kenntlich macht. Auch offenbarte sie die fehlerhafte Annahme, Dobble hätte eine konstante Symbolhäufigkeit von h_S=8. Einen Algorithmus zur Erzeugung möglicher Decks mit $h_S>2$ zu finden, gelang dennoch nicht. Hierzu bedarf es Methoden finiter Geometrie.

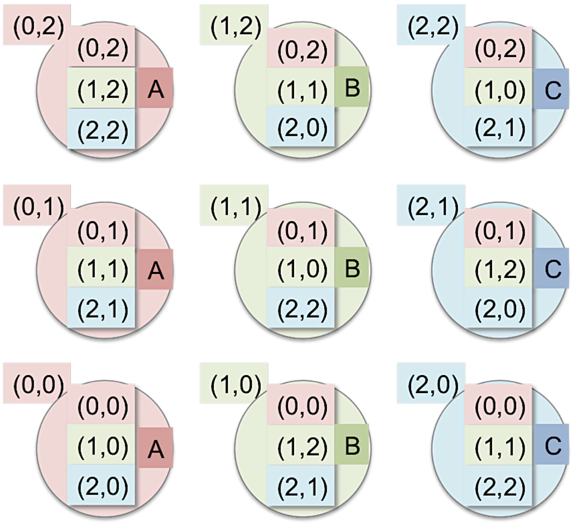
Interpretation von Dobble als „punktierte projektive Ebene“

Bereits die Darstellung der Karten als Punkte und der Verbindungen derselben durch „Symbol-Geraden“ verweisen auf eine mögliche geometrische Interpretation. Der Zusammenhang mit Geometrien wird evident, wenn man die Axiome affiner und projektiver Ebenen betrachtet. Etwa lässt sich das Axiom *„Zwei Punkte inzidieren immer mit genau einer Geraden“* als die zentrale Deckbedingung *„Zwei Karten stimmen immer in genau einem Symbol überein“* interpretieren. Weitere Axiome, die die charakteristischen Eigenschaften der projektiven bzw. affinen Ebene ausmachen, sind für die Gültigkeit eines Spieledecks nicht mehr bedeutsam. Das Kartenset entspricht sogenannten 2-(K,h_S,1)-Blockplänen -Verallgemeinerungen affiner bzw. projektiver Ebenen. Zur Konstruktion von Kartensets können insbesondere Konstruktionsverfahren affiner und projektiver Ebenen genutzt werden. Aus fachdidaktischer Sicht stellt dieses Problem damit einen attraktiven Aufhänger zur tieferen Auseinandersetzung mit finiten Geometrien und endlichen Körpern dar.



Das „Fanodeck“

Analog zur Koordinatendarstellung $\mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene können auch mit endlichen Körpern IF endliche Punktemengen (also Kartendecks) erzeugt werden. Aus den p^n Elementen $(n \in \mathbb{N})$ des endlichen Körpers IF_{p^n} werden dadurch p^{2n} Punkte (Karten). Für die Festlegung der Geraden, die den Symbolen auf den Karten entsprechen, orientiert man sich an der vertrauten Geradengleichung $y = mx + t \quad m,t \in IF^2$.

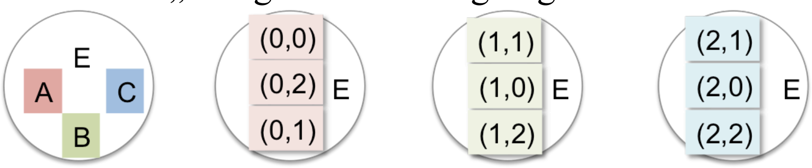


Ein „affines Kartendeck“ über IF_3

Punkte aus IF^2, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf derselben durch das Tupel $(m,t) \in IF^2$ festgelegten Geraden. Die entsprechenden Karten besitzen also dasselbe Symbol (m,t). In obiger Abbildung wurde für einen Körper mit drei Elementen ein solches Deck erstellt. Das Symbol (1,0) entspricht dabei der „Ursprungsgeraden“, das Symbol (0,2) der waagerechten Geraden mit dem y-Achsenabschnitt 2. Durch die so erzeugten Geraden (Symbole) wird jede Karte (a,b) eines Stapels mit jeweils genau einer Karte $(\tilde{a},\tilde{b})$ der anderen Stapel verbunden. Dies ist letztlich eine Folge dessen, dass das folgende Gleichungssystem genau eine Lösung (m,t) hat, was am Rang 2 (man beachte $a \neq \tilde{a}$) der entsprechenden Matrix abzulesen ist.

$$\begin{array}{ll} I) & m \cdot a + t = b \\ II) & m \cdot \tilde{a} + t = \tilde{b} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 \\ \tilde{a} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

Da über die Geradengleichungen keine senkrechten Geraden entstehen, die Karten eines Stapels wie z.B. ((0,2), (0,1), (0,2)) also kein gemeinsames Symbol besitzen, müssen noch weitere Symbole (hier A,B,C) eingeführt werden, welche die Karten innerhalb der Stapel miteinander verbinden. Damit entsteht eine affine Ebene oder anders formuliert ein gültiges Deck mit p^{2n} Karten. Diese affine Ebene kann zu einer projektiven Ebene abgeschlossen werden. Dazu müssen die Schnittpunkte für die parallelen Geraden sowie deren verbindende „Ferngerade“ hinzugefügt werden. In der Sprache des Kartendecks bedeutet dies, dass man eine Karte mit den p



zusätzlichen Symbolen A,B,C,… erstellt und *p* weitere Karten, die jeweils die Symbole beinhalten, die in der ersten Koordinate übereinstimmen. Diese p+1 Karten werden dann noch durch ein weiteres Symbol miteinander verbunden. Im abgebildeten Beispiel ist das E.

Wie man sich leicht klarmacht, bleibt die zentrale Deckbedingung auch erhalten, selbst wenn man irgendwelche Karten aus dem Deck entfernt. Da das Deck von Dobble nur 55 anstelle von 57 Karten hat, kann vermutet werden, dass aus einem Deck, das einer projektiven Ebene mit 57 Punkten entsprach, durch Weglassen von zwei Karten ein unausgewogenes Deck erzeugt wurde. Durch „Schlitzen“ werden projektive Ebenen zu affinen, durch das „Punktieren“ geht sogar die Blockplaneigenschaft verloren.

Reichhaltigkeit an Variationsmöglichkeiten

Die Problemstellung ist für Variationen besonders ergiebig, da neben den Deckparametern S_k, h_s, K,... (vgl. die Kinderversion von Dobble) verschiedene andere Parameter variiert werden können. Die Karten könnten z.B. auch in mehr als zwei Symbolen übereinstimmen, die Symbole auf den Karten die gleichen sein, sich aber in der Farbe oder Größe unterscheiden (vgl. Das Spiel Kunterbunt) und nicht zuletzt können mit demselben Kartendeck unterschiedlichste Spielvarianten erzeugt werden. Gerade die Variation der Spielregeln in ihrer Auswirkung auf geeignete Strategien und die geforderten kognitiven Fähigkeiten zu untersuchen, bringt noch eine didaktische Komponente in die Analyse des Spiels.

Qualitätsmerkmale der Problemstellung

Die Problemstellung ist einfach, anschaulich und motivierend und kann auf vielfältige Weisen angegangen werden. Das Problem ist hinreichend komplex und Problemlösestrategien sind gewinnbringend einsetzbar. Mit vielfältigen Darstellungsmöglichkeiten sind auf unterschiedlichem Niveau motivierende Teilergebnisse möglich. Oft erzwingen diese, wie z.B. die Entdeckung trivialer Lösungen, eine Präzisierung der Fragestellung. Das Problem weist viele Querbezüge zu Standardthemen der Lehramtsausbildung auf und motiviert auf natürliche Weise zu einer Auseinandersetzung mit Themen der höheren Mathematik.

Literatur

Beutelspacher, A. (1982): *Einführung in die endliche Geometrie. Band I: Blockpläne.* Mannheim: Wissenschaftsverlag

Link, F. (2011): *Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten*.Wiesbaden: Teubner

Pickert, G. (1974): *Einführung in die endliche Geometrie*. Stuttgart: Klett-Verlag

Maren HATTEBUHR, Martin FRANK, Christina ROECKERATH, Aachen

Kompetenzzuwachs bei Schülerinnen und Schülern durch die Teilnahme an einer Modellierungswoche

Wir erörtern auf Grundlage des Kernlehrplans für das Fach Mathematik (Sek II, NRW), wie durch das Arbeiten an realen Forschungsproblemen prozessbezogene Kompetenzen vermittelt, angewendet und weiterentwickelt werden können. Des Weiteren gehen wir neben dem prozessbezogenen auch auf den inhaltlichen Kompetenzzuwachs der Teilnehmer ein, der die selbstständige Entwicklung und Weiterentwicklung sowie Analyse von mathematischen Begriffen, Konstrukten und Methoden beinhaltet. Unser Ziel ist es, die Prozesse im Laufe der Projektarbeit zu verstehen, und auch ein Anforderungsprofil für eine erfolgreiche Teilnahme zu erstellen.

1. Die CAMMP week

Bei der CAMMP week handelt es sich um eine computergestütze mathematische Modellierungswoche, veranstaltet von mehreren Instituten der RWTH Aachen, in der die Schülerinnen und Schüler in die Rolle von Wissenschaftlern/innen schlüpfen. Sie ist angelehnt an die Modellierungswochen der TU Kaiserslautern, von Prof. Neunzert initiiert und jetzt von Martin Bracke weitergeführt (Göttlich 2007, Bracke & Göttlich & Götz 2013). Eine Woche lang arbeiten jeweils sechs Schülerinnen und Schüler der Oberstufe in einem Team an einer komplexen, herausfordernden Problemstellung und werden dabei von jeweils zwei Lehrpersonen und einem/r wissenschaftlichen Betreuer/in begleitet. Die Problemstellungen, pro CAMMP week sechs verschiedene an der Zahl, werden von Firmen oder Forschungseinrichtungen gestellt und sind typischerweise noch nicht oder nur unzureichend gelöst. Im Rahmen der CAMMP week werden folglich ausschließlich authentische Modellierungsprobleme behandelt, die keine optimale oder gar eindeutige Lösung besitzen. In Kaiser und Schwarz (2010) wird eine umfassende Klassifikation der jüngsten Modellierungsansätze gegeben. Es wird gemäß dieser Klassifikation ein realistischer, angewandter Modellierungsansatz verfolgt. Die Schülerinnen und Schüler durchlaufen im Laufe der Woche (mehrmals) den Modellierungskreislauf: Die Problemstellung muss erfasst und Ziele herausgefunden werden. Dazu muss sie strukturiert und in Teilprobleme zerlegt werden. Diese werden dann in einem Modell mathematisiert, wobei Vereinfachungen gemacht werden müssen. Anschließend wird das selbst erstellte Modell in dem Simulationsprogramm MATLAB umgesetzt. Die Schülerinnen und Schüler reflektieren

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 487–490). Münster: WTM-Verlag

ihre Arbeit, verbessern Fehler und erweitern das Modell. Zusätzlich müssen ein Abschlussbericht und eine Abschlusspräsentation in LaTeX erstellt werden. Die erarbeiteten Ergebnisse werden am letzten Tag den Firmenvertretern vorgestellt.

2. Untersuchung der Kompetenzen

Laut dem Kernlehrplan für Mathematik der Sek. II (NRW, 2014) werden unter den prozessbezogenen Kompetenzen das Modellieren, Problemlösen, Argumentieren, Kommunizieren und das Werkzeuge nutzen verstanden. Weiterhin gibt der Kernlehrplan die Inhaltsfelder Funktionen und Analysis, Analytische Geometrie und Lineare Algebra und Stochastik an. Der Schwerpunkt unserer Untersuchung liegt auf den prozessbezogenen Kompetenzen, da diese in einer Modellierungswoche eine wichtige Rolle spielen, und im Vordergrund der Wissensvermittlung (durch Anwendung) stehen. Weitere, den Erfolg beeinflussende Faktoren, wie Motivation, Frustrationstoleranz und Selbstvertrauen, sollen hier nicht diskutiert werden, sondern sind in Frank und Roeckerath (2014) nachzulesen. Aufbauend auf dem Kernlehrplan haben wir einen Fragebogen entwickelt, der die nötigen Kompetenzvoraussetzungen für eine erfolgreiche Teilnahme und den Kompetenzzuwachs bei einer erfolgreichen Teilnahme untersucht. Befragt wurden ehemalige wissenschaftliche Betreuer/innen, die verschiedene Aspekte auf einer Skala von 0 bis 5 (0 entspricht „es sind keine Vorkenntnisse nötig“ bzw. „es gibt keinen Lernzuwachs“, 5 entspricht „es sind sehr gute Vorkenntnisse nötig“ bzw. „es gibt einen sehr hohen Lernzuwachs“) bewerten mussten. Zusätzlich hatten die Betreuer/innen noch die Möglichkeit, Anmerkungen oder Beispiele zu den einzelnen Kompetenzen anzugeben. Die Umfrage spiegelt die Einschätzung der Betreuer/innen wider, die auf den realen Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler hindeutet. Dieser muss jedoch in Zukunft direkt untersucht werden.

3. Ergebnisse

Die folgenden Ergebnisse beruhen auf den Einschätzungen von 16 verschiedenen Projekten. Zur Bewertung der Ergebnisse haben wir als stochastisches Maß, da ordinale Daten zugrunde liegen, den Median und den Quartilsabstand genutzt. Der Median ist stabil gegenüber Ausreißern, spiegelt jedoch eine Verteilung der Werte nur bedingt wider, weshalb zusätzlich der Quartilsabstand betrachtet wird. Dabei wird ein Median von 5 als „sehr gute Vorkenntnisse“ bzw. „sehr gutes Erlernen“, ein Median von 4 als „gute Vorkenntnisse“ bzw. „gutes Erlernen“, ein Median von 3 als „mittlere Vorkenntnisse“ bzw. „mittleres Erlernen“, ein Median von 2 als „geringe Vorkenntnisse“ bzw. „geringes Erlernen“, ein Median von 1 als

„sehr geringe Vorkenntnisse“ bzw. „sehr geringes Erlernen“ und ein Median von 0 als „keine Vorkenntnisse“ bzw. „kein Erlernen“ interpretiert. Ist der halbe Quartilsabstand in einer Kompetenz größer als 1, so wird diese (Teil-)Kompetenz auch den benachbarten Medianklassen zugeordnet.

Für eine erfolgreiche Teilnahme an der CAMMP week sind nach Einschätzung der Betreuer/innen für den Kompetenzbereich

- Modellieren im Teilprozess Strukturieren mittlere, im Teilprozess Mathematisieren geringe bis gute, im Teilprozess Validieren keine bis mittlere,
- Problemlösen im Teilprozess Erkunden mittlere, im Teilprozess Lösen mittlere, im Teilprozess Reflektieren geringe bis gute,
- Argumentieren im Teilaspekt Vermuten mittlere, im Teilaspekt Begründen mittlere, im Teilaspekt Beurteilen mittlere,
- Kommunizieren im Teilaspekt Rezipieren mittlere, im Teilaspekt Produzieren mittlere und im Teilaspekt Diskutieren mittlere

Vorkenntnisse nötig.

Bei einer erfolgreichen Teilnahme an der CAMMP week werden ebenfalls nach Einschätzung der Betreuer/innen im

- Modellieren das Strukturieren sehr gut, das Mathematisieren sehr gut, das Validieren gut bis sehr gut,
- Problemlösen das Erkunden sehr gut, das Lösen sehr gut, das Reflektieren mittelmäßig bis sehr gut,
- Argumentieren das Vermuten mittelmäßig bis sehr gut, das Begründen mittelmäßig bis sehr gut, das Beurteilen gut bis sehr gut,
- Kommunizieren das Rezipieren gut, das Produzieren sehr gut und das Diskutieren sehr gut

erlernt bzw. weiterentwickelt.

4. Fazit und Ausblick

Die Ergebnisse geben erste Hinweise darauf, dass die projektorientierte Arbeit in einer Modellierungswoche den Schülerinnen und Schüler eine weitreichende Aus- und Weiterbildung ihrer prozessbezogenen Kompetenzen ermöglicht. Allerdings wurde bisher keine unter empirischen Gesichtspunkten wissenschaftliche Untersuchung durchgeführt. Eine systematischen Evaluation mit Hilfe qualitativer und quantitativer Methoden wie es bzgl. anderer Fragestellungen bei einer ähnlichen Modellierungsveranstaltung in Hamburg durchgeführt wurde (Kaiser & Schwarz 2010), ist zum

Nachweis im Rahmen von zukünftigen Untersuchungen noch durchzuführen.

Damit stellen Modellierungswochen auf Basis der bisherigen Erkenntnisse eine lohnenswerte Ergänzung zum Schulunterricht dar. Für die Teilnahme sind geringe bis mittlere Vorkenntnisse in den prozessbezogenen Kompetenzen sinnvoll. Voraussetzungen in den inhaltlichen Kompetenzen sind noch zu untersuchen. Die Untersuchung des realen Lernerfolgs der Schülerinnen und Schüler ist der Gegenstand zukünftiger Untersuchungen.

Literatur

Bracke, M., Göttlich, S., Götz, T. (2013). Modellierungsproblem Dart spielen. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser (Hrsg.) (2013). Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule – Theoretische und didaktische Hintergründe. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Frank, M., Roeckerath, C. (2014). Habe ich das Zeug zum MINT-Studium? Die CAMMP week als Orientierungshilfe für Schülerinnen und Schüler. Vortrag bei der Arbeitstagung: Mathematik im Übergang Schule / Hochschule und im ersten Studienjahr, Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik, Universität Paderborn, Paderborn, 22. Februar 2013.

Göttlich, S. (2007). Mathematische Modellierung in der Mittelstufe: Personalausweis für Schild-kröten. In I. Lehmann (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 26. - 30. 3. 2007 (S. 324-327). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Kaiser, G., Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education – Examples an Experiences. GDM 2010.

Mathias HATTERMANN, Bielefeld

Negative Zahlen in der Grundschule – Ein Erfahrungsbericht aus einem laufenden Projekt mit der Laborschule Bielefeld

Das Forschungs- und Entwicklungsprojekt *Positive Beispiele zu negativen Zahlen* erfolgt in Kooperation der Universität Bielefeld und der Laborschule Bielefeld. Innerhalb des Projektes arbeiten zwei Lehrerinnen, ein Lehrer, der Leiter der Wissenschaftlichen Einrichtung und eine wissenschaftliche Hilfskraft mit zwei Wissenschaftlern des Institutes für Didaktik der Mathematik der Universität zusammen, um konstruktive Hinweise zum schulbasierten Umgang mit ganzen Zahlen in verschiedenen Jahrgangsstufen zu erarbeiten.

Ziele des Projektes

Die Ziele des auf den Zeitraum von 2011 bis 2016 laufenden Forschungs- und Entwicklungsprojektes bestehen aus:

- der Feststellung schülerspezifischer Präferenzen für Modelle zu vorgegebenen Aufgabenstellungen,
- der Identifikation von personenspezifischen und modellspezifischen Lernhürden,
- der Empfehlung sowohl für die Kombination von Modellen als auch für deren Konventionen der Interpretation,
- der Sammlung konstruktiver Hinweise zum Unterrichtslehrgang negative Zahlen.

Im bisherigen Verlauf der Untersuchungen wurden bereits Ergebnisse zur Verwendung des Plus-Minus-Spiels (Hattermann 2013, Hattermann et al. (in Druck) und zur Untersuchung von Argumentationsprozessen bei der Begründung von Lösungen reiner Rechenaufgaben von Schülerinnen und Schülern der 7. Klasse publiziert (Hattermann et al. 2013).

Übergreifendes Design des Projektes

Im System der Laborschule sind die Lehrerinnen und Lehrer Praxisforscher und entwickeln ihren Unterricht mit Kolleginnen und Kollegen bzw. auch Wissenschaftlern in Forschungs- und Entwicklungsprojekten weiter, wobei Ergebnisse u.a. in der Reihe *Impuls Laborschule* (Klinkhardt Verlag) publiziert werden. Auf der methodologischen Grundlage von *Lesson Studies* (z.B. Hart et al. 2011), einer ursprünglich in Japan vor über 100 Jahren entwickelten und weit verbreiteten Methode zur Lehrerprofessionalisierung

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 491–494). Münster: WTM-Verlag

bzw. Lehrerpraxisforschung, arbeiten Lehrerinnen und Lehrer im vorgestellten Projekt mit Wissenschaftlern zusammen, um Literatur zu sichten, Unterricht gemeinsam zu planen, diesen durchzuführen, gemeinsam zu reflektieren und mit verbesserter Konzeption zu wiederholen.

Design der Untersuchung innerhalb der Jahrgangsmischung 3, 4, 5

Für die Thematisierung der negativen Zahlen in der Jahrgangsmischung waren die folgenden Forschungsfragen zielführend: Inwiefern ist die Thematisierung von negativen Zahlen in der Grundschule sinnvoll? Gibt es besonders geeignete, eventuell altersabhängige, Kontexte? Welche Stufen der Objektivierung können nach Malle (2007) angesprochen werden? Zur Identifikation eines eventuell präferierten Kontextes und zur Anbindung an mögliches Vorwissen, erfolgte zunächst ein Unterrichtsgespräch zur Erhebung von Vorerfahrungen. Als Ergebnis ließ sich konstatieren, dass die Schülerinnen und Schüler unter negativen Zahlen Kommazahlen bzw. „sowas wie Rest“ und „Zahlen, die man nicht teilen kann“ verstanden. Aufgrund der nahezu nicht vorhandenen Vorkenntnisse zu negativen Zahlen, entschloss sich die Forschergruppe, die Schülerinnen und Schüler in Gruppen zu ca. 5 Personen über einen Zeitraum von 2 Wochen und 8 Unterrichtszeitstunden an verschiedenen Themen möglichst eigenständig arbeiten zu lassen. Die Themen bestanden aus einem strukturellen Zugang über die Zahlengerade (Ordnung, Gegenzahl, Abstand, Permanenzreihen, vgl. Abb.1), Guthaben und Schulden, Meerestiefen, Temperatur und einer an die Grundschule angepassten Version des Plus-Minus-Spiels (Hattermann et al. (in Druck).

1. Mirko und Alexander rechnen Aufgaben.

8 - 1 = 7

8 - 2 = 6

8 - 3 = 5

8 - 4 = 4

8 - 5 = 3

Was meinst Du, wer die Wette gewinnt? Erkläre Deine Entscheidung.

Abbildung 1: Aufgabe zu Permanenzreihen

Ergebnisse

Die Schülerinnen und Schüler nahmen am Ende der Sequenz an einer Evaluation teil, in der sowohl ihre Einstellungen zur Mathematik als auch ihre Meinungen zu den verschiedenen Themen und ihre Selbsteinschätzung erhoben wurden. Weiterhin bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler zu den behandelten Themenfeldern strukturähnliche Aufgaben. Außerdem traten auch kontextfreie Rechenaufgaben auf, die jedoch nicht in den Übungsformaten enthalten waren, um eventuelle Abstraktionsprozesse beobachten und diese im anschließenden Interview genauer untersuchen zu können. Zunächst kann festgehalten werden, dass alle Zugänge motiviert bearbeitet wurden. „Die Aufgaben zur … fand ich gut“, wurden mit folgenden Mittelwerten (N = 20, Minimum = 0, Maximum = 3) bewertet: Temperatur 2,6; Schulden 2,3; Meerestiefen 2,4; Zahlengerade 2,15; Plus-Minus-Spiel 2,9. Somit liegt der strukturelle Ansatz über die Zahlengerade mit Permanenzreihen zwar leicht hinter den übrigen Einschätzungen zurück, jedoch kann keinesfalls von einem nicht motivierenden Zugang für diese Jahrgangsmischung gesprochen werden. Der Einsatz des Plus-Minus-Spiels war vergleichbar mit den Erfahrungen in Klasse 7 auch in der Jahrgangsmischung sehr beliebt. Obwohl in der Erarbeitungsphase keine kontextfreien Rechenaufgaben auftraten, gelang der Mehrzahl der Schüler die erfolgreiche Bearbeitung von fünf reinen Rechenaufgaben ohne Kontextbezug während der Evaluation. Der Median der richtigen Lösungen von 5 Aufgaben lag bei 4, der Mittelwert bei 3,7. Schwächere Schülerinnen und Schüler hatten insbesondere Schwierigkeiten bei reinen Rechenaufgaben (z.B. -9 + 13 = oder -8 – 15 =), Aufgaben zum Abstand („Alexander sucht Zahlen, die 5 Schritte von der -17 entfernt sind. Fallen dir zwei Zahlen ein?“) und Aufgaben zum Temperaturunterschied (Höchsttemperatur in Bielefeld +3 °C, Tiefsttemperatur -2 °C), welche ebenfalls Abstandsbetrachtungen beinhalten. Betrachtet man die Evaluationsergebnisse in Bezug auf die einzelnen Klassenstufen 3, 4 und 5, so treten entgegen der Vermutung der Forschergruppe höhere Punktzahlen in Klassenstufe 5 im Vergleich zu den übrigen Stufen nicht auf. Bei 32 zu erreichenden Punkte lag der Median der gesamten Gruppe bei 25,5, der Mittelwert bei 25, wobei sich die einzelnen Stufen nur unwesentlich unterscheiden (Stufe 3 MW: 24; ME: 24,5; Stufe 4 MW: 24; ME: 24; Stufe 5 MW: 27; ME: 28,5), die Streuung der Ergebnisse ist Abbildung 2 zu entnehmen.

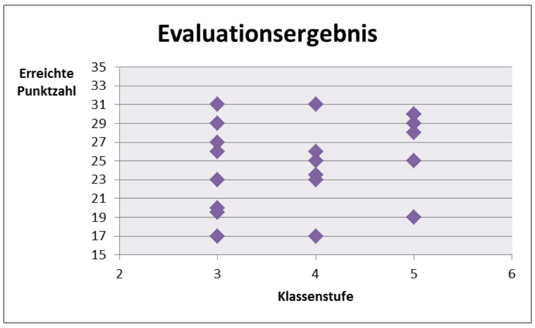


Abbildung 2: Streuung der Ergebnisse des mathematischen Tests

Im Interview ließ sich feststellen, dass die meisten Schülerinnen und Schüler auch aufgrund mangelnder Erfahrung mit der Notation von negativen Zahlen und zugehöriger Rechenaufgaben noch auf Stufe 1 nach Malle

(2007) arbeiten, auf der negative Zahlen als natürliche Zahlen in speziellen Verwendungssituationen interpretiert werden. So notiert Lisa auf ihrem Blatt 8 + 5 = 13 zur inhaltsgebundenen Aufgabe beim Plus-Minus-Spiel „Yasin hat – 5 Punkte. Er bekommt eine rote -8 von seinem Nachbarn. Wie viele Punkte hat er nun? Schreibe eine Rechnung auf.“ Im Interview wird jedoch deutlich, dass Lisa sehr wohl bewusst ist, dass es sich hier um negative Zahlen handelt und sie auch weiß, dass Yasin -13 Punkte besitzt. Sie wusste nur nicht, wie sie diese Aufgabe aufschreiben sollte. Jedoch gibt es auch Kinder, die bereits klar von natürlichen Zahlen abstrahieren und der Schritt zur Arbeit auf Stufe 3 nach Malle (2007) zumindest als erreichbar erscheint.

Fazit

Anhand der Ergebnisse der Untersuchung stellt sich die berechtigte Frage, ob nach Verifikation der Ergebnisse mit größeren Probandenzahlen trotz der Stofffülle in der Grundschule ein ernst zu nehmendes Spiralcurriculum nicht auch negative Zahlen in der Grundschule auf den Stufen 1 und 2 nach Malle (2007) berücksichtigen müsste. Das Projekt wird in Klasse 7 fortgeführt, wobei die Schülerinnen und Schüler vier verschiedene spielerische Zugänge (das Plus-Minus-Spiel, das Miese-Mäuse-Spiel, eine spielerische Form des Pfeilmodells und das Guthaben–Schulden-Spiel) ausprobieren und sich für die vertiefte Thematisierung für eines der Spiele entscheiden, an welchem sie anschließend die Notation der Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen inhaltlich deuten und das Rechnen mit inhaltlichen Überlegungen und Übersetzungsprozessen am jeweiligen Spiel üben können.

Literatur

Hattermann, M., Hofe, R. v., Kullmann, H. (2013). An Innovative Approach to Negative Numbers. In A. Lindmeier et al. (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (S. 71). Kiel: PME.

Hattermann, M. (2013). Einführung und erste Rechenoperationen mit ganzen Zahlen: Ein Erfahrungsbericht. In G. Greefrath et al. (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, (S. 420–423). Münster: WTM.

Hattermann, M., Hofe, R. v., Viehmeister, F. (in Druck). Rote Karte? Ich hab' grün! *mathematik lehren*, *183*.

Malle, G. (2007). Die Entstehung negativer Zahlen: Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denkobjekten. *mathematik lehren*, *142*, 52–57.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together*. Dordrecht; New York: Springer.

Kerstin HEIN, Berlin

Mathematik erzählen – Phantasieerzählungen als Brücke zur Mathematik

1. Mathematik und Literatur − ein Gegensatz?

Mathematik und Literatur beschreiben auf ihre ganz eigene Weise die Realität. In der Mathematik werden die konkreten Fragestellungen und Erkenntniswege, mit denen die Probleme gelöst werden, nicht erwähnt und die allgemeine Lösung bzw. Beschreibung in der Mathematik gesucht. In der Literatur hingegen wird in konkreten Kontexten die menschliche Entwicklung beschrieben und auf verbindliche, abstrakte Folgerungen verzichtet. Das Verstehen der Realität geschieht jedoch als Wechselspiel zwischen Konkretem und Abstraktem (Ruf & Gallin 2011, S. 144ff.). Der Gewinn eines fächerübergreifenden Unterrichts zwischen Mathematik und Deutsch ist die Verbindung der unterschiedlichen Zugangsweisen für einen zirkulären Verstehensprozess. Dies kann durch die inhaltsorientierte Auswahl mathematischer Erzählungen geschehen, die durch den Verzicht auf einen normativen literarischen Kanon auch aus Sicht der Deutschdidaktik gerechtfertigt ist (Beckmann 2003, S. 10).

2. Erzählen im Mathematikunterricht

Durch Erzählen im Mathematikunterricht kann das Singuläre im Prozess der mathematischen Erkenntnisgewinnung wieder sichtbar werden und erzählend der prozesshafte Charakter der Mathematik nachvollzogen werden. Beispielweise kann die Genese von mathematischen Objekten anschaulich thematisiert werden. Durch Erzählungen, die mündlichen oder auch schriftlichen Darstellungen einer Handlung, wird die Mathematik in Sinnkontexte eingebettet und damit eine Vernetzung möglich. Durch mehr oder weniger fiktive Rahmengeschichten kann leichter eine emotionale Beziehung zur Mathematik aufgebaut werden, die zu größerer Aufmerksamkeit und einer höheren Gedächtnisleistung führt (Frenzel, Müller & Sottong 2004).

3. Mathematische Erzählungen und die Erzähltheorie

Die Erzähltheorie ist für den Mathematikunterricht hinsichtlich zweier Aspekte relevant. Einerseits können in ihr sowohl Dialogformen als auch Gelingensprozesse von Dialogen untersucht werden. Verstehen wird dabei als aktiver Prozess vom Sendenden und dem Empfangenden betrachtet. Der Sendende muss die Möglichkeiten der Empfangenden antizipieren und beispielsweise durch Erzählungen auf Erfahrungen verweisen, so dass Sinn im Erlebnishorizont des Rezipierenden entsteht (Kubli 2005, S. 64 ff.). Auf

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 495–498). Münster: WTM-Verlag

der anderen Seite liefert die Erzähltheorie ein differenziertes Instrumentarium, um Wirkungsweisen bestimmter erzähltechnischer Verwendungen zu untersuchen. Nach Wille können mathematische Erzählungen mit einem bestimmten mathematischen Kern in didaktische Geschichten, Aufgaben in erzählerischer Form, Dialoge bzw. Streitgespräche und personifizierte Mathematik eingeteilt werden (Wille 1984, S. 73). Bei genauer Betrachtung mathematischer Erzählungen mit Kategorien aus der Erzähltheorie ergibt sich ein noch differenzierteres Bild. Von besonderem Interesse für die bewusste Gestaltung und Rezeption im Mathematikunterricht sind hierbei die Verbindungen zwischen den erzähltechnischen Möglichkeiten und deren inhaltlichen Verwendungsmöglichkeiten bzw. deren inhärenten Wirkungsweisen.

Narratologische Kategorien		**Mathematische Erzählung**	**Wirkung/ Darstellung**
Erzähl-perspektive	**Innensicht**	persönliche Beziehung zur Mathematik	persönlich, perspektivisch
	Außensicht	Mathematik von außen	distanziert, objektivierend
Figuren	**Mensch**	Mathematiker*in Mensch als Objekt	Genese Problem
	Personifizierung	mathematisches Objekt	Eigenschaften math. Objekte
Redeform	**Figurenrede**	Bericht, Frage, Erklärung	unmittelbar
	Erzählerrede	Rätsel, Reflexion, Beschreibung	größere Distanz zum Erzählten

Die Kategorien der Erzähltheorie sind nicht disjunkt und hier für die Praxis im Mathematikunterricht vereinfacht. Eine weitere Differenzierung gibt es zum Beispiel im Typenkreis von Stanzel bzw. in der Erzähltheorie von Genette, der zusätzlich noch zwischen dem Wahrnehmenden und dem Sprechenden unterscheidet (Stanzel 1978, S. 81; Genette 1998).
Unter Erzählperspektive wird untersucht aus welcher Sicht erzählt wird. Der hier verwendete Begriff der ‚Innensicht' ist gekennzeichnet durch die eingeschränkte Wahrnehmung aus der Sicht einer Figur. Durch die Innensicht eignet sich diese Perspektive besonders gut, um die persönlichen Ein-

stellungen und Gedanken einer Figur subjektiv darzustellen. In einer mathematischen Erzählung kann beispielsweise die Einstellung einer Figur zur Mathematik beziehungsweise deren Nutzen gezeigt werden. Zum Beispiel drückt der Ich-Erzähler in Stewarts Briefen nach der Beschreibung einer mathematischen Vermutung mit folgenden Worten seine Gefühle aus: „Es ist grotesk. Ich liebe es." (Ian Stewart 2007, S. 171). Für Schüler*innen ist die Innensicht eine Möglichkeit, um sich mit einer mathematischen Fragestellung zu identifizieren und eigene Einstellungen gegenüber der Mathematik zu überdenken. Bei der Außensicht nimmt die narrative Instanz die Figuren von außen wahr und ist nur gegebenenfalls am Geschehen selbst beteiligt. Das Geschehen wird distanziert betrachtet. Beispielsweise werden dabei mathematische Objekte oder Figuren beschrieben: „Ein Zahlenwesen, das die Zahl Zwei darstellte, hieß auch kurz Zweier" (Hefendehl-Hebeker 1982, S. 2).

Die Figurengestaltung in mathematischen Erzählungen lässt sich grob in Menschen und personifizierte mathematische Objekte einteilen. Menschen treten als Objekte mathematischer Überlegungen auf wie in Hilberts Hotel oder als Mathematiker*innen. Dabei werden im mathematischen Kern häufig die Genese von Mathematik bzw. mathematische Problemstellungen erzählt. Erzählungen mit personifizierten mathematischen Objekten wie etwa in ‚Das Märchen vom bösen Drachen und dem klugen Bruch' (Paulitsch 1993) haben meistens die Eigenschaften mathematischer Objekte zum Inhalt.

Redeformen lassen sich grob in Figuren- und Erzählerrede einteilen. Figurenrede beinhaltet die ‚Erzählung von Worten', die mehr oder weniger wörtlich und unmittelbar wiedergegeben werden. Diese Gestaltung ist geeignet, um Erkenntniswege beispielsweise durch Fragen und Erklärungen direkt darzustellen wie im Sokratischen Dialog. Die Erzählerrede umfasst die ‚Erzählung von Ereignissen' und ist durch eine größere Distanz zum Geschehen gekennzeichnet. In mathematischen Erzählungen kommen in dieser Redeform häufig Reflexionen über die Mathematik und Rätsel vor. In der Regel treten in Erzählungen beide Redeformen in unterschiedlichem Ausmaß auf. Es gibt zahlreiche Kombinationsvarianten und -abstufungen der narrativen Dimensionen, auch wenn sicher einige naheliegender sein mögen als manch andere Kombinationen wie etwa die Innensicht eines Mathematikers bzw. einer Mathematikerin in Form einer Erzählerrede. Die erzähltechnischen Ausgestaltungen sind jedoch auch sehr relativ zu betrachten, da sie fließend ineinander übergehen können.

4. Phantasieerzählungen schreiben und rezipieren

Für das Arbeiten mit mathematischen Erzählungen im Unterricht ist das Bewusstsein der Mathematiklehrenden über unterschiedliche Wirkungen und Verwendungsmöglichkeiten der erzähltechnischen Dimensionen sinnvoll. Zum einen für die auch erzähltechnisch begründete Auswahl bereits existierender Erzählungen als auch zum Anleiten des Schreibprozesses von mathematischen Phantasieerzählungen. Mathematische Erzählungen können in unterschiedlichen Klassenstufen rezipiert und geschrieben werden. Von besonderer Bedeutung ist die Vorgabe des mathematischen Kerns, der thematisch begrenzt und gleichzeitig gehaltvoll sein sollte. Dies kann beispielsweise die Kontextualisierung bereits behandelter Stoffgebiete wie zum Beispiel der Satz von Pythagoras sein. Abhängig vom Ziel und dem mathematischen Gegenstand können erzähltechnische Vorgaben gemacht werden. Dies kann implizit geschehen durch Beispiele oder auch Anfangssätze, so dass die Schüler*innen sich auf die fiktive Ausgestaltung des mathematischen Kerns konzentrieren können. Das erzähltheoretische Wissen erwerben die Schüler*innen im Deutschunterricht etwa ab der 9. Klasse. Mit steigender Klassenstufe kann die Reduktion der Hilfestellungen erfolgen und narratologisches Wissen der Schüler*innen im Sinne eines fächerübergreifenden Spiralcurriculums vermehrt aktiv genutzt werden.

Literatur

Beckmann, A. (2003): Fächerübergreifender Mathematikunterricht. Teil 3: Mathematikunterricht in Kooperation mit dem Fach Deutsch. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Frenzel, K., Müller, M. & Sottong, H. (2004): Das Harun-al-Rashid-Prinzip. Die Kraft des Erzählens für das Unternehmen nutzen. München: Carl Hanser Verlag.

Genette, G. (1998): Die Erzählung. München: Wilhelm Fink Verlag.

Hefendehl-Hebeker, L.: Als die Null ins Zahlenreich kam. Ein mathematisches Märchen. In: Mathematiklehrer (1982) 1, S. 2-4.

Kubli, F. (2005): Mit Geschichten und Erzählungen motivieren. Beispiele für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Paulitsch, A. (1993): Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch. In: dies: Zu Gast bei Brüchen und den ganzen Zahlen. Köln: Aulis.

Ruf, U. & Gallin, P. (2011): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band I: Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik. Seelze: Friedrich Verlag.

Stanzel, F. K. (1978): Theorie des Erzählens. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Stewart, I. (2007): Warum (gerade) Mathematik? Eine Antwort in Briefen. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wille, F. (1984): Eine mathematische Reise in Cantors Paradies, Zenons Hölle und andere Erholungsgebiete. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Frank HEINRICH, Anika JERKE, Lara-Denise SCHUCK, Braunschweig

„Fehler" in Problembearbeitungsprozessen von Grundschulkindern

Die Förderung der Fähigkeit mathematische Probleme zu lösen zählt seit längerem als ein wichtiges Ziel von Mathematikunterricht und ist seit TIMSS auch und gerade für den Bereich Grundschule stärker in den Fokus mathematikdidaktischer Diskussion geraten.

Ein möglicher Ansatzpunkt zur Förderung der Problemlösefähigkeit besteht darin, sich in geeigneter Weise an Fehlern beim Bearbeiten mathematischer Probleme zu orientieren und produktiv mit diesen umzugehen. Dieser Gedanke ist nicht neu. Leider ist in der Breite aber noch recht wenig über derartige Fehler und dem Umgang mit ihnen bekannt. Erst wenn wir mehr darüber wissen, lassen sich möglicherweise hierauf bezogene Anknüpfungspunkte für eine gezielte didaktische Einflussnahme zur Förderung der Problemlösefähigkeit finden. Vor diesem Hintergrund sind wir im Rahmen empirischer Erkundungsstudien mit Schülerinnen und Schülern aus den Jahrgangsstufen 3 und insbesondere 4 folgenden Fragen nachgegangen:

Welche (Art) Fehler be- oder verhindern das Finden einer Lösung?

Welche (Art) Fehler werden von Grundschulkindern in welchem Umfang selbst erkannt, (a) im realen Handlungsvollzug und (b) retrospektiv?

Ihre Beantwortung möchten wir als Orientierungshilfe im Hinblick auf folgende didaktische Aspekte verstanden wissen: Wo können / sollten / müssten (lehrerseitig inszenierte) Maßnahmen im Kontext Fehler(erkennung) ansetzen? Wie sollten sie beschaffen sein?

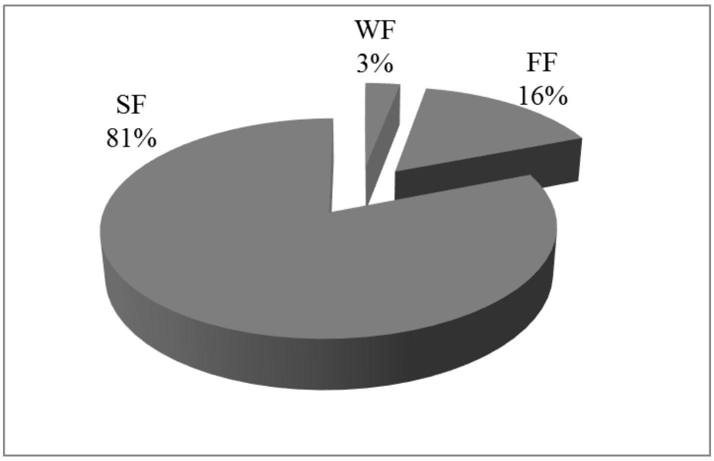
Die Erkundungsstudie umfasste 15 eigenständig geführte Problembearbeitungsprozesse von Grundschulkindern, die gemäß Lehrerurteil als eher leistungsstark in Mathematik anzusehen sind, freiwillig an den Studien teilgenommen haben und überdies extrinsisch motiviert waren. Als Probleme verwendeten wir drei des Typs „problemhaltige Textaufgaben" (vgl. Rasch 2001). Es kamen das „Ameisenproblem" (vgl. z.B. Westermann 2009), das „Kühe-Enten-Problem" und das „Teufelsproblem" (beide Probleme vgl. Heinrich, Pawlitzki, Schuck 2013) gleichberechtigt zum Einsatz. Die Lernenden hatten vorher keine explizite heuristische Schulung erfahren, wurden jedoch auf das laute Denken als Untersuchungsmethode vorbereitet. Von der jeweils 20-minütigen Problembearbeitungszeit wurde eine Videoaufzeichnung angefertigt. Darüber hinaus sah sich jedes Kind unmittelbar nach Beendigung seiner Problemlösebemühungen die Aufzeichnung an und

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 499–502). Münster: WTM-Verlag

war dabei angehalten zu sagen, was ihm beim Betrachten durch den Kopf geht. Mit dieser Maßnahme wollten wir auch prüfen, wie es Grundschulkindern gelingt, sich aus einer gewissen Distanz heraus mit dem selbst Getanen zu befassen. Die Analyse der Materialien und Dokumente erfolgte in mehreren Bearbeitungsstufen in einem kleinen Expertenteam nach der Methode der konsensuellen Validierung. Unser Analyseteam hat die Bearbeitungsgänge der Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf Fehler untersucht und sich an der Fehlereinteilung von Geering (1995) orientiert. Dabei wurde zwischen Fertigkeitsfehlern (FF), Wissensfehlern (WF) und Strategiefehlern (SF) unterschieden. Hinsichtlich der Verwendung dieser Begrifflichkeiten verweisen wir auf Geering (ebenda) und Heinrich (2012).

Strategiefehler und ihre möglichen Ursachen

In den 15 analysierten Problembearbeitungsprozessen konnten wir insgesamt 37 Fehler herausarbeiten, wobei Strategiefehler 30-mal vorkamen und so den größten Anteil ausmachten.



Bei diesem Ergebnis ist es sinnvoll, sich im Weiteren vorrangig mit den identifizierten strategischen Defiziten zu beschäftigen. Wir führen zunächst stichpunktartig aus, welcher Art sie sind.

- Verlieren von Zwischenschritten, d.h. Zwischenergebnisse wurden nicht oder nicht geeignet festgehalten, z.B. liegt keine (voll)informative Skizze vor, sozusagen eine Form unzweckmäßigen Arbeitens mit heuristischen Hilfsmitteln
- Lösungsbemühungen erfolgen ohne (gebührende) Berücksichtigung gegebener Bedingungen
- Verworfenes wird nicht „gelöscht“, sondern weiterverwendet
- „Drauflosrechnen“ mit Zahlen aus dem Problem, mitunter auch Einbeziehung unerklärlichen Zahlenmaterials

- voreiliges Verfolgen eines (ungeeigneten) Weges
- fehlende, unvollständige oder unzweckmäßige Kontrolle von Ergebnissen und / oder Vorgehensweisen, auch fehlender Abgleich des gefundenen Ergebnisses mit der Problemstellung

Als Ursachen für diese festgestellten lösungshinderlichen Verhaltensweisen sehen wir vor allem

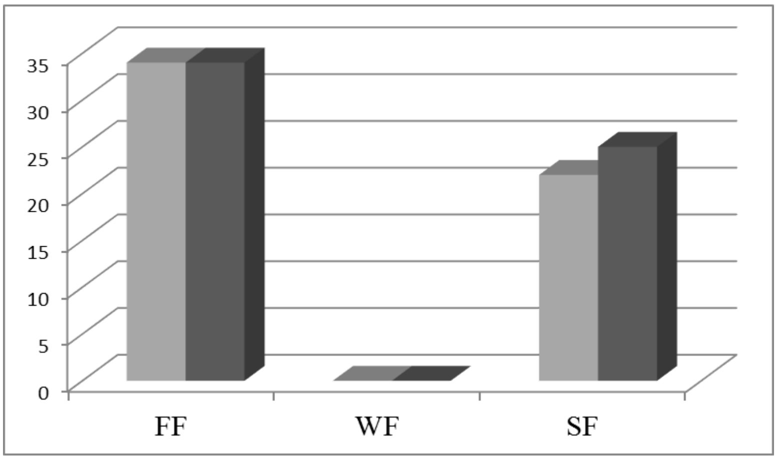
- mangelndes Textverständnis (vgl. Radatz 1980). Gemäß unserer Auswertungen sind etwa 60% der identifizierten Strategiefehler dieser Ursache geschuldet, was wohl mit dem Problemtyp zusammenhängt.
- eine unzureichende Situationsanalyse (vgl. Duncker 1935).
- noch keine ausgeprägten Erfahrungen im heuristischen Arbeiten, d.h. noch geringes Wissen über die Brauchbarkeit verschiedener Hilfsmittel und Strategien (auch Kontrollstrategien) bei der Lösungssuche (vgl. Selz 1913).

Sofern sich diese Befunde im größeren Ausmaß bestätigen sollten, hätte Mathematikunterricht die Aufgabe zu übernehmen, dem als defizitär Erkanntem entgegenzuwirken und dabei vor allem bei den Ursachen anzusetzen. Als besonders wichtig erachten wir es (für den hier verwendeten Problemtyp), geeignete Maßnahmen zum Textverstehen einzusetzen.

Erkennen eigener Fehler

Grundschulkinder erkannten im realen Handlungsvollzug aus eigener Kraft insbesondere Fertigkeitsfehler (etwa 60%). Das gibt Anlass zu vermuten, dass Problemlösen auch Potenzial birgt, derartige Fehler selbst zu finden und ggf. zu beheben. Wissens- und (besonders bedeutsame) Strategiefehler wurden im realen Handlungsvollzug hingegen kaum selbst erkannt. Es bedarf daher weiterer Maßnahmen, um Prozesse des Erkennens (sowie ggf. Analysierens und Behebens) dieser anzuregen. Ein stärkerer Einfluss der Lehrperson scheint hier unverzichtbar.

Eine retrospektive Befassung mit dem Getanen scheint nach den bisherigen Befunden (vor dem Hintergrund der hier verwendeten Forschungsmethode) für Grundschulkinder hingegen weniger geeignet, um Fehlerhaftes in ihren Problemlösebemühungen selbst zu erkennen. Der Zuwachs an erkannten Fehlern gegenüber den bereits im realen Handlungsvollzug festgestellten Fehlern fällt recht gering aus wie das folgende Diagramm ausweist. In der jeweils linken Säulenreihe ist der prozentuale Anteil der bereits im realen Handlungsvollzug bemerkten Fehler zu sehen. Den rechts stehenden Säulenreihen ist zu entnehmen, wie hoch der Anteil selbst erkannter Fehler nach der retrospektiven Auseinandersetzung insgesamt ausfiel. Es hat in der Reflexion also lediglich einen kleinen Zugewinn an erkannten Strategiefehlern gegeben (absolut: +1).



Der geringe Zuwachs kann u.a. mit dem sich noch in Entwicklung befindenden Reflexionsvermögen der Kinder erklärt werden (vgl. z.B. Hasselhorn 2004). Die erkennbare Selbstreflexionsleistung bei den meisten der beteiligten Kinder bestand in einer teilweisen Wiedergabe des Getanen. Nur in Einzelfällen erfolgte eine Auseinandersetzung mit dem Lösungsvorgehen in Form einer Bewertung (im Hinblick auf Fehler). In vergleichbaren Studien mit Lernenden aus der Sekundarstufe II (z.B. Heinrich 2012) fiel der beschriebene Zuwachs hinsichtlich des eigenen Erkennens von Wissens- und Strategiefehlern höher aus, was in der fortentwickelten Reflexionsfähigkeit dieses Personenkreises begründet sein kann.

Literatur

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer.

Hasselhorn, M. (2004). Individuelle Lernvoraussetzungen zwischen sechs und sechzehn Jahren: Allgemeine und differentielle Entwicklungsveränderungen. In C. Aeberli (Hrsg.), *Lehrmittel neu diskutiert* (S. 11-25). Zürich: Avenir Suisse.

Heinrich, F. (2012). Fehler in eigenen Problembearbeitungsprozessen erkennen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.* Münster: WTM-Verlag.

Heinrich, F., Pawlitzki, A., Schuck, L.-D. (2013). Problemlöseunterricht in der Grundschule. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013.* Münster: WTM-Verlag.

Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim: Franzbecker.

Selz, O. (1913): *Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufes*. Stuttgart: Spemann.

Westermann, A. (2009). *Lösungshemmendes Verhalten von Grundschulkindern beim Bearbeiten mathematischer Probleme*. Masterarbeit, TU Braunschweig.

Hannah HEINRICHS, Gabriele KAISER, Hamburg

Förderung und Messung diagnostischer Kompetenz von Mathematik-Lehramtsstudierenden

1. Einleitung

Diagnostische Kompetenz ist unerlässlich, um Lernprozesse zu unterstützen und individuelles Lernen zu ermöglichen und auf diese Weise Unterricht angemessen an die vielfältigen Lernvoraussetzungen der Lernenden anzupassen. Unterschiedliche empirische Studien betonen die Bedeutsamkeit diagnostischer Kompetenz für die erfolgreiche Durchführung von Unterricht (Anders et al. 2010). Aufgrund der großen Bedeutung diagnostischer Kompetenz ist das Ziel der vorliegenden Studie die Entwicklung einer Seminareinheit zur Förderung fehlerdiagnostischer Kompetenz bereits in der ersten Phase der Lehrerbildung und die Evaluation ihrer Wirksamkeit.

2. Theoretischer Rahmen der Arbeit

Allgemein wird die diagnostische Kompetenz als „die Gesamtheit der zur Bewältigung von Diagnoseaufgaben erforderlichen Fähigkeiten“ bezeichnet (Schrader 2011, S. 683). Die durchgeführte Studie lehnt sich eine umfassende Beschreibung diagnostischer Kompetenz an, indem in Anlehnung an die Begrifflichkeiten der pädagogischen Diagnostik fehlerdiagnostische Kompetenz definiert wird als die Kompetenz, die notwendig ist, um Prozessdiagnostik in Unterrichtssituationen mit informellen bis semi-formellen Methoden durchzuführen und dabei zu impliziten Urteilen zu kommen, auf deren Basis geeignete Modifikationsentscheidungen auf der Mikroebene gefällt werden können. Als Diagnosegegenstand dienen in dieser Arbeit schriftlich fixierte Schülerfehler.

Um die fehlerdiagnostische Kompetenz zu beschreiben, wurde in Anlehnung an Modelle von Rheinberg (1978), Jäger (2010) und Klug et al. (2013) ein 3-phasiges Prozessmodell zur Beschreibung idealisierter diagnostischer Prozesse in Fehlersituationen entwickelt.

Dieses Modell besteht zunächst aus der Wahrnehmung und Beschreibung des Fehlermusters. Darauf folgt eine Phase, in der Hypothesen über mögliche Fehlerursachen aufgestellt werden, um im dritten Schritt auf den Umgang mit dem Fehler zu blicken. In der vorliegenden Untersuchung werden insbesondere die Phase der Ursachenfindung und des Umgangs in den Blick genommen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 503–506). Münster: WTM-Verlag

Der Diagnose von Fehlerursachen wird eine hohe Bedeutung zugemessen, was sich auch in der großen Anzahl stofflich basierter Fehleranalysen in unterschiedlichen Inhaltsgebieten der Mathematik zeigt (Padberg und Benz 2011). Bezüglich des Umgangs mit dem Fehler gibt es bisher jedoch nur relativ wenige Forschungsergebnisse. Dieses erschwert, normative Aussagen über die Angemessenheit unterschiedlicher Umgangsweisen zu treffen. Aus diesem Grunde, wurde in der vorliegenden Untersuchung nominal zwischen Umgangsweisen hinsichtlich zweier Aspekte unterschieden:

- Instruktion und Konstruktion: Hier wird unterschieden, ob ein instruktivistisch orientiertes Vorgehen gewählt wird, indem Erklärungen gegeben und Zusammenhänge gezeigt werden, oder ein konstruktivistisch orientiertes Vorgehen präferiert wird, indem die Schülerin oder der Schüler zur Beteiligung aufgefordert wird (Helmke 2010).
- Formelle und informelle Interaktion: Beim Umgang mit dem Fehler ist laut Schoy-Lutz (2005) wesentlich zu unterscheiden zwischen der informellen Interaktion mit einzelnen Schülerinnen und Schülern und der formellen Interaktion im Plenum.

3. Erhebungs- und Auswertungsmethodik

Um zu untersuchen, wie sich fehlerdiagnostische Kompetenz im Rahmen einer Seminarkurzeinheit fördern lässt und die Wirksamkeit dieser Förderung zu evaluieren, wurde das oben entwickelte Prozessmodell zur Beschreibung idealisierter fehlerdiagnostischer Prozesse genutzt, um eine Seminareinheit sowie einen Vor- und Nachtest zu entwickeln. Die Seminareinheit dauerte vier Seminarsitzungen (90 Min) und wurde in insgesamt 8 Seminaren durchgeführt, die an den Universitäten in Bremen, Hamburg, Oldenburg und Vechta in der Zeit von Oktober bis Dezember 2013 durchgeführt wurden (N=138).

Der Aufbau der Seminareinheit orientierte sich dabei an dem oben beschriebenen Prozessmodell. In der ersten Sitzung wurde der Fokus auf Fehlerursachendiagnosen gelegt. In der zweiten Sitzung wurden mögliche Ansätze zum Umgang mit dem Fehler erarbeitet und diskutiert. In der dritten Sitzung folgte die systematische Anwendung des Diagnosekreislaufs auf mehrere unterschiedliche arithmetische Fehler und in der vierten Sitzung wurde ein Ausblick auf Fehler in der Algebra gegeben.

Zur Evaluation der Seminareinheit, wurden ein Vor- und ein Nachtest entwickelt, die zu den drei Phasen des Diagnosekreislaufs mehrere offene und geschlossene Items enthielten. Mithilfe der Item-Response-Theory wurden die Items zur Ursachendiagnose ausgewertet, so dass jeder Probandin und jedem Probanden ein Fähigkeitsparameter bezüglich der Kompetenz zur

Ursachendiagnose zugeordnet werden konnte. Die geschlossenen Items zum Umgang mit dem Fehler wurden mithilfe einer latenten Klassenanalyse ausgewertet, so dass mehrere Klassen von Studierenden unterschieden werden konnten, die einen ähnlichen Umgang mit dem Fehler präferierten. Die Ergebnisse dieser Analysen werden im Folgenden kurz dargestellt.

4. Erste Ergebnisse

Bezüglich der Kompetenz zur Ursachendiagnose ließ sich eine Veränderung vom Vor- zum Nachtest von M_1=50 (SD_1=10) auf M_2=51,4 (SD_2=8,6) feststellen. In einem einseitigen t-Test mit verbundenen Stichproben erweist sich dieses Ergebnis als signifikant mit einer allerdings kleinen Effektstärke (t(135)=-1,629, p(1-seitig)=0,05, d=0,15).

Hinsichtlich des Umgangs mit dem Fehler ergaben sich in einer latenten Klassenanalyse drei Klassen von Studierenden, die sich bezüglich des präferierten Umgangs mit dem Fehler unterschieden. So ergab sich eine Klasse von Studierenden, die den instruktivistischen Items mit höherer Wahrscheinlichkeit zustimmten als Studierende der anderen Klassen. Das bedeutet, dass diese Studierenden bei Items, die ein instruktivistisches Vorgehen im Sinne einer Erklärung oder des Vorrechnens vorschlugen eher zustimmten (also auf der 4-punktigen Likert-Skala mit hoher Wahrscheinlichkeit „würde ich machen“ oder „würde ich eher machen“ auswählten). Die Studierenden dieser Klasse bevorzugen demnach ein instruktivistisch orientiertes Vorgehen (ca. 34,6% der Studierenden der Studie). Die zweite Klasse von Studierenden stimmte den instruktivistischen Items weniger häufig zu und wird aus diesem Grund als konstruktivistisch orientierte Klasse bezeichnet (ca. 44,6%). Die dritte Klasse von Studierenden stimmt ebenso wie die konstruktivistisch orientierte Klasse den instruktivistischen Items weniger stark zu und zeigt zudem eine Ablehnung gegenüber Items, die ein formelles Vorgehen beim Umgang mit dem Fehler vorschlagen. Diese Klasse wird als die informell-konstruktivistisch orientierte Klasse bezeichnet (ca. 25,8%).

Bei dem Vergleich der Veränderung des Umgangs mit dem Fehler vom Vor- zum Nachtest zeigt sich, dass 55% der Studierenden im Nachtest eine ähnliche Präferenz bezüglich des Umgangs mit dem Fehler zeigten, wie im Vortest. 14% der Studierenden wechselten in Richtung einer stärker instruktivistisch orientierten Umgangsweise und 31% wechselten zu einer stärker konstruktivistisch orientierten Umgangsweise.

5. Fazit

Es zeigte sich, dass bereits die achtstündige Seminarkurzeinheit einen Einfluss auf die fehlerdiagnostischen Kompetenzen der Studierenden haben kann. Gründe für die nur geringfügige Veränderung der Kompetenz zur Ursachendiagnose liegen vermutlich in der kurzen Dauer der Seminareinheit und dem anspruchsvollen Transfer der Ursachendiagnosen zwischen unterschiedlichen Fehlern, insbesondere, wenn diese unterschiedlichen mathematischen Inhaltsbereichen entstammen. Hinsichtlich des Umgangs mit Fehlern hat sich gezeigt, dass bei vielen Studierenden eine Öffnung für konstruktivistisch orientierte Herangehensweisen stattgefunden hat, die vermutlich positiv beeinflusst wurde durch die Vielfalt der Erklärungswege, die im Seminar diskutiert wurden.

Literatur

Anders, Yvonne; Kunter, Mareike; Brunner, Martin; Krauss, Stefan; Baumert, Jürgen (2010): Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften und ihre Auswirkungen auf die Leistungen ihrer Schülerinnen und Schüler. In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht* 57, S. 175–193.

Helmke, Andreas (2010): Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Seelze-Velber: Klett/Kallmeyer.

Jäger, Reinhold S. (2010): Diagnostische Kompetenz und Urteilsbildung als Element von Lehrprofessionalität. In: Olga Zlatkin-Troitschanskaia, Klaus Beck, Detlef Sembill, Reinhold Nickolaus und Regina Mulder (Hg.): Lehrerprofessionalität. Was wir wissen und was wir wissen müssen. Landau: Verl. Empirische Pädagogik, S. 105–116.

Klug, Julia; Bruder, Simone; Kelava, Augustin; Spiel, Christiane; Schmitz, Bernhard (2013): Diagnostic competence of teachers: A process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. In: *Teaching and Teacher Education* 30, S. 38–46.

Padberg, Friedhelm; Benz, Christiane (2011): Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Rheinberg, Falko (1978): Der Lehrer als diagnostische Instanz. In: Josef Klauer und Anton Reinartz (Hg.): Handbuch der Sonderpädagogik. Berlin: Carl Marhold, S. 21–30.

Schoy-Lutz, Monika (2005): Fehlerkultur im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung anhand der Unterrichtseinheit "Einführung in die Satzgruppe des Pythagoras". Berlin: Franzbecker.

Schrader, Friedrich-Wilhelm (2011): Lehrer als Diagnostiker. In: Ewald Terhart (Hg.): Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf. Münster: Waxmann, S. 683–698.

Gaby HEINTZ, Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Heinz LAAKMANN, Florian SCHACHT, Reinhard SCHMIDT

Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht

Eine gemeinsame Arbeitsgruppe von MNU und T3 beschäftigt sich seit 2013 mit der Fragestellung, was unter digitalen Werkzeugkompetenzen zu verstehen ist, und konkretisiert ihre Erwartungen entlang von Aufgabenbeispielen (Heintz et al. 2014). Ebenso gibt die Arbeitsgruppe Hinweise dazu, wie Lernende ihren Einsatz von digitalen Werkzeugen im Arbeitsprozess und schriftlichen Überprüfungen dokumentieren.

Werkzeuge spielen eine bedeutsame Rolle im Mathematikunterricht. Mit den Fortschritten in der Mathematik und mit den neuen Werkzeugen änderte sich im Laufe der Geschichte auch der Mathematikunterricht in seinen Zugängen zu Themen, didaktischen Möglichkeiten und letztlich auch in seinen Inhalten. Eine erste Begriffsbestimmung:

„Unter Werkzeug im unterrichtlichen Zusammenhang verstehen wir flexibel einsetzbare Hilfsmittel beim Lehren und Lernen, Lernwerkzeuge also. (...) Gute Lernwerkzeuge sorgen für eine Arbeitserleichterung und ermöglichen bzw. unterstützen wichtige Lernaktivitäten." (Elschenbroich 2011)

Im Mathematikunterricht spielen folgende digitale Werkzeuge eine besondere Rolle:

1. Dynamische Geometrie-Software: Konstruktionen und Nutzen von Zugmodus und Ortslinien für Entdeckungen und Analyse
2. Tabellenkalkulation: Rechnen mit Zahlen, Variablen und Formeln, Visualisierung großer Datenmengen in Diagrammen
3. Funktionenplotter: Berechnung und Visualisierung funktionaler Zusammenhänge
4. Computeralgebra: Visualisierung algebraisch bzw. analytisch erzeugter funktionaler Zusammenhänge und Nutzung von Variablen als formale Zeichen (Algebra)
5. Multirepräsentation: Vernetzung obiger Werkzeuge, Erhöhung der methodischen und didaktischen Möglichkeiten.

Die Potentiale digitaler Werkzeuge sind für vielfältige mathematische Gegenstandsbereiche untersucht, unterrichtspraktische Umsetzungsvorschläge sind ebenso umfassend vorhanden. Wenig geklärt ist hingegen die Frage, über welche Werkzeugkompetenzen Schülerinnen und Schüler bei Nutzung digitaler Werkzeuge verfügen sollten, insbesondere zum mittleren Schulabschluss bzw. im Abitur, und was unter Werkzeugkompetenz zu verstehen ist. Vor diesem Hintergrund hat die MNU-T3-Arbeitsgruppe sich für die folgende Arbeitsdefinition von *digitaler Werkzeugkompetenz* entschieden:

Digitale Werkzeugkompetenz bedeutet, mit digitalen Werkzeugen kompetent Mathematik zu betreiben.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 507–510). Münster: WTM-Verlag

Dies bringt zum Ausdruck, dass Werkzeuge zielgerichtet und vor dem Hintergrund eines jeweils spezifischen Zwecks, und zwar zur Bearbeitung mathematischer Probleme und zur Unterstützung des Lernens von Mathematik zum Einsatz kommen[1]. Je nach mathematischem Gegenstandsbereich und je nach Problemsituation kann die jeweils benötigte Kompetenz dadurch sehr spezifisch sein. Insofern liegen Werkzeugkompetenzen – so wie sie die Arbeitsgruppe versteht – quer zu den inhaltsbezogenen Leitideen der Bildungsstandards. In der Kompetenz K5 wird dazu ausgeführt:

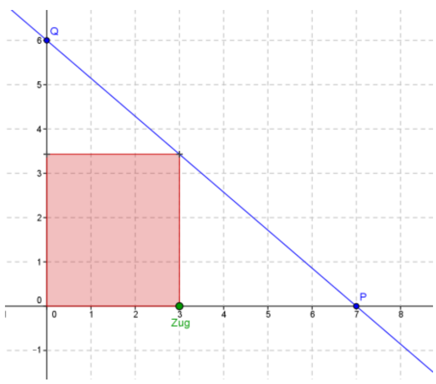
Die Schülerinnen und Schüler können

- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt nutzen (AB I)
- mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und effizient einsetzen (AB II)
- die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren (AB III). (KMK 2012)

Durch die Nutzung von digitalen Werkzeugen lassen sich durch systematisches Variieren mathematische Zusammenhänge mit Hilfe von Variablen entwickeln und durch die Erzeugung bzw. Visualisierung von Graphen etwa Funktionen, Funktionenscharen oder algebraisch erzeugte Ableitungs- und Integralfunktionen darstellen. Auf diese Weise unterstützen digitale Werkzeuge sowohl inhalts- als auch prozessbezogene Kompetenzen. Heuristische Strategien werden im Sinne der dritten Grunderfahrung nach Winter ermöglicht.

Beispiel: Optimierung (Klasse 8-10)

Eine Gerade schneidet die *x*-Achse und die *y*-Achse. Zwischen der Geraden und den beiden Achsen liegt ein Rechteck. Ein Rechteckspunkt soll auf der Geraden liegen und zwei Rechtecksseiten auf den Achsen. Gesucht ist das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt.



Eine derartige Aufgabe kann man nutzen, um in das Thema Quadratische Funktionen einzusteigen oder Extremwertaufgaben elementar ohne Analysis zu bearbeiten bis zu einer Algebraisierung der Zielfunktion. Gegenüber dem händischen Zugang bietet eine Bearbeitung mit digitalen Werkzeugen, insbesondere mit einem Multirepräsentationswerkzeug, einen Mehrwert, weil die Aufgabe zunächst geometrisch erkundet werden kann und dabei auch Werte direkt in die Tabellenkalkulation und einen Funktionenplotter übertragen werden können. Durch Ziehen an den Punkten P und

[1] Unter Werkzeugkompetenz verstehen wir explizit nicht die Bedienung von Geräten und Programmen.

Q auf den Achsen kann auch die Aufgabe variiert werden.

Die folgenden digitalen Werkzeugkompetenzen spielen eine wesentliche Rolle:

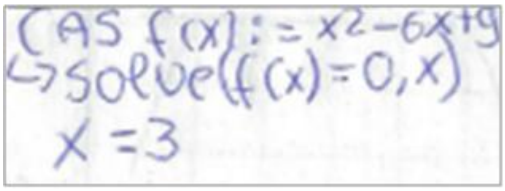
Die Lernenden…

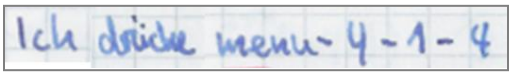
- verwenden dynamische Geometriesoftware als heuristisches Instrument in vorbereiteten digitalen Arbeitsblättern, indem sie durch zielgerichtetes Ziehen das Rechteck schrittweise und langsam verändern und dadurch Muster und wesentliche Eigenschaften quadratischer Funktionen entdecken,
- wechseln unter Anleitung die Darstellungsform (Tabelle, Graph, Term), indem Sie die im DGS erkundete Variation des Rechtecks in die Tabellenkalkulation übertragen und schließlich einen passenden Funktionsterm für den zugrunde liegenden quadratischen Zusammenhang ermitteln,
- stellen Funktionsgraphen mit digitalen Werkzeugen dar (z. B. mit einem Funktionenplotter oder als Ortslinie) und wählen ein passendes Koordinatensystem, indem sie die funktionale Abhängigkeit in einem zweiten Grafikfenster sichtbar machen,
- nutzen digitale Werkzeuge als Kontrollinstanz, indem sie die zum Funktionsterm passende Parabel mit den zuvor ermittelten Wertepaaren abgleichen,
- reflektieren über die Grenzen der unterschiedlichen Darstellungsformen, indem sie den spezifischen Betrag der einzelnen Darstellungsformen zur Problemlösung benennen und offene Fragen als Ausgangspunkt der Weiterarbeit sammeln.

Dadurch leistet die Problemstellung einen guten Beitrag zur Erreichung der Kompetenzerwartungen zum Ende der Klasse 8, wie sie in der Veröffentlichung der Arbeitsgruppe (Heintz et al. 2014) formuliert werden[2].

Dokumentation von Bearbeitungsprozessen

Eine wesentliche Herausforderung im Unterricht ist darüber hinaus die Frage, wie Schüler die Aufgabenbearbeitung dokumentieren und damit Einsatz und Nutzen von Werkzeugen auch Gegenstand der expliziten Reflexion durch die Schüler sind.





Zwei typische Beispiele (Einführungsphase Gymnasium) zeigen eine mögliche Spannbreite. Hinsichtlich der Dokumentation mathematischer Kompetenzen machen die Beispiele die Schwierigkeit angemessener Dokumentationen u. a. wegen der zu starken Betonung der CAS-Syntax deutlich. Werkzeugkompetenz und Kommunikation bzw. Dokumentation sind in diesem Sinne auf das Engste miteinander verknüpft. Die Anforderungen an Dokumentationskompetenzen unterscheiden sich dabei in Lern- und Leistungssituationen. Erarbeitet wurden Kriterien für die Nutzung von Fach-

[2] Dort findet sich eine umfangreichere Liste, die die Erwartungen für das Ende der Jahrgangsstufe 6, 8, 10 und 12 umfasst.

und Werkzeugsprache, die diese Unterscheidung aufgreifen. Lernverlaufs-orientierte Gütekriterien berücksichtigen die Tatsache, dass sich bei Lernenden im Mathematikunterricht nicht nur begriffliche Prozesse vollziehen, sondern dass auch der Umgang mit und die Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache erlernt werden müssen. Demgegenüber tragen lernstandsorientierte Gütekriterien der Tatsache Rechnung, dass die Dokumentation von Bearbeitungen etwa in zentralen Prüfungen einen höheren Grad an fach- und werkzeugsprachlicher Konsolidiertheit haben sollte als etwa zu Beginn einer Lerneinheit.

Konsequenzen für den Mathematikunterricht

Am ausgeführten Beispiel wird deutlich, wie eng digitale Werkzeugkompetenzen mit den übrigen prozessbezogenen Kompetenzen wie Problemlösen und Argumentieren und Kommunizieren verwoben sind. Erfolgreicher Einsatz digitaler Werkzeuge kann nur dann gelingen, wenn diesem Umstand Rechnung getragen wird und den Unterrichtenden klar ist, dass digitale Werkzeugkompetenz mehr ist als bloße Bedienkompetenz. Dies hat dann auch Konsequenzen im Bereich der Dokumentation.

Die Optimierungsaufgabe zeigt außerdem, dass der Einsatz eines digitalen Lernwerkzeuges einen großen Beitrag zur Begriffsbildung leisten kann, wenn die Lernenden kompetent mit DGS, Funktionenplotter und Tabellenkalkulation umgehen können und der Unterricht nicht einseitig auf eine Darstellungsform fokussiert. So verstanden ergeben sich aus dem sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge eine Erweiterung der didaktischen und methodischen Möglichkeiten für Lehrende und eine Zunahme möglicher Schüleraktivitäten. Ein echter mathematischer Mehrwert wird insbesondere durch den Einsatz von dynamischen Multirepräsentationswerkzeugen erlebbar, weil hier in unterschiedlichen Repräsentationsmodi gearbeitet werden kann. In der Veröffentlichung der Arbeitsgruppe (Heintz et al. 2014) wird anhand von weiteren Beispielen zu Standardthemen des Mathematikunterrichts gezeigt, welche Werkzeugkompetenzen die Lernenden über die einzelnen Jahrgangsstufen bis zum Abitur erwerben können.

Literatur

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2011): Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht. In: Elschenbroich/Greefrath (Hrsg.): Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen. MV-Wissenschaft, S. 8 -10

Heintz, Gaby; Elschenbroich, Hans-Jürgen; Laakmann, Heinz; Langlotz, Hubert; Poethke, Mario; Rüsing, Michael; Schacht, Florian; Schmidt, Reinhard; Schmidt, Ulla; Tietz, Carsten (2014): Digitale Werkzeugkompetenzen von Klasse 5 bis zum Abitur. (Erscheint 2014)

Johanna HEITZER, Aachen

Lochkarten zur Primfaktorzerlegung – Plädoyer für die enaktive Rettung einer kaum zu überschätzenden Zahldarstellung

Im Zentrum dieses Beitrags steht ein auf der Primfaktorzerlegung beruhender Lochkartensatz, dessen Eigenschaften aufs Engste mit denen der natürlichen Zahlen zusammenhängen. Dieses nicht elektronische, preiswerte Medium hat eine Reihe didaktischer Vorteile: Schon in der Existenz ‚materialisiert' sich der Hauptsatz der Arithmetik, die Anfertigung wirft mathematisch hoch interessante Fragen auf, die Nutzung – gekrönt von der ggT-Bestimmung auf einen Blick – motiviert Entdeckungen über die multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen und schlägt Brücken zu deren auf rein formaler Ebene meist überfordernder Begründung, denn:

> „Die Strukturen der Intelligenz können nur durch konkrete Aktivität gebildet werden [..] unter Einbeziehung aller Sinne und größtmöglicher Bewegungsfreiheit.“ Jean Piaget, 1968

1. Blick in den Lehrplan

Die Silbe „prim“ kommt in den KMK-Bildungsstandards und in den meisten Länderlehrplänen nicht vor. Allerdings werden (z.B. im Kernlehrplan G8 von NRW) das Bestimmen von Teilern und Vielfachen, das Anwenden einfacher Teilbarkeitsregeln und vorteilhaftes Rechnen mit ganzen und rationalen Zahlen gefordert. Das ist ohne Kenntnis von Primzahlen schwierig. Tatsächlich fallen Primzahlen implizit schon in der Primarstufe als diejenigen auf, die von keiner der nichttrivialen Einmaleinsreihen getroffen werden, und kommen in den gängigen Unterstufenbüchern vor.

2. Mathematischer Kern

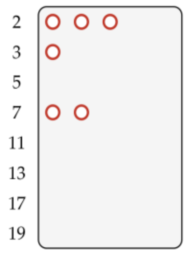
Grundlage des hier zentralen Stücks Mathematik und des Mediums Lochkarten ist der Hauptsatz der Arithmetik: Jede natürliche Zahl größer 1 kann in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden. Diese Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig. Bewiesen werden Existenz und Eindeutigkeit mittels Jagd nach dem kleinsten nicht-primen Verbrecher. Für die Existenz benötigt man die Zerlegbarkeit jeder Nicht-Primzahl in zwei kleinere Faktoren, für die Eindeutigkeit das Lemma von Euklid, nach dem jeder Primteiler eines Produkts zweier Zahlen bereits einen der Faktoren teilt. Wasserdicht wurde das gut zwei Jahrtausende alte Ergebnis im 18. Jahrhundert mittels des Lemmas von Bézout bewiesen: Im Ring der ganzen Zahlen kann aus jedem Paar teilerfremder Zahlen die 1 linearkombiniert werden; letztlich durch Umkehren des Euklidischen Algorithmus.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 511–514). Münster: WTM-Verlag

3. Behandlung in der Schule mit dem Medium Lochkarten

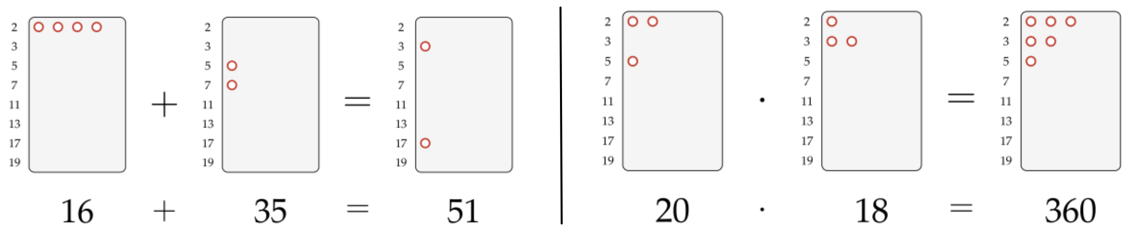
Im Unterricht wird man sich der Hauptsatzaussage eher konstruktiv und unausgesprochen nähern. Beim spielerischen Üben der Teilbarkeitsregeln etwa gewinne zu jeder vorgegebenen Zahl das Produkt mit den meisten Faktoren (die 1 natürlich ausgenommen): Zu 1176 ist dann $2\cdot4\cdot147$ besser als $8\cdot147$, $2\cdot4\cdot3\cdot49$ noch besser und $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot7$ nicht zu schlagen. Systematisieren und Durcharbeiten für genügend Zahlen befördern die Überzeugung von genau einer geordneten Primfaktorzerlegung pro natürlicher Zahl: $1176 = 2\cdot588 = 2\cdot2\cdot294 = 2\cdot2\cdot2\cdot147 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot49 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot7$

Dann kann mit dem Lochkartensatz konfrontiert oder dieser unter Verweis auf die Programmierung der ersten Computer durch Lochkarten entwickelt werden: Die Zeilen gehören der Reihe nach zu den aufsteigenden Primzahlen und werden links beginnend so oft gestanzt, wie letztere in der Zerlegung vorkommen. Rechts sieht man die Karte der 1176.[1]



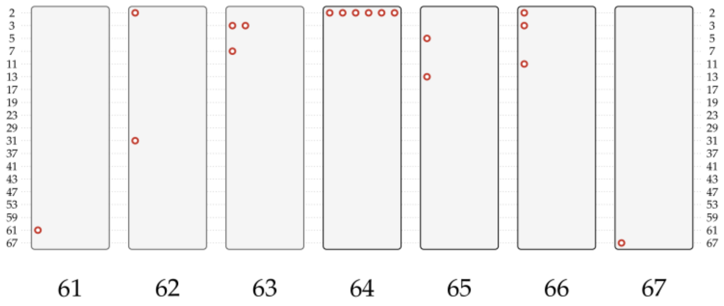
Übersetzungsübungen von der Zahl zur Karte und umgekehrt liefern Denkanstöße und Argumentationsanlässe in natürlicher Weise: Welches ist die kleinste Zahl, die auf keine Karte mehr passt? Welches die größte, die noch darauf passt? Eine Karte hat nur in einer Zeile Löcher. Was kannst du über die Zahl sagen? Woran erkennt man die Karten von Quadratzahlen? Und was ist eigentlich mit der Kein-Loch-Karte? Anschließend mag über interessante Kartenpaare nachgedacht werden: Karte A hat alle Löcher von Karte B und noch einige mehr. Zwei Karten haben nicht ein einziges Loch gemeinsam. Zwei Karten haben das gleiche Lochmuster nur in der Höhe gegeneinander verschoben. Was gilt jeweils für die zugehörigen Zahlen?

Es liegt nah, mit den Zahlenkarten auch einfache **Rechnungen** zu versuchen. Dabei zeigen sich markante Unterschiede: Für Strichrechenarten ist die Kartendarstellung äußerst sperrig. Es geht praktisch nur mittels Hin- und Rückübersetzung. Punktrechenarten dagegen sind mit den Karten einfach: Es handelt sich um das Addieren oder Subtrahieren von Löchern. Bei allen bisher bekannten Zahldarstellungen war das genau umgekehrt!



---

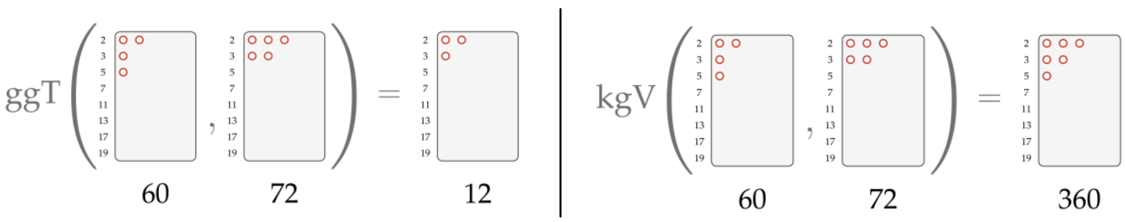
[1] Bastelanleitungen für den Demonstrationskartensatz und für Schülerkartensätze finden Sie ebenso wie Lösungen und weitere Aufgaben in [Heitzer, 2013].



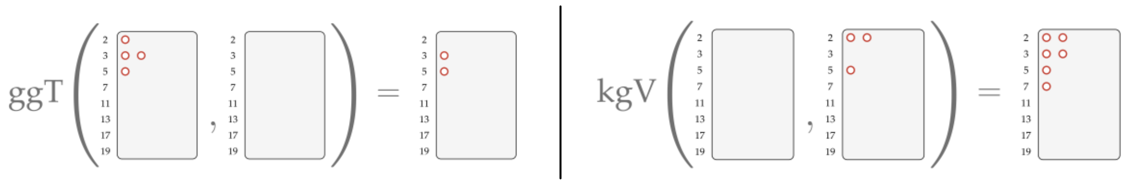
Wie ungünstig die Kartendarstellung für alles Additive ist, zeigt auch einfaches Zählen wie in der Abbildung rechts. Schlicht und regelmäßig stellen sich dagegen geometrische Folgen dar: Stets kommt nur in der Zeile des konstanten Quotienten ein Loch hinzu.

Ihr ganzes Potential als argumentative Brücke zwischen Kardinalbedeutung und abstrakter Zahldarstellung entfalten die Lochkarten im Bereich der **Teilbarkeitslehre**. Mit elementarer Kombinatorik kann die Teilerzahl bestimmt werden: Gilt für zwei natürliche Zahlen a|b, so hat die Karte zu a eine sinnvolle Teilmenge der Löcher der Karte zu b. (Sinnvoll heißt dabei, dass nie eine ungestanzte Stelle links von einem Loch liegt.) Ein Teiler der vorn abgebildeten 1176 kann also in Kartendarstellung 0, 1, 2 oder 3 Löcher in der ersten, 0 oder 1 Loch in der zweiten und 0, 1 oder 2 Löcher in der vierten Zeile haben. Das sind $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ Möglichkeiten, ergo 24 Teiler der 1176. Das allgemeine Ergebnis (Produkt der Nachfolger der Primfaktorexponenten) liegt in greifbarer Nähe.

Warum gerade Löcher als Markierungen gewählt wurden, zeigt sich bei der ggT-Bestimmung: Legt man zwei Zahlenkarten passend übereinander, so gehört das frei bleibende Lochmuster zu deren ggT. Für das kgV bräuchte man transparente Lochkarten. Oder man benutzt eine Auswertungstabelle, in die nacheinander die Lochmuster beider Karten übertragen werden.



Noch interessanter sind die nicht eindeutig lösbaren Umkehraufgaben zu ggT und kgV. Hier kann man wahlweise ‚übersetzen‘ oder ausschließlich innerhalb der Kartendarstellung argumentieren:



Beim ggT sind die ‚Ergebnislöcher‘ für beide Karten Pflicht, die sonstigen Lochmengen müssen disjunkt sein. Beim kgV muss jedes ‚Ergebnisloch‘ auf mindestens einer der Karten, andere Löcher dürfen nicht vorkommen.

4. Zu den Ursprüngen der Idee

Ich habe die Lochkarten erstmals 1995 im Referendariat eingesetzt, ohne recht zu wissen, woher mir die Idee kam. Inzwischen darf ich annehmen, dass Heinrich Winter sie in einem seiner Seminare an der RWTH Aachen erwähnt hatte: Ich habe ähnliche Lochkarten auf seinen Hinweis in [Winter/Ziegler, 1969] entdeckt – dort noch motiviert von per Lochkarten programmierten Rechnern; im ersten Anlauf allerdings mit einer etwas kruden Nutzung der hochpopulären Mengendarstellung. Graphiken suggerieren, man könne zwei Mengen unterscheiden (und zum Schnitt bringen), von denen die eine vier Zweien und eine Drei, die andere je zwei Zweien und Dreien enthält. Nichtsdestotrotz: Die geniale Idee stammt von dort!

5. Zweiter Blick in den Lehrplan und Fazit

Bei genauerem Hinsehen bewegt man sich mit den Lochkarten in der Nähe wichtiger Lehrplaninhalte. Da ist zunächst die Strategie des Faktorisierens (von Zahlen, Termen, Funktionen). Dann stecken hinter der Eignung der Lochkarten für die Punktrechenarten die Potenzgesetze, und der Euklidische Algorithmus ist einer der wenigen exemplarisch zu behandelnden. Vor allem lassen sich an der Primfaktorzerlegung hervorragend eine Reihe der geforderten prozessbezogenen Kompetenzen fördern: „Die SchülerInnen entwickeln Vermutungen und suchen Begründungen, übertragen eine Darstellung in eine andere und vergleichen. Sie argumentieren mathematisch, wählen Darstellungsformen sachgerecht aus, stellen Überlegungen unter Nutzung geeigneter Medien verständlich dar. Sie entwickeln Beweise, gehen verständig mit Darstellungsformen um und entwickeln problemadäquat eigene.“ (KMK primar, S.7-8, SekI, S.8-9, und SekII, S.17-18)

Wer Bruners Theorie der verständnisfördernden Nutzung von Repräsentationsformen für sinnvoll hält, sollte sich für die Lochkarten begeistern können: Sie werden enaktiv genutzt, sind auf den ersten Blick ikonisch, auf den zweiten aber als „Zeichen mit Kontexten, die ihnen (Spiel-)Regeln auferlegen“ (Lambert 2012, S.18) tief symbolisch.

Literatur

Heitzer, J. (2013). Lochkarten zur Primfaktorzerlegung. *Mathematik lehren, 176,* 14–17.

Lambert, A. (2012). Was soll das bedeuten? Enaktiv – ikonisch – symbolisch. In A. Filler, M. Ludwig (Hrsg.): *Vernetzungen und Anwendungen im Geombetrieunterricht* (S. 5–32). Hildesheim: Franzbecker.

Padberg, F., Benz, C. (2010). *Didaktik der Arithmetik, 4. Auflage.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Winter, H., Ziegler, Th. (Hrsg., 1969). *Neue Mathematik, Klasse 5.* Braunschweig: Schroedel, 201–204.

Markus A. HELMERICH, Eva S. HOFFART, Siegen

Der Einsatz von Videos zur Aktivierung der Reflexion in der Lehrerbildung – Ein Praxisbericht aus der Mathematikdidaktik

1. Ein Leitbild für die Lehrerbildung

Lehren und Lernen vollzieht sich in Spannungsfeldern, so dass Lehrende in unterrichtlichen Situationen immer wieder vor der neuen Herausforderung stehen, angemessen zu handeln und zu reagieren. Deshalb ist es bereits während des Studiums bedeutend, dass angehende Lehrerinnen und Lehrer sich darüber bewusst werden und erklären können, warum und wieso sie auf eine bestimmte Art und Weise in Lernsituationen handeln (vgl. Rottländer/ Roters 2008).

Die Leitidee für die Bildung im Lehramtsstudium Mathematik an der Universität Siegen ist es, angehende Lehrerinnen und Lehrer zu einer reflektierten Handlungsfähigkeit innerhalb der Spannungsfelder des Lehrens und Lernens von Mathematik zu befähigen. Diese Handlungsfähigkeit zeichnet sich durch ein mathematisches Repertoire aus, das sowohl fachmathematisches als auch fachdidaktisches Wissen und Können vereint. Die Studierenden sollten diesem gegenüber eine bewusste Haltung ausbilden, die sich dann in mathematischen Lernsituationen bewähren kann (vgl. Helmerich 2011).

Im Rahmen ihres Studiums werden die Studierenden immer wieder dazu herausgefordert, sich anregenden Aufgaben und diversen Praxiselementen zu stellen. Auf der Basis verschiedener Impulse und Fragen sollen die Studierenden auf verschiedenen Ebenen reflektieren sowie sich über eigene Haltungen und Erfahrungen bewusst werden. Der Begriff des Reflektierens wird nachfolgend ausgeschärft und am Beispiel einer ausgewählten Lehrveranstaltung konkretisiert, indem Impulse zu Reflexionstätigkeiten vorgestellt werden.

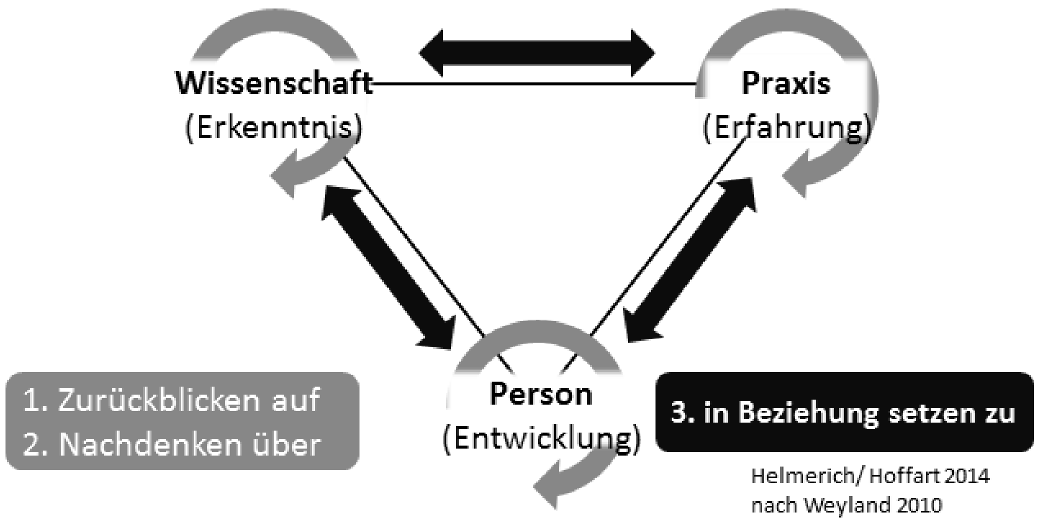
2. Ein Orientierungsrahmen zum Reflektieren in der Lehrerbildung

Reflektierte Handlungskompetenz ist eine ausgewiesene Komponente eines professionellen Lehrerhandelns. Um den Begriff des Reflektierens zu konkretisieren, ziehen wir das Modell der Bezugssysteme und Wissensformen nach Weyland (2010) heran. An den Ecken eines Dreiecks werden hier die

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 515–518). Münster: WTM-Verlag

Bezugssysteme für professionelles Handeln von Lehrer(inne)n, Wissenschaft, Praxis und Person, angeordnet. Zu diesen Bezugssystemen gehören die Wissensrepräsentationsformen Erkenntnis, Erfahrung und Entwicklung. Durch die Fokussierung auf die eigenständige Bedeutung der einzelnen Bezugssysteme sowie der gleichzeitig existierenden wechselseitigen Beziehungen wird die notwendige Abgrenzung eines rein praktisch orientierten Lehrerhandelns von einem professionellen Lehrerhandeln deutlich gemacht. „In Anbindung an das Modell sollte eine pädagogisch professionelle Lehrkraft sowohl über generalisierbares theoretisches Begründungswissen als auch über praktisches Handlungswissen und somit auch einzelfallbezogenes Erfahrungswissen verfügen“ (Weyland/ Wittmann 2010, S. 19).

Auf diesem begrifflichen Beziehungsmodell nach Weyland sollen nun die angestrebten Reflexionstätigkeiten verknüpft und auch erklärt werden, wann, wie oder worüber überhaupt reflektiert werden kann und wie Reflexionsprozesse anzuregen sind. Im Siegener Bildungskonzept verstehen wir das Reflektieren als ein Zurückblicken auf, ein Nachdenken über und ein in Beziehung setzen zu.



An den drei Eckpunkten ist das Reflektieren zunächst möglich, indem innerhalb der jeweiligen Bezugssysteme auf eine konkrete Lernsituation zurückgeschaut wird. Der Studierende lässt sich hier gedanklich bewusst auf die Wissenschaft, die Praxis oder die eigene Person ein. Verschiedene Fragen, die ein Einlassen auf die Situation und eine Beschreibung dieser ermöglichen, unterstützen die Reflexionstätigkeit (mit Fokus auf die Wissenschaft bspw. die Frage nach der zugrundeliegenden Mathematik, mit Fokus auf die Person bspw. die Frage nach dem eigenen Verständnis der Lehrerrolle in dieser Lernsituation). Der Reflexionsprozess wird weitergeführt, indem das konkrete Hinterfragen der erlebten Situationen als ein Nachden-

ken über Fragen zu den drei Bezugssystemen angeregt wird (mit Fokus auf die Praxis bspw. die Frage nach dem Abgleich von Planung und Durchführung, mit Fokus auf die Wissenschaft bspw. die Frage nach der Sichtbarkeit der Mathematik). Als verbindende Reflexionstätigkeit werden jeweils zwei der Bezugssysteme in Beziehung zueinander gesetzt (mit Fokus auf Wissenschaft und Person bspw. die Frage nach dem Umgang mit den eigenen Unsicherheiten hinsichtlich der Mathematik, mit Fokus auf Person und Praxis bspw. die Frage der Ableitung möglicher Handlungsoptionen in der Lernsituation).
Im Folgenden wird am Beispiel der Veranstaltung „MatheWerkstatt“ eine mögliche Umsetzung zur Anregung der beschriebenen Reflexionstätigkeiten anhand des Einsatzes von Videos konkretisiert.

3. Reflektieren mit Videoaufnahmen im Seminar MatheWerkstatt

Im Seminar MatheWerkstatt planen, gestalten und analysieren Studierende des Grund-, Haupt- und Realschullehramts mathematische Projekte für Lerngruppen aus dem Siegener Umland. Nach einer gemeinsamen Einführungsphase planen Kleingruppen mit Unterstützung der Seminarleitung in offenen Seminarsitzungen ihre individuellen Projekte. Die im Laufe des Semesters stattfindenden Projekttage werden vielfältig dokumentiert, unter anderem werden die Lernsituationen mit Hilfe einer Stand- sowie einer Handkamera videographiert. Eine Woche nach der Projektumsetzung erfolgt eine gruppeninterne Videoreflexion. Damit sich die Studierenden auf die Reflexion einlassen können, wird diese Phase durch einen Impulsbogen unterstützt. Um auch im Nachhinein Einblick in die Reflexionsprozesse zu erhalten, wird eine parallele Audioaufnahme angefertigt.

Für die Aktivierung der Reflexionsprozesse werden unter anderem Videoausschnitte verwendet, die Lernsituationen von Schülerinnen und Schülern zeigen. Mit dem Fokus auf das Bezugssystem Wissenschaft kann an solchen Videos rückblickend analysiert werden, welche mathematischen Inhalte für die Arbeit der Schülerinnen und Schüler bedeutsam war, wie diese Mathematik erkennbar wurde und auf welcher Grundlage die Kommunikation über die Mathematik passiert ist. Zudem gibt das konkrete Nachdenken über die Wissenschaft Anlass, sein eigenes Wissen und Können kritisch zu hinterfragen. Mit Blick auf das Bezugssystem Praxis kann der Frage nachgegangen werden, wie der Lernprozess verlaufen ist und wie man sich selbst als Lehrkraft den Lernprozess vorgestellt hat. So ergibt sich die Möglichkeit, die eigene Planung mit dem tatsächlichen Verlauf intensiv abzugleichen. Die Videomitschnitte von Arbeits- und Lernprozessen von Schülerinnen und Schülern lenken den Blick auf das in Beziehung setzen von Wissenschaft und Praxis, indem über mögliche diagnostische Interpretationen der Schülerhandlungen reflektiert wird.

Ein zweiter Typ von Videos zeigt die Studierenden in ihrem Handeln als Lehrkräfte in den Projektsituationen. Beim Einsatz solcher Videosequenzen in der Reflexion spielt der Bezugsrahmen Person eine dominante Rolle. Anhand der Aufnahmen, die natürlich auch wiederholt betrachtet werden können, wird das eigene Handeln mit kritischer Distanz von außen sichtbar. So können die Studierenden im Rückblick ihre Selbstwahrnehmungen kontrollieren und auch ihr Verständnis der eigenen Rolle beim Unterrichten hinterfragen. Weiterführend kann das eigene Bild von Mathematik und von Mathematikunterricht allgemein sowie in seiner Bedeutung für die Lernsituation bewusst gemacht werden. Schließlich bieten solche Videos auch die Möglichkeit, sich selbst im konkreten unterrichtlichen Handeln zu sehen und durch die Dokumentation das eigene Handeln aus verschiedenen fachdidaktischen Perspektiven oder aus Sicht verschiedener Akteure zu analysieren. Hierdurch werden die Beziehungen zwischen Person und Wissenschaft in Hinblick auf die Bedeutung von mathematischen und didaktischen Konzepten für das eigene Handeln, aber auch bezüglich der Wirkung in der Praxis vernetzend reflektiert.

Der Mehrwert des Einsatzes von Videoaufnahmen liegt darin, dass die Videoaufnahmen der Projektvormittage einen sorgfältigen und kritischen Rückblick ermöglichen. Dieser kann als Teambeobachtung an gemeinsamen Reflexionsimpulsen oder auch als Einzelbeobachtung stattfinden. Die Studierenden werden mit dem eigenen Wissen, dem eigenen Handeln und den eigenen Vorstellungen konfrontiert. Der in diesem Beitrag vorgestellte und exemplarisch konkretisierte Orientierungsrahmen ermöglicht hier eine Differenzierung verschiedener Reflexionstätigkeiten, die jeweils durch verschiedene Frageimpulse angeregt werden können.

Literatur

Rottländer, Daniela/ Roters, Bianca (2008). Verbindungen in Unsicherheit?! Pragmatistische Anmerkungen zur Lehrerbildungsdiskussion. In: Häcker, Thomas/ Hilzensauer, Wolf/ Reinmann, Gabi (Hg.): Reflexives Lernen (Bildungsforschung; Jg.8, Heft 5).

Helmerich, Markus (2011): Fachmathematische Aspekte eines Bildungsrahmens für die Mathematiklehrer(innen)bildung. In: Haug, Reinhold/ Holzäpfel, Lars. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag, S. 363-366.

Weyland, Ulrike/ Wittmann, Eveline (2010): Expertise. Praxissemester im Rahmen der Lehrerbildung. 1. Phase an hessischen Hochschulen, DIPF, Berlin.

André HENNING, Berlin

Änderung und Änderungsraten im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Die Analysis in der Schule bringt viele vermeintlich neue Begriffe und Kalküle mit sich, oftmals ohne im engen Zusammenhang mit dem bisher Gelernten zu erscheinen. Vorgestellt werden Ansätze für ein Konzept, das Leitgedanken wie Änderung und Änderungsraten spiralcurricular aufgreift und bis zur Behandlung des Grenzwertbegriffes führt bzw. diese vorbereitet.

Forschungsanlass und Forschungsfragen

Vielerorts kommt es, u.a. auch durch die Verkürzung der Schulzeit bis zum Abitur, zu einer starken Komprimierung der Inhalte propädeutischer Analysis am Ende der Klassenstufe 10. Den Schülern werden in Folge der inhaltlichen Reduktion in ihrer Schulzeit weniger Lernchancen auf diesem Gebiet geboten. Da grundlegende Inhalte zur Vorbereitung der Infinitesimalrechnung nicht mehr obligatorisch bzw. stark verkürzt sind, kann der in diesem Bereich geforderte (und notwendige) Kompetenzerwerb vor dem Hintergrund der ohnehin knappen Unterrichtszeit kaum geleistet werden. Vorstellungen zu Aspekten funktionalen Denkens werden nicht in ausreichendem Umfang entwickelt sein oder werden im Unterricht nicht wieder aufgegriffen. Dies widerspricht der Idee des langfristigen Aufbaus von Grundvorstellungen (u.a. vom Hofe 1995) beim Lernenden und entwickelt sich so zu einem langfristigen Problem in der verständnisorientierten Auseinandersetzung mit der Infinitesimalrechnung.

Vollrath (1989) und Malle (2000) beschreiben im Kern drei Aspekte funktionalen Denkens: den Zuordnungsaspekt, den Änderungsaspekt und den Objektaspekt. Für einen reichhaltigen Unterricht ist es wichtig, dass alle diese Aspekte berücksichtig werden. Malle (2003) konstatiert darüber hinaus auch die Unverzichtbarkeit eines tieferen inhaltlichen Verständnisses der Differenzialrechnung und fordert eine intensive Auseinandersetzung mit den von ihm herausgearbeiteten drei Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten. Diese Forderung lässt sich auf die Forderung nach der Schaffung von Lernanlässen für die generelle Entwicklung von Vorstellungen zum funktionalen Denken erweitern.

Die beschriebene Problematik soll aufgegriffen werden und es sollen systematisch Lernanlässe zu Aspekten funktionalen Denkens, Änderung und Änderungsraten über die Sekundarstufe I hinweg aufgezeigt und ausgeführt werden. Ziel ist es, dass die Lernenden bereits ab Klassenstufe 7 nach und

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 519–522). Münster: WTM-Verlag

nach Vorstellungen entwickeln, an die später bei der Einführung der Infinitesimalrechnung angeknüpft werden kann. Um die vollen Curricula nicht zusätzlich zu belasten, soll dabei an die ohnehin in der Sekundarstufe I zu unterrichtenden Inhalte direkt angeknüpft und es sollen diese lediglich mit einem neuen Fokus versehen werden, ohne dass dadurch der zeitliche Aufwand wesentlich erhöht wird. Die Forschungsfragen lauten dementsprechend:

Welche Anknüpfungspunkte bietet der Kanon der Sekundarstufe I für den Aufbau adäquater Vorstellungen zur Propädeutik der Analysis?

Wie können die Anknüpfungspunkte in ein stufenübergreifendes Konzept als fachliches Ganzes gebracht werden?

Welche exemplarischen Experimente und Unterrichtsvorschläge sind zur Umsetzung eines solchen Konzeptes geeignet?

Anknüpfungspunkte im Kanon der Sekundarstufe I

Welche Begriffe bringt die Analysis in der Schule mit sich, über welche Begriffe oder Konzepte sollen die Schülerinnen und Schüler also bereits Vorstellungen entwickelt haben? Einige dieser Begriffe sind „Tangente an einen Graphen", „Sekantensteigung", „Tangentensteigung", „lokale Änderungsrate", „Bestand", „Änderung", „Grenzwert", „Ableitung", „bestimmtes Integral". Alle diese Begriffe haben auf die eine oder andere Weise mit Fragen von Bestand, Änderung und Änderungsraten zu tun. Abbildung 1 zeigt, wie ein möglicher Fokus auf den Begriff „Änderung" aussehen könnte.

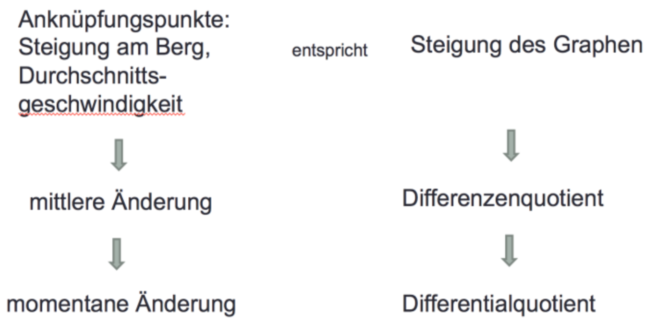


Abbildung 1

Es wird deutlich, dass der Aufbau reichhaltiger Vorstellungen zum Differenzenquotienten und zur mittleren Änderung unabdingbar ist, um anschließend Konzepte von momentaner Änderung und Differenzialquotient entwickeln zu können. Hierfür sollen Lerngelegenheiten geschaffen werden. Der Kanon der Sekundarstufe I bietet zu diesen Themen vielfältige Anknüpfungspunkte, einige davon werden im Folgenden vorgestellt.

Beispiele für Lernanlässe zum Thema „Änderung"

In Klassenstufe 7 lassen sich zwei Lernanlässe identifizieren, die hier kurz vorgestellt werden. Der erste ist die Proportionalität. Proportionale Zusammenhänge lassen sich an Hand von Füllgraphen betrachten. Abbildung 2 zeigt ein GeoGebra-Applet, in welchem mit Hilfe eines Schiebereglers die vergangene Zeit t verändert werden kann. Im mittleren Fenster ist ein Würfel zu sehen, dessen „Füllstand" mit sich veränderndem t variiert. Als Grundannahme wird eine konstante Füllgeschwindigkeit vorausgesetzt. Die vergangene Zeit ist dann proportional zur Füllhöhe, wie man auch dem Diagramm im rechten Fenster entnehmen kann, bei dem jeweils die Füllhöhe zum Zeitpunkt t mit Hilfe der Spur eines Punktes P(t,h(t)) abgetragen wird. Im Gegensatz zum realen Experiment, ist der Vorgang im Applet bereits idealisiert. Anders als im Experiment kann das Gefäß im Applet tatsächlich gleichmäßig gefüllt werden. Vor dem Einsatz eines solchen Applets ist zunächst einige Vorbereitung notwendig. So ist gerade für Schüler dieser Jahrgangsstufe die Interpretation von Funktionsgraphen ein gänzlich neuer Prozess, der ebenfalls einige Übung verlangt. Die Schüler benötigen hier zunächst ein punktweises Zuordnen, bevor zur Interpretation des Graphen übergegangen werden kann.

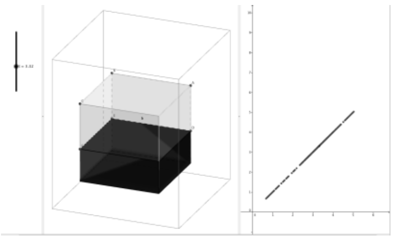


Abbildung 2

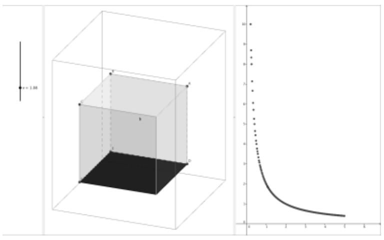


Abbildung 3

Der zweite Bereich sind die antiproportionalen Zuordnungen. Analog zu Abbildung 2 zeigt Abbildung 3 erneut den zu füllenden Würfel. Hier wird jedoch nicht die vergangene Zeit mit Hilfe des Schiebereglers manipuliert, sondern die Füllgeschwindigkeit v. Im rechten Diagramm wird die Spur des Punktes $P(v,t_{max}(v))$ gezeichnet, wobei t_{max} die Zeit ist, die es dauert, den Würfel vollständig zu füllen. Um nicht direkt den Graphen zu interpretieren, wäre es hier z.B. möglich fixe Werte für die Füllgeschwindigkeit zu wählen und die Zuordnung zunächst nur punktweise abzutragen.

Beide Applets bieten die Möglichkeit, sich Füllvorgänge dynamisch anzusehen und so auch eine dynamischere Sicht auf funktionale Zusammenhänge zu entwickeln und können in höheren Klassenstufen wieder aufgegriffen werden.

In Klassenstufe 8 kommen Lineare Funktionen und Steigungsdreiecke als neue Unterrichtsinhalte hinzu. Bezogen auf Füllgraphen ermöglicht dies die

Betrachtung zusammengesetzter Körper, die stückweise lineare Füllgraphen ergeben. Diese komplexeren Graphen ermöglichen eine reichhaltigere Auseinandersetzung mit Fragen der Änderung – sowohl auf qualitativem Niveau (schneller, langsamer), als auch auf quantitativem Niveau, indem man Steigungsdreiecke zeichnet und tatsächlich die Steigung berechnet, womit die Schülerinnen und Schüler letztlich erstmals mit dem Differenzenquotienten in Kontakt kommen.

Klassenstufe 9 ermöglicht die Betrachtung noch komplexerer zusammengesetzter Gefäße, deren Füllgraphen nicht mehr nur stückweise linear sind. Das Steigungsdreieck als Werkzeug zur Bestimmung einer mittleren Änderungsrate lässt sich jetzt auch an quadratischen Funktionen einsetzen.

In Klassenstufe 10 kann dann die Anbindung an die Sekundarstufe II erfolgen. An Hand der neuen Klasse der trigonometrischen Funktionen können ebenfalls mittlere Änderungsraten thematisiert werden. Bezogen auf Füllgraphen können jetzt Fragen beantwortet werden wie „Wann hat der Füllgraph einen ‚Knick‘ und was bedeutet das?“ oder „Was passiert am Beginn des Füllvorgangs?“, die zu Grenzwertbetrachtungen und zum Übergang zu lokalen Änderungsraten führen.

Fazit und Ausblick

Die vorgestellten Ansätze sind nur ein kleiner Ausschnitt der für den gewünschten Aufbau von Vorstellungen notwendigen Lernanlässe. Zu untersuchen ist u.a., inwieweit Füllgraphen und die vorgestellten Applets tatsächlich dazu geeignet sind, den Schülern zu ermöglichen, adäquate Vorstellungen zu entwickeln. Wie nah sind solche Füllvorgänge an der Lebenswelt der Schüler? Gibt es die Möglichkeit, Füllvorgänge zunächst tatsächlich experimentell durchzuführen, bevor man Applets einsetzt, die eine deutliche Idealisierung darstellen. Weitere Lernanlässe müssen gefunden und analysiert werden. Hier scheint neben der Mathematik vor allem die Physik weitere Anlässe bieten zu können.

Literatur

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren, 103*, S. 8-11.

Malle, G. (2003). Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. *mathematik lehren Nr. 118,* S. 57-62.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 10*, S. 3-37.

vom Hofe, R. (1995*). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum, Akademischer Verlag GmbH.

Diana HENZ, Wolfgang SCHÖLLHORN, Mainz, Reinhard OLDENBURG, Frankfurt

Bessere Mathematikleistungen durch bewegtes Sitzen? Eine EEG-Studie zum Zusammenhang von mentaler und körperlicher Bewegung

Zusammenhänge zwischen körperlichen Bewegungen und Lernprozessen sind schon seit langer Zeit in der Diskussion. Eine positive Wirkung von Bewegung auf die kognitive Leistungsfähigkeit, insbesondere in den kognitiven Funktionsbereichen der Konzentrationsfähigkeit, des Kurz- und Langzeitgedächtnisses sowie der Problemlösefähigkeit, konnte belegt werden (z. B. Etnier et al. 2006). Angelehnt an diese Erkenntnisse erfährt das Konzept der bewegten Schule seit einigen Jahren größere Aufmerksamkeit. Mit dem Konzept der körper- und raumorientierten Anschauungsmittel kann das Potenzial des Lernens durch Bewegung präziser beschrieben und gezielter ausgeschöpft werden (Högger 2013). Für den mathematischen Bereich konnte ein Hinweis auf einen Zusammenhang von grobmotorischer Koordinationsfähigkeit und mathematischen Fertigkeiten gefunden werden (Lopes, Santos, Pereira & Lopes 2013). In den letzten Jahren wurde die Idee der Embodied Mathematics (Lakoff & Núñez 2000) in der Mathematikdidaktik rezeptiert, beispielsweise in der monumentalen Monographie (Tall 2013). Empirische Stützung erfährt dieser Ansatz zum einen durch die Kognitionswissenschaften (embodied mind, z. B. Fields 2013), zum anderen durch mathematikdidaktische Untersuchungen zur Rolle von Gesten beim Mathematiklernen. Wenig untersucht ist bisher die genaue Schnittstelle zwischen kognitiven Prozessen auf Verhaltensebene und der Gehirnfunktion bei mathematischen Arbeitsprozessen unter Bewegung.

In einer experimentellen Studie (Maus, Henz & Schöllhorn 2013) konnte eine positive Wirkung von bewegtem Sitzen auf die kurz- und langfristige Konzentrationsfähigkeit festgestellt werden, wobei dies sowohl anhand von Verhaltensdaten als auch auf neurophysiologischer Ebene (EEG) gezeigt werden konnte. Die vorliegende Studie schließt methodisch an diese Arbeit an und untersucht die Wirkung von statischem und dynamischem Sitzen auf die Leistung in den Bereichen Algebra, Geometrie und Arithmetik.

Embodied Mathematics

Lakoff und Núñez (2000) vertreten die weit reichende These, dass abstrakte Ideen durch konzeptuelle Metaphern aus den Erfahrungen der alltäglichen physikalischen Welt abstrahiert werden. Wittmann et al. (2012) schließen sich dem an und verdichten die Position zu „All human concepts, including

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 523–526). Münster: WTM-Verlag

mathematical concepts, are based in the perceptual motor system experiences we have while interacting with the world around us". Eine Folge ist, dass Transformationen in der symbolischen Algebra von Schülern häufig mit Metaphern aus der Domäne der Bewegungen beschrieben werden (z. B. „das *x* nach links bringen"; siehe Tall 2013, S. 12). Wittmann et al. (2012) analysieren die Gesten von Studierenden bei einer symbolischen Umformungsaktivität im Sinne einer physikalischen Bewegung von Symbolen.

Zusammengefasst kann aus diesen Arbeiten die Hypothese vom algebraischen Symbolraum abgeleitet werden: Algebraische Manipulationen finden in einem Symbolraum statt, der analog zu unserem räumlichen Anschauungsraum strukturiert ist. Mit der vorliegenden Untersuchung soll überprüft werden, ob (1) bewegtes Sitzen mathematische Problemlösungsprozesse günstig beeinflusst und (2) algebraisches Handeln, vergleichbar räumlichem Manipulieren, eine Aktivierung von Gehirnarealen herbeiführt, die mit visuell-räumlicher Verarbeitung assoziiert sind.

Studiendesign

Es wurden n=15 Probanden (Studierende der Sportwissenschaft) auf ihre mathematischen Leistungen in drei Bereichen unter zwei Bedingungen der körperlichen Haltungskontrolle (statisch sitzend (normaler Stuhl), dynamisch sitzend (Stuhl mit zwei Freiheitsgraden der Bewegung) getestet.

Die drei Leistungsbereiche des Tests waren Arithmetik (Num), Algebra (Alg) und Raumgeometrie (Geo). Alle Aufgaben wurden im multiple-choice-Format am PC präsentiert und mussten rein mental bearbeitet werden. In jedem Bereich gab es drei Schwierigkeitsniveaus. Die 2x3x3 Testaufgaben wurden in der Abfolge randomisiert und in zwei Sitzungen je fünf Minuten bearbeitet, so dass jeder Proband zwei mal 45 Minuten getestet wurde.

Der Arithmetiktest wurde ad hoc theoriebasiert (vgl. Padberg 2007) entwickelt. Typische Vertreter: Niveau 1: (Distraktoren in Klammern): 279-69= (191, 190, 210, 220, 230); Niveau 3: 1980/44= (47, 46, 45, 44, 43). Die Algebraaufgaben bestanden in der Lösung linearer Gleichungen. Auf Niveau 1 und 2 konnte rein arithmetisch durch Rückwärtsrechnen gelöst werden, Bsp.: 8x+7=47 (1, 2, 3, 4, 5). Die Gleichungen dieser Niveaus werden von Filloy (2008) als arithmetisch bezeichnet, da man nicht mit der Unbekannten selbst operieren muss. Bei Niveau 3 hingegen tritt die Unbekannte beidseitig auf, Bsp.: x+15=x+10+x, (5, 10, 15, 20, 25), so dass man sie mental von einer Seite der Gleichung zur anderen bewegen muss. Das Raumvorstellungsvermögen wurde mit dem Bausteine-Test von Birkel et al. (2002) gemessen. Die Zahl der in fünf Minuten erzielten korrekten

Antworten wurde gemäß der Kombination aus Art (Num, Alg, Geo) und Niveau (1, 2, 3) als Geo1 usw. bezeichnet. Auf den höheren Niveaus sind diese Zahlen erwartungsgemäß geringer. Deshalb wurden in den Summenscores die mit dem Niveau multiplizierten Scores aufsummiert.

Die elektrische Gehirnaktivität wurde mittels EEG von 19 Elektroden nach dem 10-20 System bei einer Messfrequenz von 256 Hz jeweils vor, während und nach der Aufgabenbearbeitung aufgezeichnet. Die EEG-Daten wurden Fourieranalysen unterzogen und die Leistungsdichtespektren für das α- (8-13 Hz), β- (13-30 Hz) und γ-Band (30-40 Hz) berechnet.

Ergebnisse der Verhaltensstudie

Die Hypothese des algebraischen Symbolraums legt nahe, dass Alg1-Aufgaben wie Num behandelt werden, Alg3-Aufgaben dagegen im Symbolraum stattfinden und daher mit Geo korrelieren. Zur Kontrolle wurde eine multivariate Regression (Methode *lm* von R) berechnet.

	Alg1 ~ Geo + Num		Alg3 ~ Geo + Num	
	β	p-Wert	β	p-Wert
Geo	0.004	0.89	0.067	0.039 *
Num	0.246	0.3×10^{-9} ***	0.135	0.45×10^{-6} ***

Bei allen neun Aufgabenarten zeigen die dynamisch sitzenden Probanden höhere Testleistungswerte als statisch sitzende. Es treten mittlere Effekte auf, die jedoch (zum Teil nur knapp) nicht signifikant sind. Die höchste Effektstärke (Cohens *d* für gepaarte Stichproben) *d*=0.49 tritt bei Alg3 auf.

Ergebnisse der EEG-Studie

Anhand der EEG-Spontanaktivität lassen sich Effekte der Haltungskontrolle in Abhängigkeit von der Art der Mathematikaufgabe und des Schwierigkeitsgrades auf die Zusammensetzung der Frequenzbänder beobachten. Bei Alg3 und Geo3 tritt eine erhöhte Alpha-Aktivität in den visuellen und somatosensorischen Arealen, bei Num3 eine erhöhte Gesamtaktivität im Beta- und Gamma-Band in der Bedingung des dynamischen Sitzens auf.

Diskussion

Die Ergebnisse zeigen einen positiven Effekt des dynamischen Sitzens auf die mathematische Leistung, der sich anhand der Verhaltensdaten in einer besseren Leistung in allen geprüften Bereichen, anhand der neurophysiologischen Daten in einer stärkeren psychophysiologischen Aktivierung jeweils beim höchsten Schwierigkeitsgrad aufzeigen lässt. Die Verhaltensdaten können so gedeutet werden, dass das mentale Umformen von Gleichungen mit dem Raumvorstellungsvermögen zusammenhängt. Die EEG-Daten liefern bestätigende Hinweise für die Hypothese von unterschiedlichen Verarbeitungsprozessen bei Numerik- im Gegensatz zu Geometrie- und Algebraaufgaben. Während bei Numerik vor allem eine Regulation der Aufmerksamkeitsprozesse in den frontalen Gehirnarealen erforderlich ist, kann für Geometrie und Algebra die Hypothese einer visuell-räumlichen Verarbeitung anhand objektiver neurophysiologischer Daten bestätigt werden. Die Ergebnisse stützen die These des algebraischen Symbolraums, werfen jedoch die Frage auf, ob das Modell der Embodied Mathematics geeignet ist, die gefundenen neurophysiologischen Aktivierungsmuster hinreichend zu erklären. Folgende Alternativerklärungen sind denkbar: (1) Maßgeblich sind Prozesse der Regulation des psychophysiologischen Aktivierungsniveaus durch dynamisches Sitzen. (2) Es finden Ablenkungsprozesse durch sensorische Erfahrungen des dynamischen Sitzens statt, die einer dysfunktionalen Überfokussierung auf die Aufgaben entgegenwirken und somit eine optimale Aufmerksamkeitslenkung bei bereits automatisierten Aufgabenabläufen fördern, im günstigsten Fall sogar ein Flowerleben ermöglichen.

Literatur

Birkel, P., Schein, A. & Schumann, H. (2002). *Bausteine-Test*. Hogrefe. Göttingen.

Etnier, J.L., Nowell, P.M., Landers, D.M. & Sibley, B.A. (2006). A meta-regression to examine the relationship between aerobic fitness and cognitive performance. *Brain Research Reviews, 52*, 119-130.

Fields, C. (2013). Metaphorical motion in mathematical reasoning: further evidence for pre-motor implementation of structure mapping in abstract domains. *Cognitive Processing, 14(3)*, 217-229.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational algebra*. New York: Springer.

Högger, D. (2013). *Körper und Lernen. Wie Bewegung, Körperwahrnehmung und Raumorientierung das Lernen unterstützen*. Bern: Schulverlag.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Maus, J., Henz, D. & Schöllhorn, W.I. (2013). Increased EEG-beta activity in attentional tasks under dynamic postural control. In U. Ansorge, E. Kirchler, C. Lamm & H. Leder (Eds.), *TeaP 2013. Abstracts of the 55th Conference of Experimental Psychologists (p. 396)*. Lengrich: Pabst Science Publishers.

Padberg, F. (2007). *Didaktik der Arithmetik*. München: Spektrum.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to think Mathematically*. Cambridge: Cambridge.

Wittmann, M.C., Flood, V.J. & Black, K.E. (2012). Algebraic manipulation as motion within a landscape. *Educational Studies in Mathematics, 82(2)*, 169-181.

Wilfried HERGET, Halle (Saale)

Papierfalten im Mathematikunterricht – gefällt mir!

Papierfalten – vielleicht denken Sie da an Kindergarten, Kindergeburtstag ... oder an kunstvolle japanische Origami-Dekoration. In der Grundschule mag das ja noch sinnvoll sein. Aber Papierfalten im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I? Oder gar in der Sekundarstufe II?

Falten und Forschen, Finden und Formulieren ...

Papierfalten – das setzt unmittelbar auf die Symmetrie, eine der zentralen Ideen der Geometrie, und öffnet auf ganz eigene Weise den Unterricht. Tatsächlich lassen sich über das Falten von Papier praktisch alle üblichen Begriffe der Mittelstufen-Geometrie erreichen, insbesondere Lot, Höhe, Parallele, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Teilverhältnisse, besondere Winkel, Flächeninhalt (Herget 2013). Das Falten kann die klassischen Hilfsmittel – Zirkel und Lineal, Tafel und Kreide – auf eine (an-)fassbare Weise ausgezeichnet ergänzen (vgl. auch die Idee in Besuden 2010), und die gewohnten Beweise lassen sich durchweg in den Argumentationen anhand des Falt-Prozesses wiederfinden.

Eine besondere Stärke ist, dass die Schülerinnen und Schüler hier wirklich etwas mit ihren Händen, mit ihren Fingern erschaffen. Auf diese Weise können sie experimentell-handelnd zunächst – für sie überraschende – geometrische Muster und Regelmäßigkeiten erkennen. In einem zweiten Schritt gilt es, diese Entdeckungen zu formulieren und zu überprüfen und gegebenenfalls zu verallgemeinern. Im letzten Schritt schließlich kann das Entdeckte dann tatsächlich mathematisch begründet werden. Insgesamt eine schöne Gelegenheit, Mathematik nachhaltig begreifbar zu erleben!

... im Unterricht, auch für Klasse 5 bis 13

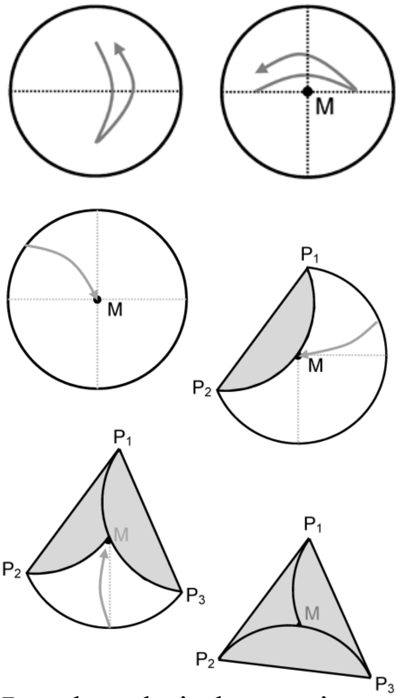
Sehr viele der für den Mathematikunterricht interessanten Faltungen lassen sich mit einem A4-Blatt realisieren – das ist ausgesprochen ökonomisch. Farbiges Papier ist natürlich ansprechender, doch sogar Fehlkopien lassen sich hier gut nutzen. Sind einmal *quadratische Papierstücke* nötig, dann bieten sich Zettelboxen an. *Kreisrunde Papierstücke* finden sich in dem (sonst oft wenig genutzten) Moderationskoffer.

Die Schülerinnen und Schüler falten die Figuren am besten auf dem Tisch. Schritt für Schritt lernen sie dabei, konzentriert und exakt zu falten. Die Faltungen führe ich ggf. mit einem großen Papierstück an der Tafel vor.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 527–530). Münster: WTM-Verlag

Ein Beispiel, auch für „Große“: Die Dreiecks-Überraschung im Kreis

Hier eine schöne Aufgabe, die immer wieder auch die „Großen“ fasziniert und an der das Falten, Forschen, Finden und Formulieren deutlich werden kann (Schmitt-Hartmann & Herget 2013, S. 140 f.). Ausgangspunkt ist eine farbige Papierscheibe aus dem Moderationskoffer.



Bestimmen Sie durch zweimaliges Falten den Mittelpunkt M des kreisförmigen Papierstücks.

Falten Sie einen Punkt des Papierrandes auf M. Bezeichnen Sie die beiden Endpunkte der Faltlinie mit P_1 und P_2.

Falten Sie einen weiteren Punkt des Papierrandes so auf M, dass die entstehende Faltlinie durch den Punkt P_1 verläuft. Bezeichnen Sie den anderen Endpunkt der Faltlinie mit P_3.

Falten Sie schließlich das Papierstück so, dass die Faltlinie durch die Punkte P_2 und P_3 verläuft. Die eingefaltete Papierlasche berührt den Mittelpunkt des Kreises.

Welches besondere Dreieck entsteht? Warum?

Begründen Sie auch, warum die eingefalteten Laschen bei den weiteren Schritten weder von einer Faltlinie geknickt werden noch über den Rand des Ergebnis-Dreiecks hinausragen.

... einfach und überraschend leistungsfähig!

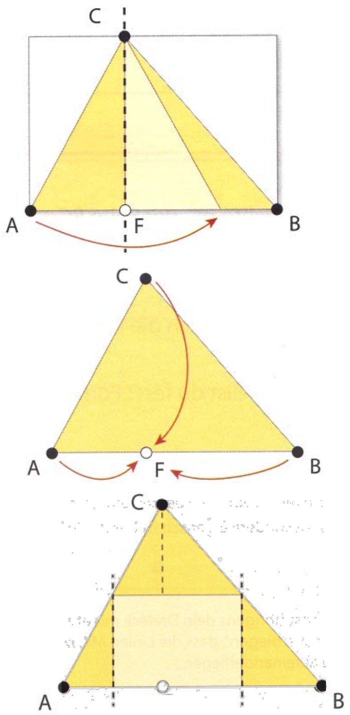
Falten ist an sich einfach, elementar. Doch es fordert und fördert Sorgfalt, Aufmerksamkeit, Konzentration, beim Vormachen wie beim Nachmachen. Die Faltprodukte lassen sich sehr gut ins Schulheft einkleben (sie sind ja kleiner als das Ausgangsformat A4) – und sie lassen sich bei Bedarf auch wieder auseinanderklappen: Eine „geronnene Bewegung & Verformung“, die jederzeit „wieder verflüssigt werden kann“ (Bender 2001, in anderem Zusammenhang), sozusagen *dynamische Geometrie*, ganz ohne Software.

Auch die Forschungsergebnisse werden an der Tafel und im Heft notiert, schließlich auch die Begründungen – als Ergebnis des abschließenden Klassengesprächs, wesentlich von der Lehrkraft getragen: „Warum klappt das so? Stimmt das wirklich ganz genau? Immer?“ Dabei zeigt sich, dass Falten durchaus auch anspruchsvoll ist – wenn man nicht beim Falten stehen bleibt: Beweise zum Anfassen – und zum Mitdenken/Nachdenken.

Ein erprobter Einstieg – senkrecht, parallel, Dreiecksgeometrie ...

In (Herget 2013) wird ein Unterrichtsgang ab etwa Jahrgangsstufe 6 und 7 vorgestellt. Dort werden, ausgehend von ersten Faltlinien, zunächst die elementar-geometrischen Begriffe *senkrecht* und *parallel* erarbeitet und die Grundfaltungen *Punkt auf Punkt* und *Strecke auf Strecke* thematisiert (vgl. auch Wollring 2002, Schmitt-Hartmann & Herget 2013). Als bewusste Herausforderung erweist sich das erste kleine Forschungsprojekt: Wie kann es gelingen, ein DIN-A4-Blatt zu halbieren bzw. zu vierteln, und zwar auf *möglichst vielen* verschiedenen Wegen?

Schließlich stellt jede/jeder einige individuelle Dreiecke aus einem A4-Blatt her und erkundet daran die besonderen Eigenschaften der Höhen, Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden. Faltungen zu besonderen Winkeln, zur Winkelsumme und zum Flächeninhalt vom Dreieck und vom Trapez können sich anschließen, schlagen so die Brücke hin zu Gleichungen und Termen. Ideen für Klasse 9 bieten dann etwa (Zeyher & Kleine 2011), bis Klasse 12/13 (Schmitt-Hartmann & Herget 2013) und (Etzold & Petzschler 2014).



Nimm eines deiner A4-Dreiecke. Trage – *auf der Rückseite!* – in den Punkten A, B und C die Winkel α, β und γ farbig ein.

Falte die Höhe von C auf AB. Du erhältst auf der Seite AB den Punkt F.

Falte nun A auf F, falte auch B auf F und schließlich auch C auf F.

Was fällt dir an den Winkeln in F auf? Was bedeutet das für die Winkelsumme im Dreieck?

Aus dem Dreieck ist jetzt ein Rechteck entstanden. Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks – du kannst dabei *g* für die Länge von AB setzen und *h* für die Länge von CF.
Was bedeutet das für den Dreiecks-Flächeninhalt?

Kein Grund, geknickt zu sein – Falten find‘ ich gut!

Tatsächlich bietet das Falten zahlreiche attraktive Ergänzungen für den Mathematikunterricht, auch jenseits der Grundschule, sogar bis in die Sekundarstufe II. Über das Falten können Schülerinnen und Schüler auf ganz eigene Weise mathematische Zusammenhänge entdecken und vertiefen – und erleben dabei die Mathematik *Hand*lungs-orientiert und wirklich be*greif*bar. Heinz Klaus Strick sagte einmal: „Die Schülerinnen und Schüler entdecken tatsächlich Falten im Gehirn, mit denen sie vorher nicht gerechnet hatten.“ Ein Blick in die Literatur, gerade aus den letzten Jahren, aber auch in einige Schulbuchwerke zeigt, dass und wie dies zunehmend wertgeschätzt wird. Ein Beitrag zum Entfalten des Mathematikunterrichts – Gefällt mir!

Literatur

Bender, P. (2001). Schul-Geometrie und Computer-Geometrie. In: Elschenbroich, H.-J. et al. (Hrsg.): *Zeichnung − Figur − Zugfigur* (S. 31–40). Hildesheim: Franzbecker.

Besuden, H. (2010). Zur Dynamisierung geometrischer Figuren. In: Herget, W. & Richter, K. (Hrsg.): *Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen* (S. 37−47). Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Etzold, H. & Petzschler, I. (2014). *Mathe verstehen durch Papierfalten. Anleitungen und Arbeitsblätter für die Sekundarstufe*. Mülheim: Verlag an der Ruhr.

Flachsmeyer, J. (2009). Mathematikdidaktische Belege des Origami. *Mathematische Semesterberichte*, *56/2*, 201−214.

Henn, H.-W. (2009). Gefaltete Mathematik: Origami − Die Kunst des Papierfaltens. *Der Mathematikunterricht*, *55/2*, 40−50.

Herget, W. (2013). Falten und Forschen, Finden und Formulieren. MatheWelt. *mathematik lehren*, *176*, 24−40.

Herget, W. & Strick, H. K. (2012). *Die etwas andere Aufgabe 2. Mathe mit Pfiff*. Seelze: Friedrich Verlag.

Jäger, J.; Kroll, W. & Schupp, H. (2014). Blattfaltungen. Erscheint in: *Mathematische Semesterberichte.*

Petzschler, I. (2011a). Vom Dreieck zum Stern. *mathematik lehren*, *168*, 67.

Petzschler, I. (2011b). Entdeckungen beim Papierfalten. In: Krohn, T. et al. (Hrsg.), *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik* (S. 269−274). Hildesheim: Franzbecker.

Pietsch, M. (2007). Papier falten und Geometrie begreifen. *mathematik lehren*, *144*, 13–17.

Schmitt-Hartmann, R. & Herget, W. (2013). Papierfalten im Mathematikunterricht. Moderner Mathematikunterricht. Arbeitsblätter für die Klassen 5 bis 12. Stuttgart: Klett.

Schmitz, M. (2012). Papierfalten auch im Mathematikunterricht. Begründungen und Beispiele. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.*

Steibl, H. (1997). *Geometrie aus dem Zettelkasten*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Wollring, B. (2002). Ein Parcours zum Origami. Mathe-Welt. *mathematik lehren*, *113*, 22–46.

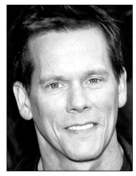
Wollring, B. (2014). Rezension zu (Schmitt-Hartmann & Herget). *Mitteilungen des Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *96*, 67–70.

Zeyher, A. & Kleine, M. (2011). Faltmuster erkunden. MatheWelt. *mathematik lehren*, *166*, 24–40.

Horst HISCHER

Kleine Welten und Netzwerke: ihr mögliches „diskretes Potential“ für Didaktik, Unterricht und Pädagogik

Das *Kleine-Welt-Phänomen* wird seit Ende der 1990er Jahre in *Informatik*, *Diskreter Mathematik*, *Mathematischer Optimierung* und *Soziologie* erörtert; es ist typisch für viele große (auch soziale) „Netzwerke“. Gemeinsam mit der Netzwerktheorie hat es Potential für Forschung und Entwicklung in der Mathematikdidaktik und in der Pädagogik, und für den Mathematikunterricht bietet es Möglichkeiten des Experimentierens und Reflektierens.

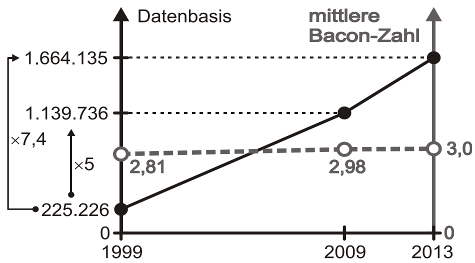


Das Kevin-Bacon-Orakel

Der bis Ende der 1990er Jahre kaum bekannte Film- und Fernsehschauspieler („Akteur“) Kevin Bacon spielte früher nur Nebenrollen und war 1996 zu internationaler Bekanntheit gelangt, als im *Time Magazine* die Website *The Oracle of Bacon* des Informatikers Brett Tjaden – http://oracleofbacon.org/ – als eine der „Top Ten“ ausgezeichnet wurde. Ihr liegt als ständig aktualisierte Datenbank die sog. *Internet Movie Data Base* – http://www.imdb.com/ – zugrunde. Die Eingabe des Namens eines beliebigen registrierten Akteurs liefert eine bestimmte natürliche Zahl (oder ∞) als „Abstand“ zu Bacon, genannt *Bacon-Zahl* dieses Akteurs, z. B. „3“ als Bacon-Zahl von Heinrich George. Dazu betrachte man den *Zusammenarbeitsgraphen*, dessen Knoten für die in der Datenbank erfassten Akteure stehen, wobei zwischen zwei Akteuren genau dann eine Kante verläuft, wenn beide in einem Film gemeinsam mitgewirkt haben. Die Bacon-Zahl eines Akteurs A ist dann die *Länge eines kürzesten Weges* zwischen Bacon und A, also die graphentheoretische *Entfernung* $\mathrm{d}(A, \text{Bacon})$. Die Tabelle listet die absoluten Häufigkeiten der Bacon-Zahlen im Stande von 1999 auf, dazu die zugehörige Datenbasis und die *mittlere Bacon-Zahl* von damals knapp 3.

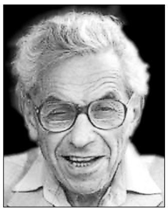
Bacon-Zahl	1999
0	1
1	1.181
2	71.397
3	124.975
4	25.665
5	1.787
6	196
7	22
8	2
mittlere Bacon-Zahl:	2,81
Datenbasis:	225.226

Die graphische Darstellung zeigt die zeitliche Entwicklung der Bacon-Zahlen bis 2013, wobei trotz erheblicher Vergrößerung der Datenbasis die *mittlere Bacon-Zahl* nahezu stabil ist. Weitere Analysen zeigen, dass trotz Zunahme der Datenbasis die *maximale endliche Bacon-Zahl* 8 bleibt und dass auch der *mittlere Knotenabstand* quasi *unabhängig von der Datenbasis* ist.



In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 531–534). Münster: WTM-Verlag

Die Erdős-Zahl



Die „Erdős-Zahl“ ist ähnlich wie die Bacon-Zahl definiert, sie bezieht sich auf den bedeutenden ungarischen Mathematiker Pál Erdős. Der (zeitabhängige) *Zusammenarbeitsgraph* aller (weltweit!) sowohl lebenden als auch nicht mehr lebenden, jeweils publiziert habenden Mathematiker(innen) (hier „Autoren“ genannt) sei *Mathematiker-Graph* genannt und hier mit $\mathbf{C}_{\mathrm{m}}$ bezeichnet („**c**ollaboration graph“). Zwischen zwei Knoten von $\mathbf{C}_{\mathrm{m}}$ (also diesen Autoren) verläuft in Analogie zum Akteurs-Graphen genau dann eine Kante, wenn sie mindestens eine Publikation *gemeinsam* verfasst haben (wobei auch weitere Autoren beteiligt sein können). Für alle Autoren M aus $\mathbf{C}_{\mathrm{m}}$ ist dann $\mathrm{d}(M, \text{Erdős})$ deren *Erdős-Zahl*. $\mathbf{C}_{\mathrm{m}}$ basiert auf der „MathSciNet“ genannten Datenbank, die von der *American Mathematical Society* gepflegt wird. Die Erdős-Zahlen aller Autoren aus $\mathbf{C}_{\mathrm{m}}$ sind abrufbar unter www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html (sie können ebenfalls ggf. ∞ sein). Die Autoren mit endlicher Erdős-Zahl bilden den *Erdős-Graph* genannten Untergraphen von $\mathbf{C}_{\mathrm{m}}$, der mit $\mathbf{C}_{\mathrm{e}}$ bezeichnet sei. Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten dieser endlichen Erdős-Zahlen. Wie bei der Bacon-Zahl liegt eine (angesichts der großen Datenbasis) *sehr kleine mittlere Erdős-Zahl* vor.

Erdős-Zahl	Häufigkeit 2010
1	504
2	6593
3	33605
4	83642
5	87760
6	40014
7	11591
8	3146
9	819
10	244
11	68
12	23
13	5
mittlere Erdős-Zahl:	4,65
Datenbasis:	268.015

Das Kleine-Welt-Phänomen

Beide Tabellen liefern auch den jeweils maximal möglichen Knotenabstand: Im Erdős-Graphen existiert zwischen Autoren A und B stets ein Weg über Erdős, und weil die Erdős-Zahl maximal 13 ist, folgt $\mathrm{d}(A,B)$£ 26. Analog ist im Akteurs-Graphen $\mathrm{d}(A,B)$£ 16, wobei tatsächlich $\mathrm{d}(A,B)$£ 15 gilt. Der *maximale Knotenabstand* eines Graphen ist sein *Durchmesser*, der also in beiden Fällen im Vergleich zur jeweils großen Datenbasis *sehr klein* ist. Damit ist auch der *mittlere Knotenabstand* jeweils *„relativ klein“*, nämlich kleiner als der jeweils maximale Knotenabstand. Das bedeutet per saldo eine *„schnelle Durchsuchbarkeit“* beider Graphen, was zu folgender Erfahrung passt: Stößt man als Fremder zu einer Versammlung und stellt nach kurzer Unterhaltung fest, dass man mit einem anderen Teilnehmer einen gemeinsamen Bekannten hat, so kommentiert man das etwa mit *„Ach, wie ist die Welt doch klein!“*. In diesem Sinne sind beide Graphen *Beispiele für Kleine Welten*. Für viele große, gewachsene Netzwerke gilt ferner empirisch das sog. *„Potenzgesetz“*: Ist k der Grad eines Knotens und $p(k)$ die relative Häufigkeit der Anzahl der Knoten mit dem Grad k, so gilt $p(k):\ k^{-\gamma}$ ($\gamma = \text{const.}$) für große k, z. B. ist $\gamma_{\mathrm{Bacon}} \approx 2{,}3$ und $\gamma_{\mathrm{Erdős}} \approx 2{,}97$.

Netzgraph, Netzwerk, Vernetzung

Ein *Netz* enthält im alltagssprachlichen Verständnis *Maschen*, und es besteht aus *Knoten* und den sie verbindenden *Kanten.* Ein *zusammenhängender* Graph, bei dem jede Kante Teil einer Masche ist und jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat, ist *ideal vernetzt* – er sei *Netzgraph* genannt. Ein zusammenhängender, maschenhaltiger Graph ist ein *Netzwerk.* (In der Netzwerktheorie sind „Graph“ und „Netzwerk“ meist Synonyme.) Eine *ideale Vernetzung* würde bedeuten, dass es zu jedem Eingang mindestens zwei Ausgänge gibt, oder anders, dass es *stets verschiedene Wege zu einem Ziel* gibt (als Kennzeichen für einen *offenen Unterricht* deutbar). Dazu gibt es graduelle Abstufungen der Vernetzung, messbar durch *Vernetzungsgradmaße*. Speziell *Bäume* sind *nicht vernetzt*, sondern nur *verzweigt*.

Netzwerkmodellierung

Ab 1959 diskutierten *Erdős und Rényi* ein stochastisches Modell, das aber das später entdeckte *Kleine-Welt-Phänomen* nicht erklären konnte. 1998 stellten *Watts und Strogatz* ein Modell vor, bei dem vorhandene Kanten eines regulären Graphen stochastisch „neu verdrahtet“ wurden. Damit war zwar das Entstehen Kleiner Welten modellierbar und erklärbar, nicht aber das Potenzgesetz. Beides war erstmalig mit dem 1999 von *Barabási und Albert* präsentierten Modell möglich, das auf der Entstehung von neuen Knoten *und* neuen Kanten durch *bevorzugtes Andocken* beruhte (*Matthäus-Effekt* oder “rich get richer”). Zugleich konnte dieses Modell das Entstehen von *Naben* (wenigen Knoten mit extrem hohem Knotengrad) erklären. Naben sind für das *Ausfallverhalten* von Netzwerken verantwortlich: *Stabilität* bezüglich des Ausfalls zufällig ausgewählter Knoten (Fehlerverhalten) und *Instabilität* beim Ausfall gezielt angegriffener Knoten (Angriffsverhalten).

Kleine Welten als „diskretes Potential“ für die Mathematikdidaktik?

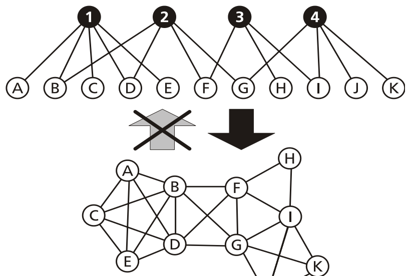
Zunächst ist an Netzwerke zu denken, die der Strukturierung von *Unterrichtsinhalten* dienen. *Knoten* sind z. B. *Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, Vermutungen ...*, aber auch *Beispiele* unter Einschluss von *Übungsaufgaben*. *Kanten* sind Beziehungen zwischen diesen Knoten: *logische* im Sinne des Schließens und des Folgerns bzw. des Folgens, aber auch *emotionale* des Entdeckens, Erlebens, Irrens, Ratlosseins ..., die insgesamt zu einer individuellen lernpsychologischen „Verankerung“ der Knoten beitragen (können). Diese Kanten können sowohl *gerichtet* als auch *ungerichtet* sein. Hier sind nun die für Kleine Welten typischen *Naben* bedeutsam: Sie ermöglichen *kurze Wege* zwischen den Knoten, und ihr *Ausfallverhalten* ist wichtig: (Wie) entstehen sie von alleine, wie kann man ihre Entstehung und Stabilisierung fördern, wie Wichtiges gegenüber Unwichtigem betonen?

Kleine Welten als „diskretes Potential“ für den Mathematikunterricht?

Exemplarisch seien einige Anregungen skizziert: (1) „Renaissance“ der Thematisierung endlicher Graphen im Unterricht durch Experimentieren mit „kleinen“ endlichen Graphen. (2) Kleine-Welt-Phänomen: Aneignung empirischen Wissens durch Experimentieren im WWW mit „großen“ endlichen Graphen (Bacon, Erdős). (3) Statistische Auswertung entsprechender Datenbanken: Mittelwerte, zeitliche Entwicklungen, Potenzgesetz, ... (4) Eigenschaften großer „Netzwerke“: Naben, Ausfallverhalten. (5) Netzwerkstatistiken: mittlerer Knotenabstand, mittlerer Knotengrad, ... (6) Transfer dieses empirischen Wissens auf andere große „Netzwerke“. (7) ...

Kleine Welten als „diskretes Potential“ für die Pädagogik?

Ein *Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext* besteht aus zumindest drei Komponenten: *Bestandteile*, *Benutzer* und *Betrachter*. Es ist dem in der Soziologie diskutierten *System* vergleichbar. Die **Bestandteile** sind die schon angesprochenen *Unterrichtsinhalte*, nämlich *thematische Elemente* und *Beziehungen*, beschreibbar durch einen Graphen mit *Knoten* (Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, …) und *Kanten* (logische und emotionale Beziehungen). **Benutzer** sind insbesondere die *Schülerinnen und Schüler,* deren Beziehungen untereinander ebenfalls durch einen Graphen beschreibbar sind, und **Betrachter** sind insbesondere die *Lehrpersonen*, deren Beziehungen auch durch einen Graphen beschreibbar sind. Weitere „Vernetzungen“ sind denkbar durch diverse Relationen: innerhalb der Benutzer und der Betrachter, ferner durch „Quer“-Beziehungen zwischen ihnen und den Bestandteilen, z. B. als **soziale Netzwerke**, die als *bipartite Graphen* (oberer Teil der Abbildung unten) beschreibbar sind und in der Soziologie untersucht werden: Wenn oben die Ziffern für Filme und die Buchstaben für Akteure stehen, dann liegt ein Akteurs-Graph vor und darunter dessen *unipartite Projektion*, die weniger Informationen enthält. Man kann beide auch als Darstellungen des Erdős-Graphen ansehen oder sich Schülerinnen und Schüler mit ihren Interessen usw. vorstellen: Bipartite Graphen können somit ein Werkzeug zur Beschreibung und Analyse vielfältiger sozialer Strukturen des Unterrichtsgeschehens bilden.



Literatur

Hischer, Horst [2014]: *Kleine Welten und Netzwerke und ihr mögliches Potential für Didaktik, Unterricht und Pädagogik.* Erscheint in einem Tagungsband. Vorab als Preprint verfügbar: http://www.math.uni-sb.de/service/preprints/preprint342.pdf

Horst HISCHER

Zum Einfluss der Informatik auf Unterricht und Didaktik: weiterhin nur Computereinsatz – noch immer keine Medienbildung?

Anlässe zum Nachdenken und zum Vordenken

1. Anlass: *„Die Taschenrechner sind schuld“*. 2007 berichtete die lokale Tagespresse über Rechenfertigkeitsdefizite bei Studienanfängern der Ingenieurwissenschaften, deren Ursachen angeblich im verstärkten und unangemessenen Einsatz von Taschenrechnern im Unterricht zu finden seien, und mittlerweile gibt es ähnliche Klagen von weiteren Hochschulen und Institutionen (alles zitiert in [Hischer 2013]).

2. Anlass: *Epistemologisches Dreieck und Begriffsentwicklung*. Das von Bromme, Seeger und Steinbring untersuchte „epistemologische Dreieck“ führt zu der Frage, ob infolge zu starker Auslagerung individueller händischer Tätigkeiten auf Neue Medien ein möglicher negativer Einfluss auf die Entwicklung von Fertigkeiten und Fähigkeiten zu befürchten ist (siehe 1. Anlass): Software (insbes. zu CAS) enthält Algorithmen und Kalküle, die nicht mehr individuell beherrscht werden müssen, so dass dann die „Kalkül-Sphäre“ im Begriffsbildungsprozess drastisch vernachlässigt wird.

3. Anlass: *Taschenrechnereinsatz gemäß Darstellung in einem Schulbuch.* Die Darstellung für den Einstieg in die Integralrechnung in einem aktuellen Schulbuch gibt Anlass zur Sorge, weil hier der sowohl mühsame als auch wichtige Weg zur *Bildung eines Begriffs von „Integral“* durch vorschnelles „Knöpfchendrücken“ per Taschencomputer übersprungen wird. Weder G9 noch Turbo-Abitur können aber einen solch untragbaren Weg rechtfertigen.

4. Anlass: *Mathematikunterricht und Informatik.* Anfang der 1970er Jahre wurden an deutschen Hochschulen erste Lehrstühle für Informatik eingerichtet (z. B. für Programmiersprachen und Betriebssysteme), und 2012 gab es z. B. an der Universität des Saarlandes bereits 28 Denominationen für Informatik. Das führt zur Frage, welche „informatischen Aspekte“ allgemeinbildungsrelevant sind, denn die mögliche Bedeutung der Informatik für den Mathematikunterricht ist nicht auf „Computereinsatz“ reduzierbar.

Neue Medien und Schule: Skizze der Entwicklung

Vor der o. g. Etablierung der Informatik an Hochschulen spielte die bis dahin so genannte EDV (Elektronische Datenverarbeitung) im Mathematikunterricht kaum eine Rolle, in anderen Fächern ohnehin nicht. Anfang der 1970er Jahre führten Lehrkräfte vereinzelt einfache elektronische Taschen-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 535–538). Münster: WTM-Verlag

rechner in den Mathematikunterricht ein, teilweise sogar erste (teure) Tischcomputer wie z. B. Wang. Ende der 1970er änderte sich das schnell mit dem Aufkommen der Kultrechner Apple II und Commodore 8032, 1981 gefolgt vom „IBM-PC“ (gepaart mit der Gründung von Microsoft) und sogleich den dazu „kompatiblen“ und 1984 vom Apple Macintosh – erstmals mit „graphischer Benutzeroberfläche“ und „Maus“. Seit Mitte der 1970er Jahre gab es in der Mathematikdidaktik zunehmend Aktivitäten zum Einsatz von Taschenrechnern und auch Tischcomputern, so hatte z. B. die GDM-Tagung 1978 in Münster den Schwerpunkt „Fragen zum Informatikunterricht“. Hier wurde der GDM-Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Informatik“ (kurz: AKMU&I) gegründet, der 1980 auf seiner Tagung in Bottrop als Ziel formulierte, es ginge u. a. um die *„Untersuchung von Auswirkungen der Informatik auf den Mathematikunterricht, die erkennbar sind und in Zukunft noch stärker in Erscheinung treten werden“*.

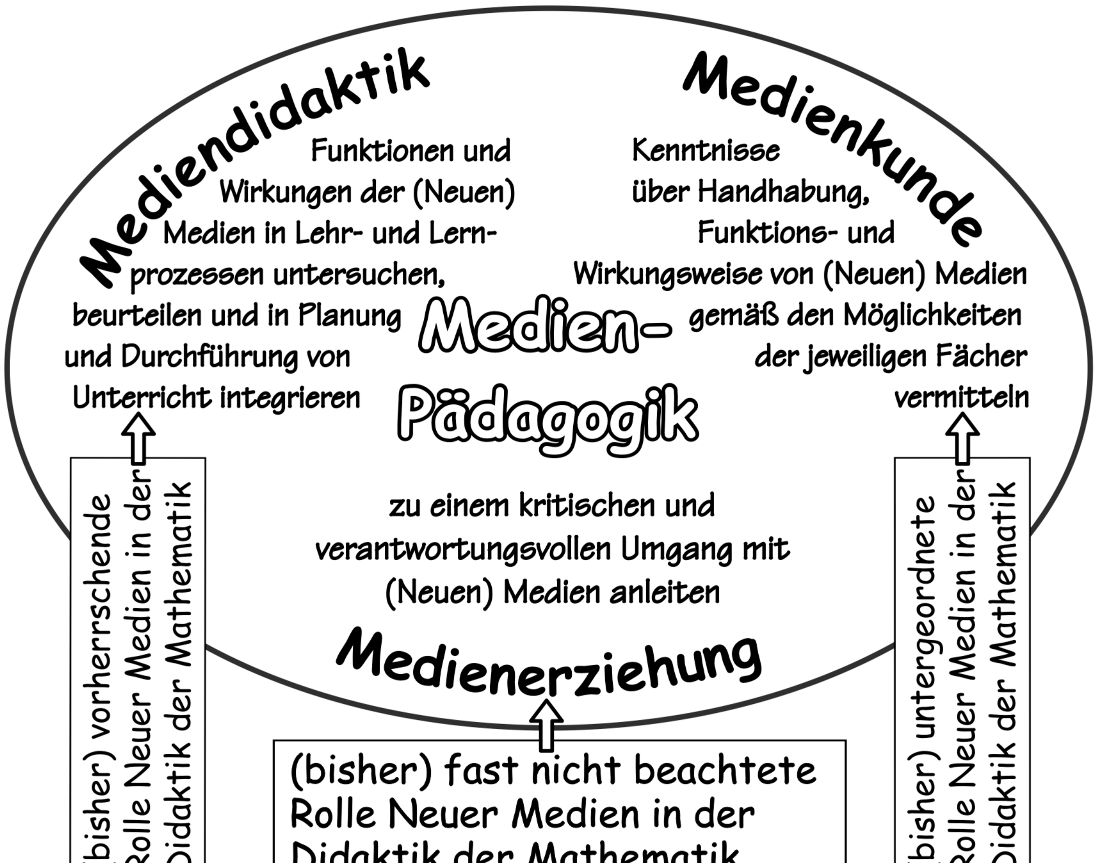
Nach Aktivitäten von Klaus Haefner und anderen fand 1983 in Loccum eine Grundsatztagung zum Thema „Neue Technologien und Schule“ statt: Hier ging es nicht mehr um informatische Inhalte im Mathematikunterricht, sondern um die Chancen und Risiken der Informations- und Kommunikationstechniken für Individuum und Gesellschaft und deren *Thematisierung im gesamten Fächerkanon aller Schulformen*. Genauer: Nicht der „Computereinsatz im Unterricht“ stand im Fokus, sondern die *„Neuen Medien als Unterrichtsgegenstand“* – gesehen als wichtiger Aspekt künftiger Allgemeinbildung! Das führte 1984 zum „Rahmenkonzept für die informationstechnische Bildung in Schule und Ausbildung“ der BLK (Bund-Länder-Kommission für Forschungsförderung und Bildungsplanung) und 1987 zum „Gesamtkonzept für die Informationstechnische Bildung“ der BLK (erstmals auch *Medienerziehung* betreffend). 1989 wurde in Niedersachen nach 6-jähriger Entwicklungsarbeit das fach- und schulformübergreifende Projekt „Informations- und kommunikationstechnologische Bildung“ (iuk-Bildung) als Realisierung des BLK-Konzepts veröffentlicht, basierend auf einem *„integrativen Ansatz“* (ähnlich war es z. B. in Nordrhein-Westfalen).

Mathematikunterricht und Informatik in den 1990ern

In den 1990er Jahren bestimmten die neuen „informatischen Werkzeuge“ für *Computeralgebra* (CAS, Aspekt der „Trivialisierung“ → Buchberger), für *bewegliche Geometrie* (DGS) und für *Modellbildung* und *Simulation* die Diskussion in der Mathematikdidaktik, ohne dass hingegen die o. g. iuk-Bildung und die durch Klafki und Heymann entfachte Diskussion um Allgemeinbildung dominierten. Mit Blick auf „Auswirkungen der Informatik“ ist *nicht* erkennbar, wie und ob sich die Zielsetzung des AK MU&I von 1980 in der Didaktik der Mathematik bzw. im Mathematikunterricht nachhaltig niedergeschlagen hat – es sei denn, man würde den *„Computer als Werkzeug“* dazu zählen. Das wäre aber Etikettenschwindel, denn Informatik ist nicht auf „Computereinsatz“ reduzierbar. Und die mit dem Auftreten von CAS ernsthaft erörterte „Trivialisierung“ scheint dazu zu führen, dass kritisches Denken durch Tastendruck ersetzt wird (3. Anlass). Aber was wäre denn wichtig? Das kündigt sich bereits im erwähnten fachübergreifenden *integrativen Ansatz* der iuk-Bildung an: Es kann nicht *nur um den Computereinsatz im Mathematikunterricht* gehen, sondern die Neuen Medien müssen darüber hinaus auch *Unterrichtsgegenstand* werden!

Medienbildung als Integrative Medienpädagogik

Mediendidaktik, *Medienkunde* und *Medienerziehung* sind Teilgebiete der *Medienpädagogik. „Integrative Medienpädagogik“* ist in zweifachem Sinn „integrativ“: (1) Diese drei Teilgebiete der Medienpädagogik sind bei Planung, Durchführung und Evaluation von Unterricht *gemeinsam* und nicht losgelöst voneinander zu berücksichtigen. (2) Eine so verstandene Medienpädagogik kann nicht von einem einzelnen Unterrichtsfach allein übernommen werden, vielmehr sind im Prinzip alle Unterrichtsfächer *gemeinsam* mit je spezifischen Ansätzen gefordert, und „Integrative Medienpädagogik“ ist heute fachübergreifend als „**Medienbildung**“ zu verstehen.



Fazit

Die in diesem Rahmen nur knapp möglichen Betrachtungen seien mit folgenden *Thesen* zusammengefasst:

- Der Computer ist ein Produkt der Mathematik und der aus ihr hervorgegangenen Informatik, und er ist ein neues leistungsfähiges Werkzeug für die Mathematik und ihre Anwendungen.
- Es ist naheliegend, im Unterricht in mediendidaktisch begründeten (!) Situationen den Computer und ggf. andere Neue Medien als zeitgemäße Werkzeuge einzusetzen, wenn dadurch im Unterricht kritisches Nachdenken nicht ersetzt wird.
- Eine „Computereinsatzmöglichkeitensuche“ kann im Unterricht unter mediendidaktischen Aspekten (und in pädagogischer Hinsicht sowieso) keinen Platz haben.
- Wohl aber wird es im Mathematikunterricht im Rahmen eines Beitrags zu einer Medienbildung auch über mediendidaktische Aspekte hinaus weitere sinnvolle Einsatzmöglichkeiten Neuer Medien geben, und zwar sowohl in medienkundlicher als auch in medienerzieherischer Sicht.
- Jedoch: Die „aufklärende“ Behandlung Neuer Medien im Sinne von Medienkunde und Medienerziehung erfordert nicht immer deren Unterrichtseinsatz.
- Die möglicherweise negativen Folgen bei übermäßiger „Auslagerung“ individueller, „händischer“ Tätigkeiten auf den Computer sind mit Blick auf das epistemologische Dreieck zu untersuchen und zu beachten.
- Gemäß Wolfgang Klafki ist („epochaltypisch“) diskursiv zu klären, was allgemeinbildungsrelevante „informatische Aspekte“ sein sollen und welche darunter den Mathematikunterricht betreffen (sollen/können).

➢ Das sei um folgende *verschärfende These* ergänzt:

- Ohne hinreichend gefestigte händische Erfahrung im Umgang mit Termen **vor** Einsatz eines CAS wird in aller Regel kein Verständnis für formal beschriebene mathematische Zusammenhänge zu erwarten sein.

Daraus resultiert ein umfangreiches Programm für Forschung und Entwicklung zum Bereich: *Mathematikunterricht und Medienbildung.*

Literatur

Hischer, Horst [2013]: Zum Einfluss der Informatik auf die Mathematikdidaktik. Weiterhin nur Computereinsatz und noch immer keine Medienbildung? In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Heft 95, Juli 2013, 15 – 24.

Tobias HOCK, Aachen

Axiomatik in der Schule: ein didaktisches Himmelfahrts-kommando? Ein genetischer Zugang zu Kolmogoroff

„*Of the many odd and various things we believe, few are believed more confidently than the truths of simple mathematics. When asked for an example of a thoroughly dependable fact, many will turn from common sense – 'after all, they used to think humans could'nt fly' – from science – 'the sun has risen every day so far, but it might fail us tomorrow' – to the security of arithmetic – 'but 2 plus 2 is surely 4'.*" (Maddy 1990, S. 1)

Die Mathematik gilt als Musterbeispiel für logische Stringenz und lückenlose Beweisführung. Mathematische Sätze haben, sobald sie einmal bewiesen sind, den Ruf unumstößlicher Wahrheiten, an denen niemand mehr zweifeln kann. Aus fachlicher Sicht führt jede mathematisch-logische Argumentationskette irgendwann zu Aussagen, die in einer mathematischen Theorie nicht weiter bewiesen werden (können), den sogenannten Axiomen. Von ihnen ausgehend stellt sich die Mathematik als eine deduktive Wissenschaft dar, die allein auf Grundlage der Axiome mit logischen Schlüssen die Richtigkeit ihrer Aussagen sichert.

Den Ausführungen in diesem Artikel liegt die Prämisse zu Grunde, dass das axiomatische Arbeiten „ein zu wichtiger Bestandteil des mathematischen Denkens [ist], als daß wir es den Schülern vorenthalten dürften" (Lehmann 1979, S. 120). Es ist nach Ansicht des Autors heutzutage durchaus noch möglich, in sinnvoller Weise Axiomatik an der Schule zu betreiben. Zu diesem Zweck wurde eine Unterrichtsreihe zu Andrei Kolmogoroffs Axiomen der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Zusatzkurse der Sekundarstufe II entwickelt, die in diesem Artikel vorgestellt wird. Ferner werden erste Ergebnisse einer qualitativen empirischen Pilotstudie über Schülervorstellungen zu diesem Thema präsentiert.

1. Fachlicher und historischer Hintergrund

Aus fachlicher und historischer Sicht ist es wichtig, zwischen der klassischen und der modernen Sichtweise auf Axiomensysteme zu unterscheiden (vgl. van der Waerden 1967). Prominentestes Beispiel für die klassische Axiomatik ist Euklids *Die Elemente*, der moderne Standpunkt ist vor allem durch David Hilberts *Grundlagen der Geometrie* repräsentiert. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass bis ins 20. Jahrhundert Axiome (und damit auch die daraus abgeleiteten Sätze) als wahre Aussagen über (wohlbekannte) Objekte der Anschauung angesehen wurden, wohingegen seit Hilbert ontologische Fragen aus der mathematischen Betrachtung ausge-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 539–542). Münster: WTM-Verlag

schlossen werden: Mathematische Theorien sind formale Denksysteme über abstrakte, durch die Axiome implizit definierte Objekte.

2. Didaktische Perspektiven

Als Reaktion (unter anderem) auf die von der Bourbaki-Gruppe vorangetriebene Strukturmathematik entstanden unter dem Schlagwort „New Math" in den 60er und 70er Jahren – zuerst in den USA und später in Europa – umfangreiche Reformbestrebungen, um die Schulmathematik stärker fachsystematisch auszurichten. Der Fokus auf Mengentheorie und abstrakte algebraische Strukturen führte jedoch zu heftigen Gegenreaktionen und letztendlich zum schnellen Scheitern der Bewegung.

Im Hinblick auf die fachsystematische Ausrichtung von Schulunterricht hat Freudenthal den Begriff „anti-didaktische Inversion" geprägt: Die Mathematik wird als deduktiv geordnetes *Produkt* präsentiert und „die Gedanken, die uns zum Resultat führten, verheimlichen wir" (1973, S. 101). Sinnvoller ist es seiner Meinung nach, wenn sich Schüler mit dem *Prozess* des Axiomatisierens beschäftigen, was das anfängliche „lokale Ordnen" weniger Sätze und schlussendlich das „Lösen der ontologischen Bindung" umfasst (vgl. Freudenthal 1973, S. 417). Dies steht im Einklang mit dem genetischem Prinzip im Sinne Wittmanns: Bei einer Ausrichtung des Unterrichts „an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik" (2009, S. 130) sollten Axiomensysteme erst „als *Endstufe* des genetischen Prozesses" behandelt werden (2009, S. 147).

3. Unterrichtsreihe: Kolmogoroff-Axiome

Als Themenbereich für eine erste Konfrontation von Schülern mit axiomatischen Denkweisen wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung gewählt, da das Axiomensystem von Kolmogoroff „zu dem Einfachsten gehört, das es in der Mathematik gibt" (Freudenthal 1973, S. 528). Die Unterrichtsreihe wurde in je drei Doppelstunden im Rahmen zweier Projektkurse in der gymnasialen Oberstufe erprobt. Anknüpfend an die Vorerfahrungen der Schüler aus dem Stochastikunterricht wurden der Laplace'sche und frequentistische Ansatz wiederholt, sowie deren Grenzen bei der Theoriebildung aufgezeigt. Nach einer Einführung in die wesentlichen Aspekte der mengentheoretischen Modellierung von Zufallsexperimenten wurden neun grundlegende Regeln aufgelistet, die innerhalb einer Theorie der Wahrscheinlichkeit Gültigkeit besitzen sollten. Schließlich erkundeten die Schüler die logischen Zusammenhänge zwischen den Regeln (lokales Ordnen) und hielten ihre Ergebnisse in umseitiger Tabelle fest. Dabei gab es durchaus Spielraum für unterschiedliche Beweiswege; das folgende Beispiel stellt ein Ergebnis dar, auf das sich die Schüler in einem der beiden Kurse als gemeinsame Grundlage einigten:

	$\downarrow$ Regel ... kann man folgern aus $\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$P(\Omega) = 1$	■	×					×		
2	$P(\emptyset) = 0$	×	■					×		
3	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$			■	×					
4	$P(A \uplus B) = P(A) + P(B)$			×	■					
5	$P(A) \geq 0$	×			×	■	×			
6	$P(A) \leq 1$	×			×	×	■			
7	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	×			×			■		
8	$A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$			×					■	
9	$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$				×	×				■

In der Abschlussdiskussion wurden bereits einige logische Probleme und Auffälligkeiten benannt: „Für Regel 1 braucht man Regel 2 und für Regel 2 braucht man wieder Regel 1“. „Die Regeln 1 und 4 werden besonders häufig zur Begründung herangezogen“. Solche Entdeckungen können als Ausgangspunkt für eine intensivere Auseinandersetzung mit der Notwendigkeit von Axiomen dienen.

4. Interviewstudie

Im Anschluss an die soeben beschriebene Unterrichtsreihe wurden mit insgesamt sieben Schülern Leitfadeninterviews (Dauer je 25-35 Minuten) durchgeführt mit dem Ziel, mehr über mentale Vorstellungen zum Thema Axiomatik zu erfahren und mögliche Fragestellungen für weitere kognitionswissenschaftliche Untersuchungen zu entwickeln. Dabei wurden die Grundannahmen qualitativer Forschung, insbesondere der Grounded Theory (siehe Glaser, Strauss 2005), zugrunde gelegt.

Unter anderem wurden die Schüler in den Interviews erstmalig mit Kolmogoroffs Ansatz konfrontiert, drei Aussagen „einfach“ unbewiesen als Axiome an den Anfang seiner Theorie zu setzen (nämlich 1, 4 und 5) und die Gültigkeit der restlichen Aussagen zu deduzieren. Besonders auf die Frage, was ihre Meinung zu diesem Ansatz sei, gaben die Schüler interessante Antworten:

> S1: „Kann man nichts gegen sagen, es ist ja für jeden einleuchtend erstmal, dass diese Regeln so stimmen.“
>
> S2: „[…] es gibt ja Aussagen, die sind letztendlich … nicht zu beweisen […] diese sieht man halt als Tatsachen an (Interviewer: *Okay*) und deswegen ähem ja finde ich das eigentlich okay.“

Für die meisten der sieben Schüler (wie S1) ist die Wahl von Axiomen durch unmittelbare Evidenz gerechtfertigt und mathematischen Aussagen kann damit ein (wie auch immer gearteter) Wahrheitsgehalt zugesprochen werden. S2 argumentiert dagegen auffällig weniger mit Worten wie ‚anschaulich klar', ‚einleuchtend', ‚stimmt' oder ‚ergibt Sinn'. Zwar verzichtete in den Interviews kein Schüler bei der Bewertung der axiomatischen Methode komplett auf evidenzbasierte Argumente (S2 spricht auch von ‚Tatsachen'), allerdings waren die Unterschiede in Wortwahl und Begründungsmustern zum Teil enorm. Eine zweite Interviewstudie soll sich deshalb speziell auf die Rolle der Wahrheit in der axiomatischen Mathematik konzentrieren, zumal es in diesem Bereich nach Kenntnis des Autors bisher keine kognitionswissenschaftlichen Untersuchungen mit Schülern gibt.

5. Fazit und Ausblick

Die Erprobungen in dem Projektkurs zeigen, dass sich Schüler durchaus auf das Thema Axiomatik einlassen und dies in natürlicher Weise zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit der Notwendigkeit von Axiomen führen kann. Eine Orientierung am fachlichen Vorwissen der Schüler sowie am Prozess des lokalen Ordnens und Axiomatisierens trägt dabei zu einem authentischen Bild der Mathematik bei. Eine didaktisch unmotivierte und rein deduktive Arbeit mit vorgegebenen Axiomensystemen könnte dagegen nach Meinung des Autors zum Scheitern von NewMath beigetragen haben.

Die Auswertung der Einzelinterviews lässt zudem weitere kognitionswissenschaftliche Untersuchungen von Schülervorstellungen zum ontologischen Status von Axiomen (Wahrheit vs. Beweisbarkeit) sowie zur Rechtfertigung bestimmter Axiome sehr vielversprechend erscheinen. Zu diesem Zweck ist derzeit eine zweite Lerneinheit mit anschließender Interviewstudie zum Thema „Sphärische Geometrie" in Planung.

Literatur

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. 2 Bd. Stuttgart: Klett.

Glaser, B. G., Strauss, A.L. (2005). *Grounded Theory: Strategien qualitativer Forschung*. 2. Aufl. Bern: Huber.

Lehmann, W. (1979). Die Betonung konstruktiver Elemente beim axiomatischen Arbeiten. *Didaktik der Mathematik, 2,* 120–126.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

van der Waerden, B. L. (1967). Klassische und moderne Axiomatik. *Elemente der Mathematik, 22,* 1–4.

Wittmann, E. Ch. (2009). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Andrea HOFFKAMP, Berlin

Stoffdidaktik im Fokus – Das Beispiel Lineare (Un-)Abhängigkeit

Curriculumsentwicklung und (Weiter-)Entwicklung von Unterricht bedarf einer Planung, deren Hauptlast von einer „zeitgemäßen lernpsychologisch und mathematisch orientierten Stoffdidaktik getragen [wird]“ (Lambert, 2014). Exemplarisch wird im Artikel am Beispiel der Linearen (Un-) Abhängigkeit gezeigt, wie mit stoffdidaktischen Methoden Folgerungen für didaktisches Handeln und Curriculumsentwicklung in Schule und Hochschule gezogen werden können.

In den Curricula der Bundesländer wird der Begriff der Linearen (Un-)Abhängigkeit, falls er überhaupt genannt wird, zumeist ausschließlich im geometrischen Kontext gesehen. Oftmals wird der Begriff durch die geometrischen Begriffe „Kollinearität“ und „Komplanarität“ ersetzt. Er spielt auch nur dann eine Rolle, wenn es um Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen geht. Es gibt kein Curriculum, aus dem explizit hervorgeht, dass der Begriff aber auch bei Linearen Gleichungssystemen (LGS) und Lösbarkeitsfragen zentral ist. Im Gegenteil: Die Curricula suggerieren, dass LGS den Kalkülanteil darstellen, mit dessen Hilfe man Schnitt- bzw. Lageprobleme schematisch lösen kann, der aber keine strukturelle Verbindung zum Rest aufweist. Lehrende geraten deswegen schnell in die Falle der kochrezeptartigen Behandlung von Fragestellungen der analytischen Geometrie. Oftmals mangelt es an Flexibilität im Umgang mit der Materie.

Um der beschriebenen Problemlage zu begegnen, werden im Folgenden stoffdidaktische Methoden verwendet. Als Leitfaden dient dabei die Zusammenstellung stoffdidaktischer Teilprozesse von Lambert (2014).

Genetisierung – epistemologische Analyse der historischen Genese[1]

Die „Theorie der Linearität“ wurde ursprünglich im Kontext der LGS entwickelt. Dabei war Euler (1750) der Erste, der hierbei deskriptiv und qualitativ vorgegangen ist, indem er untersuchte, welcher Gestalt LGS sind, die keine eindeutige Lösung besitzen. Er verfolgte damit noch nicht das Ziel der Theorieentwicklung, sondern bezog sich auf das Lösungsparadigma. So beschreibt er die *(lineare) Abhängigkeit von Gleichungen* dadurch, dass *eine Gleichung in den anderen enthalten* ist. Außerdem trifft er Aussagen zur *Größe der Lösungsmenge*, indem er die Anzahl der „unbestimmbaren Unbekannten“ ermittelt und so zur Anzahl der Parameter gelangt, die zur

[1] Darstellung orientiert an Dorier (2000).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 543–546). Münster: WTM-Verlag

Beschreibung der Lösungen notwendig sind. Eulers Beschreibung war bis in die 2. Hälfte des 19. Jh. das dominierende Konzept von Linearer Abhängigkeit. Erst im Zusammenhang mit der Arbeit von Cramer (ca. 1840-1879) zu Determinanten entwickelten sich die theoretischen Konzepte von *Rang* und *Dualität* aus Fragen der Lösbarkeit von LGS. *Rang als Invariante* legt die Größe der Lösungsmenge (minimaler Erzeuger bzw. maximale Anzahl unabhängiger Lösungen) fest und - durch einen *Dualitätsprozess* - die minimale Anzahl der Gleichungen bzw. maximale Anzahl unabhängiger Gleichungen zur Erzeugung der Lösungsmenge. Epistemologisch mussten dabei einige Hürden überwunden werden. So musste die Möglichkeit gesehen werden, dieselbe Definition von Abhängigkeit sowohl für Gleichungen als auch für n-Tupel zu verwenden. Hierfür musste das Konzept von Dualität antizipiert werden. Ebenso musste die Invarianz (und deren Beweisbedürftigkeit) erkannt werden. Die erste rein theoretische und im heutigen Sinne moderne Formulierung der Konzepte von Rang und Dualität stammt letztlich von Frobenius (1875, S. 255):

> Mehrere particuläre Lösungen
> $A_1^{(\chi)}, \ldots, A_n^{(\chi)}, \ (\chi = 1, \ldots, k)$
> sollen daher *unabhängig* oder *verschiedenen* heissen, wenn $c_1A_\alpha^{(\chi)} + \ldots + c_kA_\alpha^{(\chi)}$ nicht für $\alpha = 1, \ldots, n$, verschwinden kann, ohne dass $c_1, \ldots, c_k$ sämmtlich gleich Null sind, mit anderen Worten, wenn die *k* linearen Formen $A_1^{(\chi)} u_1 + \ldots + A_n^{(\chi)} u_n$ unabhängig sind.

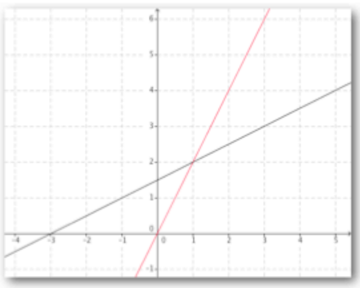
Codierung – Darstellungsebenen und individuelle Zugänge

Für die weitere Analyse betrachten wir vereinfachend quadratische LGS mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten. Solch ein LGS können wir auf drei verschiedene Weisen schreiben bzw. codieren: Als *Zeilenbild*, *Spaltenbild* und in *Matrixschreibweise* (s. Abb.). Recht „natürliche“ Fragen sind dann beispielsweise: Was ist die Lösung? Gibt es denn eine Lösung? Wie viele Lösungen gibt es? Ist das LGS immer lösbar, egal was auf der rechten Seite steht? Um diesen Fragen nachzugehen, betrachten wir Zeilenbild und Spaltenbild einmal eingehender.

Zeilenbild: Aus didaktischer Sicht steht hier der *Simultanaspekt* im Zentrum, also die Frage, ob es (reelle) x,y gibt, die die Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Insofern benötigt man aus kognitiver Sicht *prädikatives Denken* (Schwank, 1999) zur Beantwortung der Fragen. Die graphische Codierung besteht aus *sich schneidenden Geraden*, deren *Schnittpunkt die Lösung* des LGS repräsentiert (s. Abb.). Im Unterrichtsverlauf würde man die Geraden in Parameterform darstellen, so dass sich die Eindeutigkeit der Lösung daraus ergeben würde, dass die *Richtungsvektoren nicht parallel* sind – sie sind *linear unabhängig*.

Zeilenbild

$$2x - y = 0$$
$$-x + 2y = 3$$

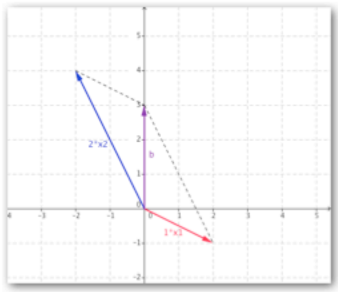


$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenbild

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Linearkombination

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Spaltenbild: Im Spaltenbild stellt sich die Situation anders dar. Hier ist der *dynamische Aspekt* zentral, denn die rechte Seite lässt sich erzeugen, indem man die *Koeffizienten* x,y ändert. Kognitiv benötigt man also *funktionales Denken* (Schwank), und graphisch liegt hier entsprechend eine *Parallelogrammkonstruktion* zur Vektoraddition vor (s. Abb.). Die *Lösung* besteht im Spaltenbild aus den *Koeffizienten der Linearkombination* und die Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich aus der *linearen Unabhängigkeit der Spalten*. Im Spaltenbild lässt sich die Frage, ob das LGS für beliebige Werte auf der rechten Seite lösbar ist, ganz einfach beantworten, denn die *Spalten bilden eine Basis*. Durch *dynamische Visualisierung* ist es im übrigen sofort einsichtig, dass zwei linear unabhängige Vektoren die ganze Ebene aufspannen. Basis lässt sich hiermit ganz einfach intuitiv als maximal linear unabhängige Teilmenge charakterisieren.

Der Vorteil des Zeilenbildes liegt zunächst in dessen Anschaulichkeit. Es knüpft auch direkt an die Sek I im Sinne eines fachlichen Aufbaus an. Der Nachteil ist die Ausbildung eines zu engen Begriffes von Linearer (Un-) Abhängigkeit („kollinear" und „komplanar"). Das Spaltenbild verkörpert hingegen eine neue Sichtweise und knüpft nicht direkt an die Sek I an. Es hat aber den Vorteil strukturell und verallgemeinerbar zu sein. Schon bei einem 3x3-LGS liefert das Zeilenbild drei Ebenen bzw. bei nxn-Systemen n Hyperebenen und deren „Schnittgebilde". Im Spaltenbild hingegen ist die Situation allgemein mit dem Konzept der Linearkombination „leichter" beschreibbar. Das in der historischen Genese entwickelte Konzept der Dualität äußert sich in zwei Schreibweisen für LGS (Zeilen-/Spaltenbild), die verschiedene Sichtweisen und mathematische Erkenntnisse ermöglichen. Das Zeilenbild führt zu typischen „Schnittproblemen“ der analytischen Geometrie und das Spaltenbild zu linearen Strukturen und theoretischen Begriffen wie Basis und Linearkombination. Verbunden sind beide Sichtweisen u.a. durch den theoretischen Begriff der Linearen (Un-)Abhängigkeit.

Fazit

Kognitiv gesprochen bilden Zeilenbild und Spaltenbild Zugänge mit einer dualen Natur. Sie bauen auf vertraute Konzepte auf und sind gleichzeitig Grundlage zur Entwicklung höheren mathematischen Denkens. Im Sinne Talls (1996) stellen sie also *cognitive roots* dar, die sich mittels stoffdidaktischer Methoden beschreiben lassen. Sie beinhalten das Merkmal der Erweiterbarkeit und Weiterentwicklung als Bildungsziel. *Cognitive roots* dienen als *Orientierung zum Unterrichten in Schule und Hochschule* und als *Bindeglied zwischen Schule und Hochschule*. *Lineare (Un-)Abhängigkeit* bildet als theoretischer Begriff eine *Brücke* zwischen Arithmetik, Geometrie und strukturellem Zugang. Diese Erkenntnis ermöglicht einen flexiblen und verstehensorientierten Umgang mit linearen Strukturen. Als übergeordnete Folgerung ergibt sich hieraus, dass stoffdidaktische Methoden in der Lehramtsausbildung explizit an den Hochschulen vermittelt und geübt werden sollten. Auf die Vermittlung in der Schule und die curriculare Ausgestaltung bezogen ergibt sich, dass sich eine Vertiefung zu LGS in der Sek II strukturell an Zeilen- und Spaltenbild und Fragen der Lösbarkeit orientieren sollte, damit LGS mehr als nur den Kalkülanteil darstellt. Insbesondere sollten Simultan- und dynamischer Aspekt hervorgehoben werden, was für die Behandlung des Gauß-Verfahrens und gegen Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren spricht, da bei letzteren Gleichungen quasi „verschwinden“ und der Simultanaspekt nicht sichtbar wird.

Literatur

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *The Teaching of Linear Algebra in Question*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Euler, L. (1750). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Mémoires de L'Académie des Sciences de Berlin, 4*, 219-223.

Frobenius, G.F. (1875). Über das Pfaffsche Problem. *J. Crelle, 82,* 230-315.

Lambert, A. (2014). Teilprozesse der stoffdidaktischen Methode (Poster). *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 96,* 89.

Schwank, I. (1999). On predicative versus functional cognitive structures. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of CERME 1, Vol. II* (pp. 84-86), Osnabrück.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. Bishop et al. (Eds.), *Int. Handbook of Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 289-325.

Katharina HOHN, München, Wolfgang SCHNOTZ, Landau

Die Bedeutung der flexiblen Nutzung verschiedener Repräsentationen für das Lösen problemhaltiger Textaufgaben

Flexible Reaktionen auf Anforderungen des alltäglichen Lebens werden häufig als vorteilhaft und erfolgsversprechend erachtet. Dies trifft auch für den Bereich mathematischer Bildung zu. Betrachtet man bspw. das Lösungsvorgehen von Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung mathematischer (Problem)aufgaben, so wird die flexible Nutzung verschiedener Repräsentationsformen häufig als bedeutsam für den Lösungserfolg diskutiert (z. B. Heinze, Star & Verschaffel, 2009). Nach wie vor gibt es jedoch wenig empirische Befunde zur flexiblen Nutzung von Repräsentationen. Die vorliegende Forschungsarbeit soll diesbezüglich etwas Licht ins Dunkel bringen.

1. Theoretischer Hintergrund

Flexibles Denken und Handeln wird im Rahmen mathematischer Forschung vordergründig anhand von Lösungsstrategien untersucht (z. B. Levine, 1982; Elia, Van den Heuvel-Panhuizen & Kolovou, 2009). Elia und Kollegen (2009) unterscheiden dabei die flexible Nutzung von Strategien zwischen und innerhalb von Aufgaben und konnten in ihrer Forschung zeigen, dass lediglich die flexible Anwendung von verschiedenen Strategien zwischen den Aufgaben bei der Aufgabenbearbeitung förderlich war. Neben der Nutzung verschiedener Strategien wird häufig auch die flexible Verwendung unterschiedlicher Repräsentationen diskutiert (z. B. Kaput, 1987a; Pape & Tchoshanov, 2001).

Repräsentationale Flexibilität kann als Teilkomponente allgemeiner kognitiver Flexibilität aufgefasst werden, welche sich durch „the selection and/or modification of available problem solving techniques, methods, or strategies as a function of changes of the task or situation" auszeichnet (Krems, 1995, S. 202). Repräsentationen stellen in diesem Zusammenhang jene Formate oder Strukturen dar, auf denen u.a. Strategien operieren (vgl. Tabachneck, Koedinger & Nathan, 1994; Lovett & Schunn, 1999).

Folgende Repräsentationsformen werden in der vorliegenden Forschung unterschieden (vgl. Cox, 1999; Schnotz & Bannert, 2003): ikonische (z. B. Skizzen, Diagramme) und symbolische (z. B. Gleichungen, Formeln) Repräsentationen, sowie externe (z. B. aufgeschriebene Rechnungen) und

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 547–550). Münster: WTM-Verlag

interne (z. B. Kopfrechnungen) Repräsentationen. Da mehrschrittige mathematische Textaufgaben eingesetzt wurden, können zwei Formen repräsentationaler Flexibilität unterschieden und näher untersucht werden: die flexible Nutzung von Repräsentationen innerhalb von Aufgaben und die flexible Nutzung von Repräsentationen zwischen Aufgaben.

Zwei Forschungsfragen sollen nachfolgend beantwortet werden: 1) Wie flexibel setzen Schülerinnen und Schüler verschiedener Klassenstufen die Repräsentationsformen ein? und 2) In welchem Zusammenhang steht diese Flexibilität mit dem Lösungserfolg?

2. Methode

Insgesamt 268 Schülerinnen und Schüler aus Grundschulen (3. Klasse: N = 60, 4. Klasse: N = 87) und Gymnasien (6. Klasse: N = 83, 9. Klasse: N = 38) wurden gebeten, vier problemhaltige Textaufgaben (Rasch, 2008) selbstständig zu bearbeiten. Dafür wurde zunächst jeder Schülerin/jedem Schüler die Textaufgabe durch die Versuchsleitung einmal vorgelesen. Im Anschluss daran erhielt die Schülerin/der Schüler das Aufgabenblatt. Dieses konnte verwendet werden, um z. B. Skizzen anzufertigen, Rechnungen oder Gleichungen zu notieren, etc. Des Weiteren konnten die Schülerinnen und Schüler Einerwürfel und Zehnerstangen für die Aufgabenlösung verwenden. Sie konnten frei darüber entscheiden, wie sie die Aufgaben bearbeiten wollten. Durch die Versuchsleitung wurde kein konkretes Vorgehen forciert und es wurden keine Hilfestellungen bei den Aufgabenbearbeitungen gegeben.

Das individuelle Lösungsvorgehen wurde videographiert. Außerdem wurden die Schülerinnen und Schüler nach jeder Aufgabe zu ihrem Lösungsvorgehen mittels retrospektivem, halbstrukturiertem Interview befragt. Dadurch konnten im Besonderen interne Prozesse und Repräsentationen (z. B. Kopfrechnungen) erfasst werden. Die so gewonnenen Daten wurden anhand eines Kodiersystems durch geschulte, unabhängige Beobachter quantifiziert. Als Indikatoren für die Güte der Beobachterübereinstimmungen wurden Intraklassenkorrelationen ermittelt (Wirtz & Caspar, 2002). Diese lagen zwischen .77 und .99, was einer guten bis sehr guten Beobachterübereinstimmung entspricht.

Für die Betrachtung repräsentationaler Flexibilität innerhalb und zwischen den Textaufgaben wurde jeweils ein Kennwert gebildet, welcher zwischen null (gar keine Flexibilität) und eins (maximale Flexibilität) variieren konnten.

3. Ergebnisse

Die mittlere repräsentationale Flexibilität zwischen den Aufgaben war in den betrachteten Klassenstufen wie folgt ausgeprägt: 3. Klasse: $M = 0.16$ ($SD = 0.20$), 4. Klasse: $M = 0.26$ ($SD = 0.18$), 6. Klasse: $M = 0.33$ ($SD = 0.20$) und 9. Klasse: $M = 0.25$ ($SD = 0.16$). Diese Mittelwerte deuten auf ein eher geringes Ausmaß der flexiblen Nutzung von Repräsentationen zwischen verschiedenen Aufgaben hin.

Bei der Betrachtung der mittleren repräsentationalen Flexibilität innerhalb von Aufgaben zeigte sich ein etwas höheres Ausmaß der flexiblen Nutzung von Repräsentationen in den verschiedenen Klassenstufen: 3. Klasse: $M = 0.24$ ($SD = 0.30$), 4. Klasse: $M = 0.33$ ($SD = 0.31$), 6. Klasse: $M = 0.40$ ($SD = 0.26$) und 9. Klasse: $M = 0.48$ ($SD = 0.26$). Innerhalb von Aufgaben nutzten die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Repräsentationen also relativ flexibel.

Da der Lösungserfolg signifikant mit der Klassenstufe zusammenhing ($r = .59$, $p < .01$), Schülerinnen und Schülern mit zunehmender Klassenstufe also immer mehr Aufgaben richtig lösten, wurde die Klassenstufe in den nachfolgenden Analysen als konfundiere Variable berücksichtigt. Hinsichtlich der repräsentationalen Flexibilität zwischen den Aufgaben ergab die Datenanalyse eine signifikante Partialkorrelation zwischen der Flexibilität und dem Lösungserfolg ($pr = .17$, $p = .02$). Die flexible Nutzung unterschiedlicher Repräsentationen je nach Aufgabe ging also mit einem höheren Lösungserfolg einher. Ein solcher Zusammenhang konnte für die repräsentationale Flexibilität innerhalb der Aufgaben nicht nachgewiesen werden ($pr = .01$, $p = .90$). Die flexible Nutzung unterschiedlicher Repräsentationen innerhalb derselben Aufgabe scheint also nicht mit einem höheren Lösungserfolg einherzugehen.

4. Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend konnte gezeigt werden, dass repräsentationale Flexibilität bei der Bearbeitung von problemhaltigen Textaufgaben hinsichtlich des Lösungserfolges bedeutsam ist. Repräsentationale Flexibilität scheint jedoch nicht per se erfolgsversprechend zu sein. Die flexible Nutzung von Repräsentationen innerhalb einer Aufgabe war nicht mit einem besseren Abschneiden der Schülerinnen und Schüler bei der Lösung problemhaltiger Textaufgaben verbunden, die flexible Nutzung von Repräsentationen zwischen den Aufgaben hingegen schon. Dieser Befund stimmt mit Ergebnissen zur flexiblen Nutzung mathematischer Strategien überein (Elia et al., 2009).

Bisher lassen sich wenig empirische Forschungsarbeiten ausfindig machen, welche sich dem Thema repräsentationaler Flexibilität widmen. So bedarf es zukünftig weiterer Forschung, um die Bedeutung der flexiblen Nutzung unterschiedlicher Repräsentationen bei der Bearbeitung mathematischer Probleme oder (Text)Aufgaben differenzierter beschreiben zu können. Dies impliziert auch die Validierung der hier berichteten Ergebnisse. Darüber hinaus sollte sich zukünftige Forschung u.a. mit der differenzierten Untersuchung von unterschiedlichen Aufgaben- und Personenmerkmalen befassen und deren Bedeutung für den Einfluss repräsentationaler Flexibilität auf den Lösungserfolg untersuchen.

Literatur

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, *9*, 343-363.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *41*, 605-618.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *41*, 535-540.

Kaput, J. J. (1987a). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Hrg.), *Problems of representation in teaching and learning of mathematic*s (S. 19-26). London: Lawrence erlbaum associates.

Krems, J. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. In P. Frensch & J. Funke (Hrsg.), *Complex Problem Solving: The European Perspective* (S. 201-218). Hillsdale: Erlbaum.

Levine, D. R. (1982). Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(5), 350-359.

Lovett, M. C. & Schunn, C. D. (1999). Task representations, strategy variability and base-rate neglect. *Journal of Experimental Psychology: General*, *128*(2), 107-130.

Pape, S. & Wang, C. (2003). Middle school children's strategic behavior: Classification and relation to academic achievement and mathematical problem-solving, *Instructional Science*, *31*, 419-449.

Rasch, R. (2008). *42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren*. Seelze: Kallmeyer.

Schnotz, W. & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, *13*, 141-156.

Tabachneck, H. J. M., Koedinger, K. R. & Nathan, M. J. (1994). Towards a theoretical account of strategy use and sense making in mathematical problem solving. In A. Ram, & K. Eiselt, *Proceedings of the 16th annual conference of the cognitive science society* (S. 836-841). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Wirtz, M. & Caspar, F. (2002). *Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität*. Göttingen: Hogrefe.

Axel HOPPENBROCK, Paderborn

Was sind lehrreiche Votingfragen für Mathematikstudenten in Erstsemestervorlesungen? – eine Studentenbewertung

Einleitung

Hat sich ein Dozent dazu entschieden, zum ersten Mal Votingfragen in die Veranstaltung zu integrieren, so fragt er sich sicherlich, welche Arten von Fragen geeignet sind, wie gute Fragen entwickelt bzw. formuliert und auf welche Art und Weise sie in die Veranstaltung integriert werden können. Die Literatur liefert hier allgemeine Hinweise so z. B., dass sie leicht und schnell verständlich (Uhari, Renko, & Soini, 2003) sein und einen mittleren Schwierigkeitsgrad (Duncan, 2008) aufweisen sollen. Es gibt aber kaum mathematikspezifische Hinweise, insbesondere für Veranstaltungen auf dem Niveau einer Analysis I Vorlesung. Diese Studie versucht daher hier einen ersten Schritt zu machen.

Theoretischer Hintergrund

Collins (2007) teilt Votingfragen in drei Kategorien ein: Zum Abfragen von Faktenwissen, zur Förderung des Begriffsverständnisses und zum Anwenden des Wissens. Votingfragen zum Abfragen von Faktenwissen wurden im Rahmen der Studie nicht eingesetzt. Unter Fragen zum Anwendungswissen können solche gefasst werden, die die Anwendung mathematischer Begriffe z. B. in einem physikalischen Kontext zeigen. Abbildung 1 zeigt solch eine Votingfrage.

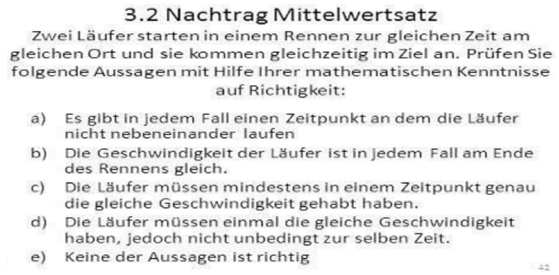


Abb. 1: Beispiel für eine Frage aus der Kategorie Nachbereitung/Anwendung

Die Kategorie von Fragen zum Begriffsverständnis sollte für eine Mathematikveranstaltung weiter ausdifferenziert werden, denn das zentrale Ziel der gesamten Veranstaltung ist die Vermittlung von Begriffen.

Abb. 2: Beispiel für eine Frage aus der Kategorie Vorbereitung/Begriff Def

Zu einem Begriff gehören der Begriffsinhalt sowie der Begriffsumfang. Der Begriffsinhalt umfasst dabei alle Merkmale im Sinne von Eigenschaften und Relationen zu anderen Begriffen. Somit gehören alle Sätze und

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 551–554). Münster: WTM-Verlag

Lemmata zum Begriffsinhalt. Der Begriffsumfang umfasst alle Objekte, die unter dem Begriff fallen (Moormann, 2009). Dementsprechend unterteile ich die Kategorie „Fragen zum Begriffsverständnis“ weiter in Fragen zum Begriffsumfang (Begriff BSP), zum Begriffsinhalt bezogen auf Sätze, Lemmata und Korollar (Begriff Satz) und solche, die sich mit alternativen Definitionen beschäftigen (Begriff Def.).

Auf einer anderen Ebene können Fragen zeitlich unterschiedlich in die Vorlesung eingeordnet werden: Zur Vorbereitung des jeweiligen Satzes/Definition oder nachdem der jeweilige Satz/Definition behandelt wurde. Beispielfragen zu diesen beiden Kategorien sind in den Abbildungen 1 und 2 zu sehen.

Methodik

Im Rahmen der Studie wurden für einen Zeitraum von 4 Vorlesungen à 90 Minuten 18 Votingfragen, davon 16 mit Peer Instruction, in etwa gleichverteilt in die Vorlesung integriert. Diese Votingfragen hatten das Ziel, den Lernprozess zu unterstützen. Dazu hatte jede Frage eine konkrete didaktische Zielsetzung, die hier jedoch nicht dargelegt werden kann. Der übrige Teil der Vorlesung wurde wie folgt abgehalten: Ein Teil der Vorlesung wurde auf das Selbststudium verlegt. Dazu wurde den Studenten ein Skript zur Verfügung gestellt, das dann Lücken enthielt, wenn es für vorbereitende Fragen (vgl. Abb.2) notwendig war. Ansonsten präsentierte der Dozent die Inhalte über Folie oder Tafel.

Zu jeder Frage stimmten die Studenten zweimal ab. Zwischen den beiden Abstimmungen diskutierten sie über die Frage. Im Anschluss daran wurde die richtige Lösung im Plenum besprochen (ausführlicher beschrieben in Hoppenbrock & Biehler, 2012). Im Anschluss daran bewerteten die Studenten die Fragen mit folgenden Items:

- Den Schwierigkeitsgrad der Frage bewerte ich mit
- Die Frage regte mich zum Nachdenken an.
- Die Frage einschließlich der Diskussion hat mein Verständnis gefördert

Bewertet wurden die Fragen auf einer Likertskala 1-6 (1 für Stimmt genau/ bzw. sehr schwierig und 6 für stimmt gar nicht bzw. sehr schwierig).

Forschungsergebnisse

Die Bewertung aller Fragen hinsichtlich der beiden Items zum Nachdenken und zur Verständnisförderung zeigt die Abbildung 3. Eine Tendenz der Form „je mehr die Frage zum Nachdenken anregt, desto verständnisfördernder ist sie“ ist zu erkennen, die aber noch genauer zu erforschen ist. Des Weiteren fällt der Ausreißer auf. Beide Bewertungen sind mit 4 und 4,6 sehr schlecht. Abbildung 3 zeigt diese Frage. Inhaltlich weicht sie stark von den übrigen Fragen ab. Hier wurde versucht, mit dem Begriff „notwendigen Bedingung“ ein wenig spielerisch umzugehen. Einen direkten Zusammenhang zwischen den Antwortmöglichkeiten und dem Vorlesungsinhalten gab es nicht.

Abb. 3: Sehr schlecht bewertete Votingfrage

Daraus leite ich die erste These ab: Votingfragen sollten sich möglichst nah an den Vorlesungsinhalten halten. Insbesondere ein spielerischer Umgang mit Begriffen ist zu vermeiden.

Um die Ergebnisse nicht zu verfälschen, wurde in der weiteren Auswertung diese Frage nicht mehr berücksichtigt.

Die Bewertung hinsichtlich der zeitlichen Einteilung in Vorbereitung und Nachbereitung zeigt folgendes (Abbildung 4): Der Mittelwert in der Bewertungskategorie Verständnisförderung ist fast gleich, der Median jedoch bei nachbereitenden Fragen um 0,2 Bewertungspunkte besser. Auch in Bezug auf die Bewertungskategorie Nachdenken liegen nachbereitenden Frage tendenziell leicht von den vorbereitenden. Besonders fällt indes in beiden Bewertungskategorien die große Streuung auf. Die didaktische Ausrichtung der Frage scheint demnach weitaus bedeutender zu sein als der Zeitpunkt des Einsatzes (zweite These). Das jeweilige didaktische Ziel kann demnach in Form einer vorbereitenden als auch einer nachbereitenden Frage erreicht werden.

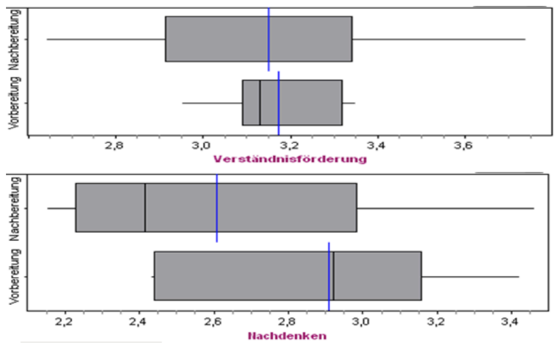


Abb. 4: Bewertung der Kategorien Vorbereitung (n=7) und Nachbereitung (n=8). Die blaue Linie zeigt den Mittelwert an.

Die Abbildung 5 zeigt die Bewertung hinsichtlich der drei Begriffskategorien und der Anwendung. Hier stechen sehr positiv die Fragen zum Begriffsumfang (Begriff BSP) heraus. Diese Fragen wurden insbesondere bzgl. der Verständnisförderung weitaus besser bewertet als die Fragen der anderen Kategorien.

Auch wenn die Ergebnisse aufgrund der kleinen Stichproben weit von einem Beweis entfernt sind, so würde ich doch die dritte Hypothese aufstellen, dass Fragen zum Begriffsumfang den Studenten am stärksten bei der Begriffsbildung hilft bzw. ihnen das subjektive Gefühl der Hilfe gibt.

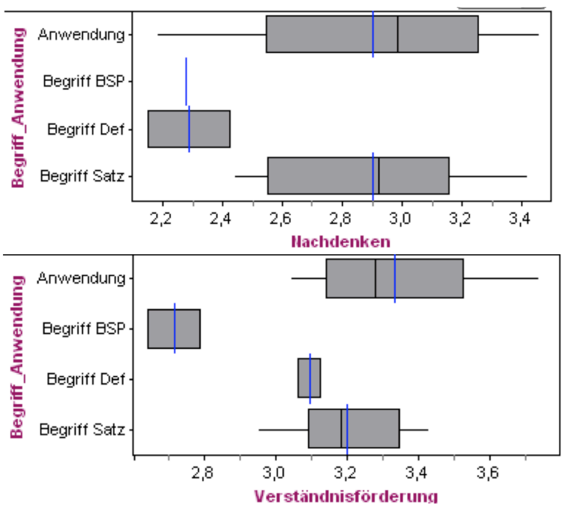


Abb.5: Begriff BSP (N=2), Begriff Def. (N=2), Begriff Satz (N=6) und Anwendung (N=4)

Diskussion

Insgesamt ist festzuhalten, dass es sich bei den aufgestellten Thesen um Anregungen zur weiteren Forschung handelt. So ist zum Beispiele auch fraglich, in wie weit die Studenten objektiv beurteilen können, wie sehr Fragen ihr Verständnis wirklich fördern. Diese konnte im Rahmen dieser Studie nicht beantwortet werden. Trotzdem hat die subjektive Bewertung eine Bedeutung. Nur wenn die Studenten auch das Gefühl haben, die Fragen helfen ihnen beim Lernen, werden sie motiviert sein, sich mit Ihnen intensiv auseinanderzusetzen und nur dann können die Fragen auch ihr Potential voll ausschöpfen.

Literatur

Collins, L. J. (2007). Livening up the classroom: Using audience response systems to promote active learning. *Medical reference services quarterly, 26*(1), 81-88.

Duncan, D. (2008). Tips for Successful "Clicker" Use.

Hoppenbrock, A., & Biehler, R. (2012). Fachdidaktischer Einsatz eines elektronischen Votingsystems zur Aktivierung von Mathematikstudierenden in Erstsemestervorlesungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 389-392.

Moormann, M. (2009). *Begriffliches Wissen als Grundlage mathematischer Kompetenzentwicklung. Eine empirische Studie zu konzeptuellen und prozeduralen Aspekten des Wissens von Schülerinnen und Schülern zum Ableitungsbegriff.* Ludwig-Maximilians-Universität München, München.

Uhari, M., Renko, M., & Soini, H., 12. (2003). Experiences of using an interactive audience response system in lectures. *BMC Medical Education, 3*(1), 12.

Axel HOPPENBROCK, Paderborn

Geht ein anderer Mathematikunterricht wirklich? - Ein Langzeitvergleichsexperiment

In der Didaktik werden viele Ideen zur Unterrichtsgestaltung entwickelt und erforscht, finden jedoch nur bedingt Einsatz im Schulalltag. Der Einwand vieler Lehrer gegen eine Übernahme der Ergebnisse ist häufig, dass die Ideen im normalen Schulalltag nicht umsetzbar sind, da dann z.B. Zeit zum Üben fehle. Im Rahmen diese Aufsatzes wird diese Behauptung widerlegt und aufgezeigt, wie die Konzepte der Didaktik in den normalen Schulalltag integriert werden können und dass sich solch eine Änderung des Unterrichts auf den Leistung der Schüler positiv auswirkt.

Vergleich der beiden Unterrichtskonzepte

Zur Beschreibung und zum Vergleich der hier skizzierten Unterrichtskonzepte möchte ich auf das dreiteiligen Strukturmodell des KOSIMA-Projektes (Prediger, Hußmann, Leuders, & Barzel, 2014) zurückgreifen, dieses jedoch zum besseren Vergleich ein wenig abwandeln. Dort wird der Lernprozess im Unterricht in drei Phasen[1] eingeteilt. Der Phase des Erkundens, der des Ordnens und der des Vertiefens. Die zentrale Funktion des Erkundens ist die Erarbeitung neuen Wissens z.B. in Form des Begriffsaufbau, der Erarbeitung mathematischer Zusammenhänge oder neuer Verfahren (Prediger, et al., 2014, p. 84). Das Ordnen hat die Funktion des konsolidierten Wissensaufbaus und beinhaltet z.B. das Notieren von Merksätzen. Im Gegensatz zur dem KOSIMA Strukturmodell möchte ich als dritte Phase von einer Phase des Übens anstatt des Vertiefens sprechen. Unter Üben wird hier das Abarbeiten von Routineaufgaben verstanden, häufig mit dem Ziel des Automatisierens oder des Verfestigen der Verfahren. Diese Form des Übens spielt im Unterricht der Kontrollgruppe in wichtige Rolle.

Beschreibung des Unterrichtkonzepts der-Kontrollgruppe

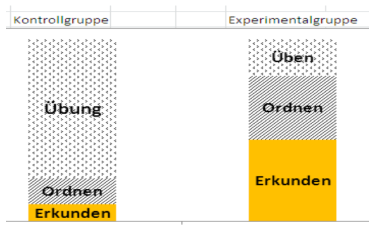


Abb. 1: Zeitliche Verteilung der drei Phasen

Der Unterricht folgt der in Winter (1984) beschriebenen Idee des Lernens durch Belehren. Der Lehrer versteht sich im Wesentlichen als Instruktor und beschränkt sich auf das Lehren fachsystematischer Inhalte (vgl. Winter,

[1] Prediger et al sprechen zwar von Kernprozessen anstatt Phasen, um u.a. den Eindruck des chronologischen Abarbeitens von Phasen zu vermeiden. Auf diese Differenzierung möchte ich hier jedoch nicht genauer eingehen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 555–558). Münster: WTM-Verlag

1984). Der Unterricht ist gekennzeichnet durch zwei zeitlich kurze Phasen des Erkundens und Ordnens und einer langen Phase des Übens (siehe Abb. 1). Insbesondere die beiden Phasen des Erkundens und Ordnens sind stark lehrerzentriert und häufig von fragendentwickelten Methodik geprägt. Begründungen für Verfahren werden nur selten erarbeitet.

Beschreibung des Unterrichtskonzepts der Experimentalgruppe

Die zeitliche Aufteilung der drei Phasen des Experimentalunterrichts ist in Abb.1 dargestellt. Im Vergleich zum klassischen Unterricht wird die Phase des Übens stark zugunsten der Phasen des Ordnens und Erkundens gekürzt.

Der Leitgedanke des Unterrichts ist das Lehren durch gelenkte Entdeckung, welches ausführlich in Winter (1984) beschrieben wird. Der Lehrer bietet insbesondere in der Phase des Erkundens Situationen an, die sinnstiftend und alltagsnah sind sowie zum Nachdenken/Erkunden anregen. Der Schüler soll dabei möglichst selbstständig das Verfahren oder den Begriff erarbeiten. Methodisch werden diese Leitgedanken u.a. durch problemorientierten Unterricht umgesetzt, der vom bereitstellen klassischer Problemaufgaben, über Forschungsaufgaben bis hin zum Forschenden Lernen reicht. Konkrete Unterrichtsbeispiele sind ausführlicher in Hoppenbrock (2007, 2011) beschrieben.

Diese Ausrichtung des Unterrichts spiegelt sich auch in der Befragung der Schüler wieder (Abb.2). Neben der Ausrichtung auf Selbstständigkeit, Problemorientierung und langfristiges Lernen wird auch die Schulung der Argumentationsfähigkeit mit einem hohen Wert von 2,7 bewertet. Das Begründen von Verfahren und diskursive Erarbeiten von Lösungen spielte eine wichtige Rolle im Unterricht. Die theoretische Grundlage hierfür bildeten u.a. die Erkenntnisse zum Lernen durch Diskussionen (Fischer, 2002) und dem Konzept des cognitive accelerations (Adey, 1988).

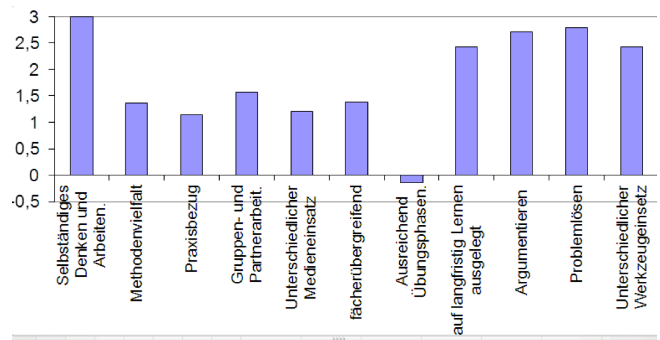


Abb. 2: Ergebnis einer Schülerbefragung (n=18) zum Unterricht (Bewertung auf einer Likertskala -3 stimme ganz und gar nicht zu bis +3 stimme voll und ganz zu)

Im Bereich der Begriffsbildung wurde insbesondere Wert darauf gelegt, dass bei der Einführung von Begriffen, wie von Vollrath und anderen gefordert (Götz & Ramharter, 2010; Vollrath, 1984), die Definition eines Begriffs erst am Ende eines längeren, motivierenden und sinnstiftenden Erkundungsprozesses gemeinsam mit den Schülern erarbeitet wurde.

Methode der Vergleichsstudie

Der oben beschriebene experimentelle Unterricht wurde in zwei Klassen durchgeführt. In einer Klasse A in den Stufen 6,7,8 und 10 und in einer weiteren Klasse B in den Jahrgangsstufen 9 und 10. Die Klasse A bewertete den Unterricht zudem im Rahmen eines Fragebogens.

Zum Leistungsvergleich der Schüler des Experimentalunterrichts mit der Kontrollgruppe wurden die Mathematiknoten der Schüler am Ende der 11. Klasse herangezogen. Dabei wurden die Noten der Schüler, die vormals in der Klasse A bzw. B waren, mit denen des restlichen Jahrgangs verglichen.

Die 11. Klasse bietet sich für solch einen Vergleich an. Denn die Schüler wurden zu Beginn der 11. Jahrgangsstufe auf verschiedene Klassen zufällig verteilt und somit dann von unterschiedlichen Lehrern unterrichtet.

Forschungsergebnisse

Die Ergebnisse des Fragenbogens in Klasse A sind in Abb. 3 zu sehen. Insgesamt bewertete die Klasse den Unterricht sehr positiv. Insbesondere die Items zur Förderung der Selbstständigkeit und den hohen Anforderungen an die Schüler mit fast 3 stechen heraus.

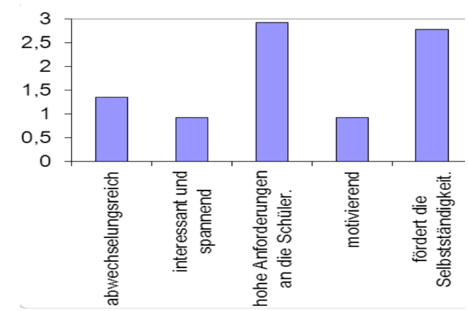


Abb. 3: Bewertung des Unterrichts durch Schüler der Klasse A (n=18) (Bewertung auf einer Likertskala -3 stimme ganz und gar nicht zu bis +3 stimme voll und ganz zu)

Der Notenvergleich beider Klassen mit dem Rest des Jahrgangs ist in Abb.4 dargestellt. Es ist eine deutliche Verschiebung der Noten in Richtung gute Noten zu sehen. Der Mittelwert der Klasse A liegt bei 2,33 (SD 0,9). Dieser Mittelwert fast eine Note über dem Mittelwert des restlichen Jahrgangs (MW: 3,18; SD:1,15). Die Abweichung ist hochsignifikant (P<0,01)

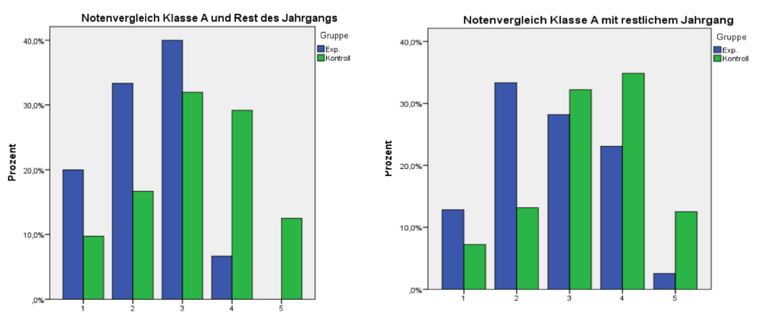


Abb. 4: Zeugnisnoten der beiden Klassen A (n=15) und B (n=24) (jeweils blau) im Vergleich zu den Noten der übrigen Schüler des Jahrgangs (grün)

Auch die Mittelwertabweichung der Klasse B gegenüber dem restlichen Jahrgang ist signifikant (P<0,05), jedoch ein wenig schwächer. Der Mittelwert liegt etwa eine halbe Note über den des restlichen Jahrgangs (2,92 zu 3,45 mit Standardabweichung von 1,1 und 1,0).

Die Noten legen die Vermutung nahe, dass eine längere Durchführung des oben skizzierten experimentellen Unterrichts zu einer besseren Vorbereitung der Schüler auf die Anforderungen der Oberstufe führt. Ein Leistungsvergleich vor dem Beginn des Experimentalunterrichts liegt nur von Klasse B vor. In dem Jahrgang dieser Klasse wurde zu Beginn der 9. Klasse eine Lernstandserhebung durchgeführt. Die Leistung dieser Klasse war dort auf dem gleichen Niveau der übrigen Klassen des Jahrgangs.

Diskussion

Der oben beschriebene Mathematikunterricht der Kontrollgruppe ist im Schulalltag noch immer die vorherrschende Form, obwohl viele didaktische Forschungsergebnisse einen anderen Unterricht empfehlen. Die Einwände vieler Lehrer gegen eine Änderung ihres Unterrichtsstils ist nicht zu halten. Dieses Langzeitexperiment zeigt, wie man durch ein Kürzen von klassischen Übungsphasen zugunsten der Phasen der Erkundens und Ordnens zu besseren Leistungen der Schüler gelangen kann. Wenn das aber der Fall ist, so sollte es nach Meinung des Autors, stärkere Bestrebungen von Seiten der Didaktiker und der Politik geben, die didaktischen Forschungsergebnisse in den normalen Unterricht zu transportieren.

Literatur

Adey, P. (1988). Cognitive acceleration: Review and prospects. *International journal of science education, 10*(2), 121-134.

Fischer, F. (2002). Gemeinsame Wissenskonstruktion – Theoretische und methodologische Aspekte. *Psychologische Rundschau, 53* (3), 119-134.

Götz, S., & Ramharter, E. (2010). Begriffsbildung in der Mathematik. Amphibium zwischen Zwang und Freiheit. *Didaktikreihe der ÖMG, 41*, 50-74.

Hoppenbrock, A. (2007). Schüler modellieren verschiedene Wachstumsprozesse. In G. Greefrath & J. Maaß (Eds.), *Materialien für einen realtitäsbezogenen Mathematikunterricht. Band 11* (pp. 29-38).

Hoppenbrock, A. (2011). Warum machen wir das? In G. Greefrath & J. Maaß (Eds.), *Materialien für einen realtitäsbezogenen Mathematikunterricht. Band 16* (pp. 63-70).

Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T., & Barzel, B. (2014). Kernprozesse – Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln. In I. P. Bausch, Guido; Schmitt, Oliver (Ed.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (pp. 81-92.). Münster: WTM Verlag.

Vollrath, H. J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett Verlag.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren, 2*, 4-16.

Martin Erik HORN, Berlin

Ein physikalisch motivierter Weg zur Konformen Geometrie

Mit Hilfe der Mathematik können wir physikalische Beziehungen sachangemessen abstrakt beschreiben. Spätestens seit Galilei bestimmt diese Setzung das Verhältnis zwischen Physik und Mathematik: Vor einem Erlernen und Fassen der Physik auf einem über die Phänomene hinausgehenden Niveau steht ein Erlernen und Fassen der Mathematik durch die Lernenden.

In diesem Beitrag soll diese Reihung umgedreht werden. Bei manchen mathematisch abstrakten Konzeptbildungen – wie hier der Konformen Geometrie – kann eine vorherige Beschäftigung mit physikalischen Erscheinungen – wie hier der Speziellen Relativität – einen Lernerfolg fördern.

1. Geometrie des Lichts

Betrachten wir die Punkte P_1 und P_2 aus der Perspektive eines ruhenden Beobachters, dessen Weltlinie mit der Zeit-Achse des abgebildeten Minkowski-Diagramms überein stimmt (Abb. 1a). Obwohl das Raumzeit-Inter-

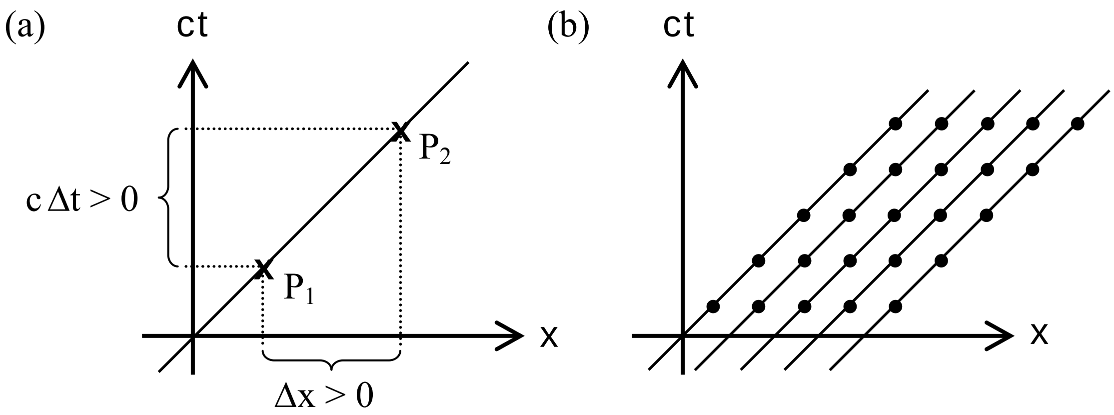


Abb. 1: Minkowski-Diagramme von Raumzeit-Punkten mit verschwindenden raumzeitlichen Abständen

vall und damit der raumzeitliche Abstand

$$(c\,\gamma_t\,(t_2 - t_1) + \gamma_x\,(x_2 - x_1))^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad c\,\Delta t = \pm\,\Delta x$$

zu Null verschwindet, existieren für einen ruhenden Beobachter ein räumlicher Abstand $\Delta x > 0$ und ein zeitlicher Abstand $\Delta t > 0$, die beide größer als Null sind. Mit Hilfe eines Maßbandes und einer Uhr kann ein solcher Beobachter mithin diese räumlichen und zeitlichen Abstände messen. Für ihn sind P_1 und P_2 zwei verschiedene, eindeutig unterscheidbare Punkte.

Dies gilt jedoch nicht für das Licht. Je schneller ein Beobachter sich bewegt, desto geringer wird aufgrund der relativistischen Zeitdilatation und

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 559–562). Münster: WTM-Verlag

Längenkontraktion der von ihm gemessene räumliche und zeitliche Abstand. Im Grenzfall einer Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit, wie sie Lichtteilchen (Photonen) ausführen, schrumpft der räumliche und zeitliche Abstand auf Null. Photonen können mit einer hypothetisch mitgeführten Messapparatur keinen räumlichen oder zeitlichen Abstand zwischen den Raumzeit-Punkten P_1 und P_2 messen. Für Licht sind P_1 und P_2 identisch.

Wir müssen deshalb schlussfolgern: Wir als ruhende Beobachter sehen in Abbildung 1b genau 25 unterschiedliche Raumzeit-Punkte, während aus der Perspektive des Lichts hier nur fünf räumliche Punkte zu erkennen sind, die von uns als lichtartige Geraden wahrgenommen werden.

2. In zwei Schritten zur Konformen Geometrie

Genau diese seltsame Identifikation von räumlichen Punkten mit räumlichen Geraden und lichtartigen Geraden beschreibt den Wesenskern homogener und konformer Geometrien (siehe Abb. 2).

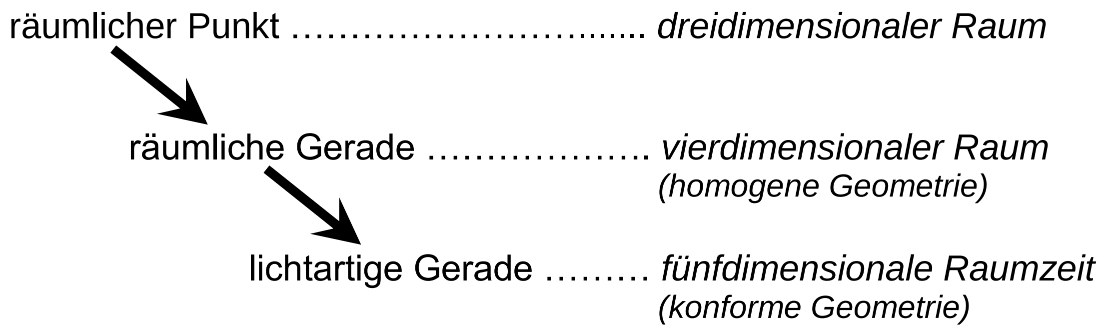


Abb. 2: Strategieschritte zur Konstruktion der Konformen Geometrischen Algebra

Folgen wir diesen die Dimension jeweils erhöhenden Schritten von Abb. 2, so können wir aus unserer dreidimensionalen, Euklidischen Welt eine zu ihr mathematisch äquivalente fünfdimensionale Licht-Welt konstruieren. In dieser lassen sich alle Punkte des dreidimensionalen Raums eineindeutig mit lichtartigen Geraden einer fünfdimensionalen Raumzeit identifizieren.

3. Physikalische Fundierung mathematischer Grundlagen

In der Geometrischen Algebra rechnen wir direkt mit physikalisch zugänglichen Grundgrößen: Vektoren als orientierte Strecken, Bivektoren als orientierte Flächenstücke, Trivektoren als orientierte Volumina. Es handelt sich dabei um eine *physikalische Geometrie* oder mehr noch um eine „physikalische Mathematik“ (Parra Serra 2009, Kap. 2), da auch eine *physikalische Algebra* sachlogisch in ihr enthalten ist. Dabei werden Pauli-Matrizen als Basisvektoren des dreidimensionalen Raumes und Dirac-Matrizen als Basisvektoren einer vierdimensionalen (Hestenes 2002 & 2003), (Doran & Lasenby 2003), (Horn 2010) oder fünfdimensionalen Raumzeit (Horn

2011) interpretiert. Die wesentlichen Grundlagen dieser physikbasierten Konzeptbildungen lauten nach (Parra Serra 2009, Absch. 2.2.1, S. 823):

- ***Physikalische Geometrie:*** Geometrische Objekte werden als reale Linearkombinationen der Basisvektoren und ihrer Produkte ausgedrückt.
- ***Physikalische Algebra:*** Basisvektoren antikommutieren $e_i e_j = -e_j e_i$ und quadrieren zu +1, –1 oder 0.

Werden räumlichen Basisvektoren positive Quadrate $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$ zugeordnet, liefert die physikalisch motivierte Einführung einer zusätzlichen zeitlichen Dimension einen zeitartigen Basisvektor mit $e_-^2 = -1$. Diese Konzeptbildungen können konkret im Kontext der Speziellen Relativität diskutiert werden. Auch eine zusätzliche räumliche Dimension mit einem weiteren raumartigen Basisvektor $e_+^2 = 1$ kann im Sinne einer fünfdimensionalen Speziellen Relativität beschrieben wird.

4. Alles wird Eins: Kugelprojektion

Der Übergang von der Physik, in der zusätzliche Dimensionen (wie z.B. die Zeit) als real existierend gedacht werden, zur konformen Mathematik, findet nun nicht in einer Neufassung, sondern in einer Neuinterpretation dieser Konzepte ihren Ausdruck: Zusätzliche Dimensionen werden nun nicht als real existierend, sondern als lediglich dazuerfundene Hilfsmittel zur Beschreibung dreidimensionaler Räume genutzt.

Dies geschieht in einem ersten Schritt durch eine Kugelprojektion. Jeder Punkt x des dreidimensionalen Raums kann mit einem Punkt p' (Abb. 3) auf der dreidimensionalen Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel identifiziert werden (Vince 2008, Kap.11), (Doran & Lasenby 2003, Kap. 10):

$$p' = \frac{x^2 e_+ + 2x - e_+}{1 + x^2}$$

Die homogene Gerade verläuft dann durch diesen Punkt: Jeder Punkt des Dreidimensionalen wird somit mit einer räumlichen Gerade identifiziert.

5. Alles wird Null – Alles wird Licht

Die konforme Gerade wird nun gebildet, indem zu p‘ der zu p‘ orthogonale Basisvektor e_- einer zusätzlichen zeitlichen Richtung addiert wird:

$$p'' = \frac{x^2 e_+ + 2x - e_+}{1 + x^2} + e_- \qquad \frac{1 + x^2}{2} p'' = p = x + \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 e_\infty + \frac{1}{\sqrt{2}} e_0$$

Jeder Punkt des Dreidimensionalen wird somit mit einer lichtartigen Geraden identifiziert, da der Vektor p, der aus Darstellungsgründen skaliert

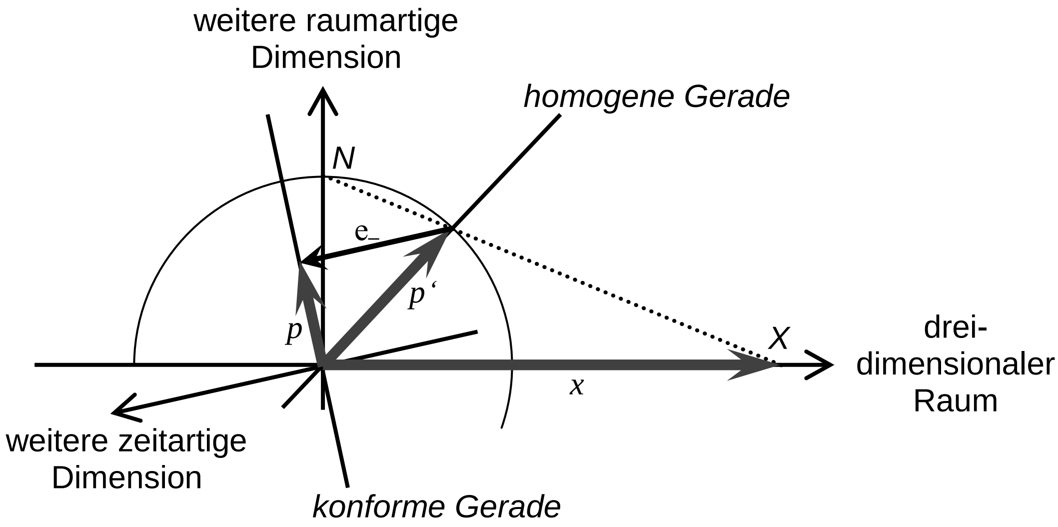


Abb. 3: Konstruktion der homogenen und konformen Geraden

wurde (rechte Gleichung), die raumzeitliche Länge Null aufweist: $p^2 = 0$. Ebenfalls aus Darstellungsgründen werden die Linearkombinationen

$$\mathrm{e}_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}_- + \mathrm{e}_+) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}_- - \mathrm{e}_+)$$

eingeführt, die in dieser konformen Geometrie den ins Unendliche weisenden Vektor und den Ursprung des Dreidimensionalen repräsentieren.

6. Ein mathematisch-physikalischer Goldschatz

Mit der Konformen Geometrischen Algebra haben wir einen Goldschatz gefunden, der Kugeln und Kreise erstaunlich einfach beschreibt, und der physikalische mit mathematischen Konzepten eng verknüpft. Denn die Geometrie von Nullvektoren spiegelt sich in der Geometrie von Licht.

Literatur

Doran, Ch. & Lasenby, A. (2003). Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: CUP.

Hestenes, D. (2002). New Foundations for Classical Mechanics. New York: Kluwer.

Hestenes, D. (2003). Spacetime Physics with Geometric Algebra. American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, S. 691-714.

Horn, M. E. (2010). Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematikerausbildung. PhyDid B – Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover, Beitrag 19.35.

Horn, M. E. (2011). Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: D. Höttecke (Hrsg.). GDCP-Tagungsband 31. Berlin: LIT-Verlag, S. 158-160.

Parra Serra, J. M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, S. 819-834.

Vince, J. (2008): Geometric Algebra for Computer Graphics. London, Berlin: Springer.

Martin Erik HORN, Berlin

Plädoyer für eine Kopernikanische Wende in der Mathematikdidaktik

Die Kopernikanische Wende stellt einen radialen Bruch in der Art und Weise naturwissenschaftlicher Weltbetrachtung dar. Dabei umfasst diese Wende nicht nur naturwissenschaftliche Inhalte wie die Verschiebung des geozentrischen Weltbildes hin zu einem heliozentrischen, sondern in einem mindestens ebenso dramatischen Umbruch die Verschiebung wissenschaftlicher Arbeitsweisen und Methoden. Kopernikus, Kepler, Galilei und andere eröffneten nicht nur eine neue Sicht auf die Welt, sondern parallel dazu eine neue Sicht auf wissenschaftliches Handeln.

Ursprünglich aus der Physik kommend prägt mich die Kopernikanische Wende als Wissenschaftler enorm. Wissen in Physik und Astronomie, das vor Jahrtausenden durch Chinesen, Inder, Babylonier und Griechen fundiert wurde und Jahrtausende gültig war, zerbrach in einem revolutionären Umbruch und wurde unter gewandelten Prämissen vollständig neu organisiert.

Diese Grunderfahrung weisen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, die ihre Wurzeln in der Mathematik sehen (wohl also die Mehrheit des Publikums der GDM-Tagungen), so nicht auf. Mathematische Erkenntnisse sind als geisteswissenschaftliche Konstrukte weitaus beständiger und festgefügter als naturwissenschaftliche Erkenntnisse, die nie bewiesen, im Experiment aber immer wiederlegt werden können. Oder, wie schon Hardy anmerkte: Mathematische Ideen sterben nie (Hardy 1992, S. 81).

1. Die Kopernikanische Wende als neuzeitlicher Mythos

Wesentlicher konzeptueller Bestandteil der Kopernikanischen Wende war die Erkenntnis Galileis, dass naturwissenschaftliche Sachverhalte in der Sprache der Mathematik zu verfassen sind. Das führt zu einem paradoxen Zweiklang: Zum einen führt der Rückgriff auf mathematische Strukturen und Erkenntnisse, die, falls einmal bewiesen, immer gültig sind, zu einer extrem soliden Fundierung, wie sie nur eine logisch-axiomatisch strukturierte Wissenschaft zu leisten vermag.

Das paradoxe Gegenstück, gewissermaßen die andere Seite der gleichen Medaille, führt jedoch zu einem Dahinschmelzen der als solide geglaubten empirischen Fundierung. Carl Friedrich von Weizsäcker analysiert dies mit deutlicher Klarheit: „Die neuzeitliche Naturwissenschaft hat ihren eigenen historischen Mythos. Es ist der Mythos von Galilei, (denn …) die Haupt-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 563–566). Münster: WTM-Verlag

schwäche des Aristoteles war, dass er zu empirisch war. Deshalb brachte er es nicht zu einer mathematischen Theorie der Natur. Galilei tat seinen großen Schritt, indem er wagte, die Welt zu beschreiben, wie wir sie nicht erfahren. Er stellte Gesetze auf, die in der Form, in der er sie aussprach, niemals in der wirklichen Erfahrung gelten und die darum niemals durch irgendeine einzelne Beobachtung bestätigt werden können, …" (v. Weizsäcker 1962/2002, S. 95/96).

Das Scheitern der vor-kopernikanischen Naturwissenschaft liegt nach dieser Analyse darin begründet, dass sie zu starr an sichtbaren Oberflächen-Strukturen verhaftet war, aber konzeptuell nicht tiefer gehen konnte und wollte: Die vor-kopernikanische Physik war zu empirisch.

Weizsäckers Analyse lässt sich auf die historisch betrachtet noch junge Disziplin der Mathematikdidaktik übertragen. Sie steht hier der Naturwissenschaft näher als der Fachmathematik, denn die Mathematikdidaktik hat, wie andere Didaktiken auch, einen deutlichen empirischen Anteil. Und so lautet die Kernthese dieses Beitrags: **In der Mathematikdidaktik besteht unsere heutige Hauptschwäche darin, zu empirisch zu sein** oder zumindest der Empirie gegenüber zu unkritisch zu sein. Die Mathematikdidaktik hat ihre Kopernikanische Wende mithin noch vor sich.

2. Erste Konsequenzen: Weniger Empirie

Aus der vorangegangenen Analyse lässt sich eine erste, sehr direkte Konsequenz für die Mathematikdidaktik ziehen: Reduzieren wir die empirischen Anteile unserer Forschungsdisziplin so, dass sie sich im Gleichgewicht mit anderen Forschungsrichtungen befinden. Derzeit scheint mir – und den Diskussionsbeiträgen nach diesem GDM-Kurzvortrag zufolge offenkundig auch zahlreichen Kolleginnen und Kollegen – der Anteil empiri-

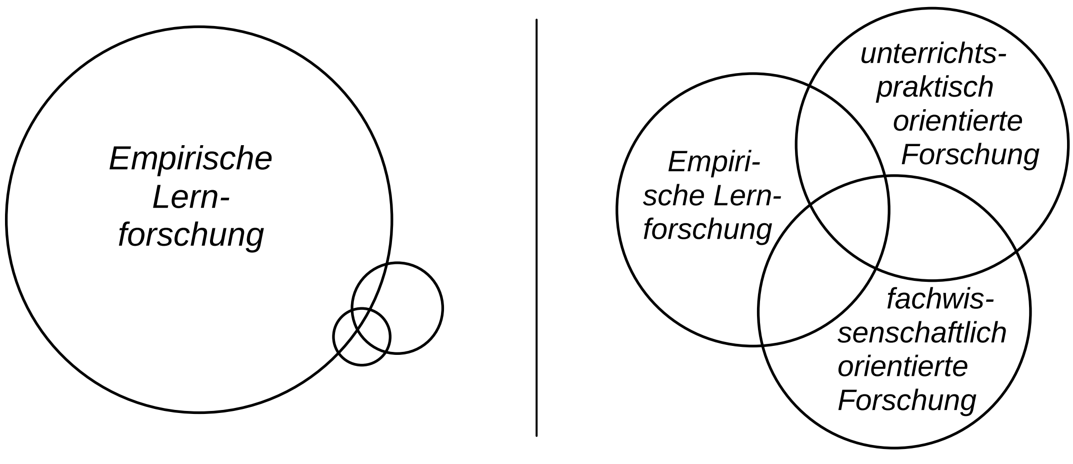


Abb. 1: Mathematikdidaktische Forschung in Deutschland
(a) derzeitige Ausprägung (b) Gleichgewicht der Forschungsrichtungen

scher Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik (siehe Abb. 1a) zu dominierend und teilweise geradezu erdrückend.

3. Warum benötigen wir eine Kopernikanische Wende?

Jedoch wird eine nur auf die Größenordnung bezogene Änderung der mathematikdidaktischen Forschungslandschaft kaum ausreichen, denn die Probleme reichen tiefer. Vor knapp zehn Jahren führte eine Zeitungsmeldung bei mir zu einer tiefgreifenden Verunsicherung als didaktisch Forschender: 90 % aller Studien, stellte seinerzeit einer der führenden Medizinstatistiker Deutschlands fest, sind falsch (Kosog 2006).

Auch spätere Meldungen zeigen ein verheerendes wissenschaftliches Bild: Forschern der Biotechnologie-Firma Amgen gelang es nur in 10 %, Forschern von Bayer HealthCare nur in 25 %, die Ergebnisse onkologischer Studien aus dem Universitätsbereich in ihren Laboren zu reproduzieren (Begley & Ellis 2012). Zwischen 75 % und 90 % dieser Studien sind somit Zufallsbefunde.

Zwar beziehen sich diese Ergebnisse auf medizinische Studien. Doch unterscheiden sich diese Studien konzeptionell und in ihren statistischen Werkzeugen tatsächlich so sehr von denen im Bereich der Mathematikdidaktik? Dies ist kaum anzunehmen, und so erwartete ich seinerzeit, auf zukünftigen Didaktik-Tagungen lebhafte Diskussionen über die Grundlagen unseres Forschungsgebiets mitzuerleben. Doch es passierte: Nichts!

Dies mag eine Spiegelung der gesellschaftlichen Relevanz der unterschiedlichen Forschungsdisziplinen sein: In der Medizin geht es um Leben und Tod. Fehlerhafte Studien führen dazu, dass Kranke falsch behandelt und früher sterben werden. In der Biotechnologie und Pharmazie geht es um viel Geld. Erweist sich ein mit hohen finanziellen Ressourcen entwickeltes Medikament als letztlich wirkungslos, sind die Kosten für die Firmen dramatisch. In der Mathematikdidaktik geht es um Lernen oder Nicht-Lernen, ein aus gesellschaftlicher Sicht also vergleichsweise irrelevantes Problem.

Doch solange mathematikdidaktische Forschungsarbeiten nicht standardmäßig reproduziert werden, kann die Hypothese, dass empirische mathematikdidaktische Arbeiten in ähnlicher Größenordnung wie Arbeiten aus der Biomedizin fehlerbehaftet und als Zufallsbefunde wissenschaftlich wertlos sind, nicht zurückgewiesen werden.

Deshalb sollte eine zweite Konsequenz sein: Fertigen wir weniger neue Arbeiten an, von denen wir nicht wissen, ob sie auf schwankendem wissenschaftlichen Grund stehen, sondern festigen wir unsere wissenschaftliche Basis durch Reproduktion wichtiger mathematikdidaktischer Studien.

4. Ein kurzer Abriss der Probleme

In der empirischen Forschung brennt es an allen Ecken und Enden. Wichtige ungelöste Probleme (Beck-Bornholdt & Dubben, 1997 & 2003), die aus Platzgründen noch ausführlicher in (Horn 2014) diskutiert werden, sind:

- Texanischer Schütze: Wie gehen wir mit dem Phänomen um, dass Hypothesen gelegentlich erst nach Studienabschluss angefügt werden?
- Simpsons Paradoxon: Jede Studie ist multizentrisch. Wie gehen wir mit der Tatsache um, dass prinzipiell nie alle Variablen bekannt sind?
- Papst-Problem: Wie gehen wir damit um, dass im Niedrigprävalenzbereich unsere statistischen Instrumente dramatisch versagen?
- Eleganter Unsinn: Wie gehen wir mit dem Versagen des Peer Review-Systems bei Veröffentlichungen um?
- ESTRO-Umfrage: Wie gehen wir mit der ungenügenden Vermittlung statistischer Grundkenntnisse im Studium und den teilweise „erschütternd“ (Beck-Bornholdt & Dubben 1997, S. 17) mangelhaften statistischen Kenntnissen unserer Fachkollegen um?
- Nicht alle neuen Ideen sind besser als die Ideen unserer Vorgänger, aber 100 % aller Studien scheinen genau dies zu belegen.

Die Schlussfolgerung der ZEIT in ihrer Online-Ausgabe, dass „das Grundgerüst der Forschung selbst … das größte Problem“ sei (Schmitt & Schramm 2013), sollte auch von uns dringend ernsthaft diskutiert werden.

Literatur

Beck-Bornholdt, H.-P. & Dubben, H.-H. (1997). Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken. rororo sciene, Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Beck-Bornholdt, H.-P. & Dubben, H.-H. (2003). Der Schein der Weisen. Irrtümer und Fehlurteile im täglichen Denken. 2. Aufl., Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Begley, C. G. & Ellis, L. M. (2012). Drug Development: Raise Standards for Preclinical Cancer Research. Nature 483, S. 531-533.

Hardy, G. H. (1992). A Mathematician’s Apology. Canto Edition, Cambridge: CUP.

Horn, M. E. (2014). Empirische Arbeiten als Zufallsbefunde. Beitrag zur DPG-Frühjahrstagung in Frankfurt. Zur Veröffentlichung vorgesehen unter www.phydid.de

Kosog, S (2006). „Ein kahler Kopf macht nicht reich“, Interview mit dem Medizinstatistiker Hans-Hermann Dubben. Der Tagesspiegel, 16. Jan. 2006. Zugriff unter URL: www.tagesspiegel.de/zeitung/ein-kahler-kopf-macht-nicht-reich/675478.html

Schmitt, S. & Schramm, S. (2013): Rettet die Wissenschaft! Die ZEIT, Nr. 1/2014, 27. Dez. 2013, S. 33-35. URL: www.zeit.de/2014/01/wissenschaft-forschung-rettung

Von Weizsäcker, C. F. (1962). Kopernikus, Kepler, Galilei. Wiederabdruck in: C. F. v. Weizsäcker (2002). Große Physiker. S. 86-104, München: dtv.

Hans-Dieter JANETZKO, Konstanz

CATO – beiläufiger, selbsterklärender Einsatz von Computeralgebra in Mathematikvorlesungen für Ingenieure

CATO ist eine deutschsprachige, sich selbst erklärende Eingabe-Oberfläche für verschiedene Computeralgebra-Systeme: Maple, math. Toolbox von MATLAB, Mathematica, Maxima, MuPAD, Yacas. Dadurch kann CA in der Vorlesung wie ein Taschenrechner verwendet werden:

- Wenn es der Anschauung oder dem besseren Verständnis dient,
- um abschließende umfangreiche Berechnung abzukürzen,
- um anspruchsvollere Beispiele zu betrachten,
- um den Blick auf wesentliche Zusammenhänge zu lenken.

Der Student selbst kann üblicherweise nach ca. 15-20 min mit CATO umgehen.

1. CATO realisiert alte und neue Forderungen, Ideen und Ansätze

Für die Gestaltung von Oberflächen für CA-Systeme gab es schon früher Forderungen, die eine verbesserte Benutzerfreundlichkeit zum Ziel hatten. So hat Kajler in verschiedenen Arbeiten, unter anderem in [3] und in [4] seine Ideen einer idealen Benutzeroberfläche für CAS beschrieben und entwickelt und sie dann abschließend in [5] und [6] ausgearbeitet. Einige Jahre später sind diese Ideen unter anderem von Cojocaru et al. [7] weiter entwickelt worden. Auch gab es bei Systemen wie Maple und Mathematica immer wieder Ansätze, die Benutzeroberfläche anwendungsfreundlicher zu gestalten. Bei diesen Systemen sind die Benutzer sogar durch Java-Schnittstellen aufgefordert, leichter zugängliche Oberflächen zu entwickeln. Darüber hinaus gibt es zum Beispiel bei Maxima die Oberfläche wxMaxima, die aber teilweise Kenntnisse der Grammatik voraussetzt und auch nur einen Teil der Befehle abdeckt.

Bei der Entwicklung von CATO hat der Autor nicht nur viele dieser sinnvollen Ansätze aufgegriffen, sondern auch eigene Konzepte realisiert wie zum Beispiel das Paket „Chronik“, das eine fortlaufende Zusammenstellung aller in der aktuellen Sitzung bisher verwendeten Befehle ist.

2. Beispiele rechnen ohne Ablenkung durch CA

Eine Vorlesung sollte eigentlich nicht nur aus der Einführung in die wesentlichen Methoden und Verfahren mit anschließenden einfachen Beispie-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 567–570). Münster: WTM-Verlag

len zum Üben bestehen, sondern auch aus Beispielen, bei denen der Rechenweg die Grenzen der „Tafel-Mathematik" überschreitet:

- Bestimmung des Ranges einer 5×4 - Matrix.
- Visualisierung von Taylorreihen.
- Wenden Sie den folgenden Faltungsoperator auf f(t) = σ(t) · sin(t) an: $\int_0^{10} \tau^3 \cdot f(t-\tau)\ d\tau$.
- Lösen Sie folgende Differentialgleichung mittels der Laplace-Transformation $y'''(t) - 3 \cdot y''(t) + 2 \cdot y(t) = \sigma(t) \cdot 4 \cdot e^{-3 \cdot t}$, $y''(0^+) = 0$, $y'(0^+) = -1$, $y(0^+) = 0$
- Ein Roboter lackiert Karosserien von Autos. Dabei ist bei 0,3 % der lackierten Oberflächen der Lack dünner als 0,082 mm und bei 99,5 % der Oberflächen der Lack dicker als 0,113 mm. Bestimmen Sie μ und σ!

Jetzt bietet sich für Teile des Lösungsweges der Einsatz von Computeralgebra an, aber wie verhindert man, dass dieser Einsatz von der Mathematik ablenkt? Üblicherweise sehen die Studenten den benötigten CA-Befehl zum ersten oder zweiten Mal. Sie grübeln über die Syntax und die Grammatik des Befehls nach; und die Schwächeren verzweifeln ob der Befürchtung, dieses zu Hause nachvollziehen zu müssen. Oder: die Studenten lesen im Internet die Dokumentation des Befehls.

3. CATO

Eine der wesentlichen Ideen bei der Gestaltung der Java-Oberfläche CATO war das Ziel, die Studenten durch den Einsatz von CA nicht zu verschrecken. Immer dann, wenn CA in einer Mathematik-Veranstaltung eingesetzt wird, sollen die Studenten das Gefühl haben: „Sie können es zu Hause auch!". Das führte unter anderem zu Folgendem:

- Die Hilfe ist ein HTML-Dokument, also unabhängig vom Programm CATO zu lesen.
- Nicht nur die Befehle, sondern auch Synonyme sind in der Hilfe aufgelistet. Es wird immer auf den Namen des Befehls und des Paketes verwiesen. Die Beispiele sind nachvollziehbar vorgerechnet.
- Inhaltlich zusammengehörige Befehle sind zwar in Paketen zusammengefasst, aber der gleiche Befehl kann in verschiedenen Paketen enthalten sein, z.B. „Definition eines Vektors" im Paket „Lineare Algebra" und im Paket „Definitionen".

- Die Beschreibung der Auswahl des Befehls durch die richtige Paketwahl ist in dem Hilfetext des Befehls immer direkt unter dem Namen des Befehls.
- Die Auswahl der Befehle geschieht über Menüs, mehrparametrige Befehle können nicht über die Tastatur eingegeben werden!
- Die Eingabe bei mehrparametrigen Befehlen geschieht immer über zweidimensionale Eingabemasken, jeder Parameter hat eine eigene immer kommentierte Eingabezeile.
- Somit ist der Name eines Befehls im Auswahlmenü kürzer als die Befehlsbeschreibung im Eingabefenster oder als die Befehlsbeschreibung im Protokoll.
- Die richtigen Klammern und Gleichheitszeichen werden von CATO selbst gesetzt.
- Auch die Optionen werden über Eingabemasken mit Menüs von rechts nach links ausgewählt!
- CATO ist in der Oberfläche und bei der Eingabe unabhängig vom angebundenem CA-System.
- Die Protokolldatei ist auch ohne CA-System bzw. CATO lesbar.

Diese verschiedenen Gestaltungsmöglichkeiten führen in ihrem Zusammenwirken zu weiteren Eigenschaften: Weil der Benutzer anfangs Befehle nur über die richtige Menüauswahl erreichen kann, ist es möglich, Bezeichnungen für Befehle abzukürzen, weil sich ihre Bedeutung aus dem Kontext erschließt, obwohl Abkürzungen nach Kajler eigentlich vermieden werden sollten. So ist z. B. die Verteilungsfunktion einer statistischen Verteilung (wie alle anderen Befehle für diese Verteilung) nur in dem Paket vorhanden, das den Namen dieser Verteilung trägt, d.h. der Name der stat. Verteilung im Befehlsnamen selber ist abkürzbar.

4. CATO im Einsatz

CATO wird in der Verbindung mit Mathematica oder Maxima an der HTWG Konstanz von verschiedenen Dozenten eingesetzt, von dem Autor in den Vorlesungen Mathematik I und II im Studiengang Elektrische Informationstechnologie Bachelor und in der Statistik II im Studiengang Betriebswirtschaftslehre Bachelor. Es gibt keine Veranstaltung wie „Einführung in CA“, zu Beginn jeder Vorlesung wird CATO vorgeführt und in der ersten oder zweiten Vorlesungswoche dürfen die Studenten im PC-Labor die ersten Beispiele selber rechnen. Nach Lösen einer Gleichung, Bestimmen der Länge eines Vektors und Zeichnen einer Sinuskurve bzw. Bestimmung von zwei Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Größen verstehen die Studenten CATO und die Prinzipien von CATO. Danach ist der weitere Gebrauch von CATO in der Vorlesung selbstverständlich und selbsterklärend.

Der Einsatz von CATO verändert die Vorlesung; Beispiele und Aufgaben müssen teilweise verändert werden. Auch kann man als Dozent jederzeit auf Wunsch der Studenten komplexe, anspruchsvolle Beispiele vorführen und / oder auch nach der Herleitung des Beispiels den Tafelanschrieb abbrechen und mit CATO und CA die Rechnungen abschließen. Auch der Umgang der Studenten mit der Mathematik verändert sich, sobald sie die typischen zwei Anfängerfehler nicht mehr gemacht werden, vgl. [2].

5. Ausblick

Der Befehlsumfang für Mathematica und Maxima beträgt zur Zeit jeweils mehr als 500 Befehle und wird laufend erhöht. Maple, MuPAD und Yacas sind mit einem etwas geringeren Befehlsumfang verwendbar. Die Verbindung zur math. Toolbox von MATLAB ist ausgetestet.

Durch den Einsatz von CATO erhält der Autor fortlaufend Rückmeldungen und Wünsche, wie die Benutzerfreundlichkeit weiter optimiert werden kann. Fast alle Bisherigen sind beim Wechsel von der Version 1.1 zur Version 1.2 berücksichtigt worden; einige Wenige, wie der direkte Aufruf des Hilfetextes eines Befehls, werden in der Version 1.2.3 realisiert.

CATO kann von der Homepage des Autors herunter geladen werden. Dort ist auch die Hilfe [1] zu CATO, die fortgeschrieben und überarbeitet wird.

Literatur

[1] Janetzko, H.-D. (seit 2007 fortlaufend überarbeitet). Hilfe zu CATO, *online*: http://www.mathematikbuero.de/doku/Hilfe.html

[2] Janetzko, H.-D. (2011). CATO - ein einfacher Zugang zu Computeralgebra. *Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik in der GDM*, Soest

[3] Kajler, N. (1992). CAS/PI: a portable and extensible interface for computer algebra systems. *International Conference on Symbolic and Algebraic Computation*, ACM New York, NY, USA, S. 376—386.

[4] Kajler, N. (1993), Building a computer algebra environment by composition of collaborative tools, *LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE*, S 85--85

[5] Kajler, N. (1993). *Proceedings of the 6th annual ACM symposium on User interface software and technology*. ACM New York, NY, USA, S. 1—10.

[6] Kajler, N. (1998) *Computer-human interaction in symbolic computation*. Springer..

[7] Cojocaru, S. and Malahova, L. and Colesnicov, A. (2006.) Providing Modern Software Environments to Computer Algebra Systems. Springer. *Lecture Notes in Computer Science.*

Stefanie JANOTT, Erfurt

Einblicke in das Auswertungssystem einer Studie zur Förderung der Problemlösefähigkeit in der Grundschule

„Probleme lösen“ zum Lerngegenstand machen, ist nicht erst seit der Veröffentlichung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich im Jahr 2004 (KMK 2005, S. 7) eine der Hauptaufgaben von Mathematikunterricht. Problemlösen ist vielmehr schon lange ein zentrales Bildungsziel (Winter 1997). Mit der Herausgabe der Bildungsstandards wurde der Förderung dieser allgemeinen mathematischen Kompetenz erneut Nachdruck verliehen.

1. Zur möglichen Konzeption eines Unterrichts

Um schon Grundschüler an heuristisches Arbeiten heranzuführen, wird die Einrichtung einer angemessenen Lernumgebung mit besonderen Anforderungen an die Lehrenden sowie deren Schüler/Innen als notwendig erachtet. Eine dreiphasige Unterrichtskonzeption (Hinführung zum Problem (1), individuelle Arbeitsphase (2), gemeinsame Reflexion (3)) ist in Anlehnung an die bereits bestehenden Arbeiten u.a. von Bruder (2003) und Rasch (2001) entwickelt und erprobt worden.

Daneben bedarf es auch einer Reihe von Problemaufgaben, die für den Primarbereich geeignet sind. Im Rahmen der konzipierten Problemstellungen werden geometrische Inhalte aufgegriffen (z.B. Topologie, Symmetrie, Flächeninhalt), da als bedeutsam eingeschätzt wird, dass sich die Probleme materialgestützt und damit auf einer anschauungsgebundenen Ebene bearbeiten lassen. Dies soll allen Schülern ermöglichen, einen ersten Bearbeitungszugang zu finden. Für nähere Informationen zur Unterrichtskonzeption sowie zum Aufgabenformat sei u.a. auf die Artikel in dieser Schriftreihe verwiesen (Hahn & Janott 2010, 2011, 2012a).

2. Zur Erfassung der Problembearbeitungen

Zehn dritte und vierte Klassen aus acht verschiedenen Thüringer Grundschulen haben im Schuljahr 2010/11 an der Studie zur Erprobung des Unterrichtskonzeptes und der Problemaufgaben teilgenommen. Die Spanne der bearbeiteten Problemsituationen reichte in den einzelnen Klassen von 9 bis 16 Aufgaben. Die Problembearbeitungen der Schüler/Innen liegen vollständig zur Auswertung vor. Es ist zu beachten, dass eine begründete Auswahl der bearbeiteten Problemaufgaben erfasst worden ist.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 571–574). Münster: WTM-Verlag

Im idealen Fall beinhaltet eine Problembearbeitung die nachfolgenden Bestandteile:

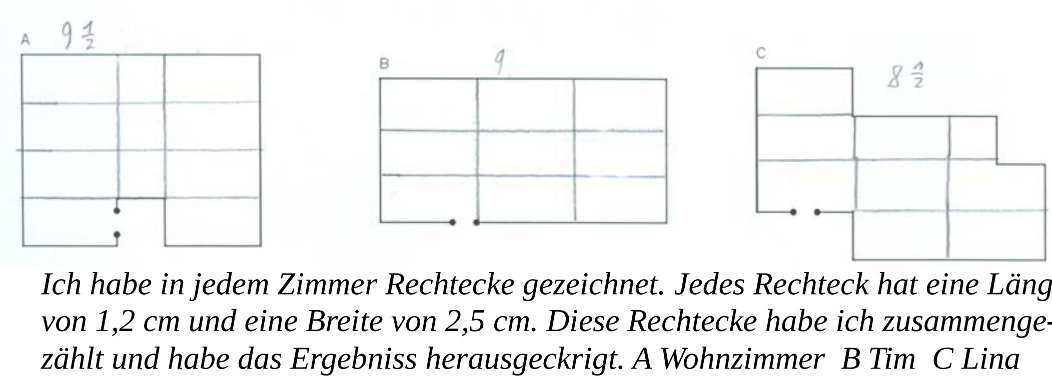
- Eine sichtbar vorgenommene Bearbeitung der gegebenen geometrischen Figuren beispielsweise durch falten, schneiden, vermessen (Messwerte) und bzw. oder anderweitige Darstellungen wie zum Beispiel Skizzen, Tabellen oder Rechnungen;
- eine schriftliche Dokumentation der angestellten Überlegungen, Ideen, Vorgehensweise(-n) und bzw. oder Ergebnisse sowie
- eine vorläufige oder endgültige Lösung des Problems oder eines Problemteils.

An ausgewählten Bearbeitungsbeispielen einer Problemstellung soll nun vorgestellt werden, welche Aspekte der Schülerarbeiten erfasst wurden und im Rahmen der weiteren Analyse betrachtet werden können. Als relevant ergaben sich die übergeordneten Kategorien *Darstellung, Vorgehensweise, schriftliche Dokumentation, Ergebnisse* und *Problemlösung*. Tabellarisch sind aufgaben- und schülerbezogen jeweils zutreffende Ausprägungen zu den benannten Bereichen erfasst worden.

3. Bearbeitungsbeispiele zu einer Problemaufgabe

Bei dem hier betrachteten Problem, welches die Schüler/Innen bearbeiteten, galt es herauszufinden, in welchem Größenverhältnis die gegebenen Zimmergrundrisse A, B und C zueinander standen und daraufhin eine entsprechende Zuordnung vorzunehmen. Die vollständige Problemaufgabe kann bei Hahn & Janott (2012b) eingesehen werden.

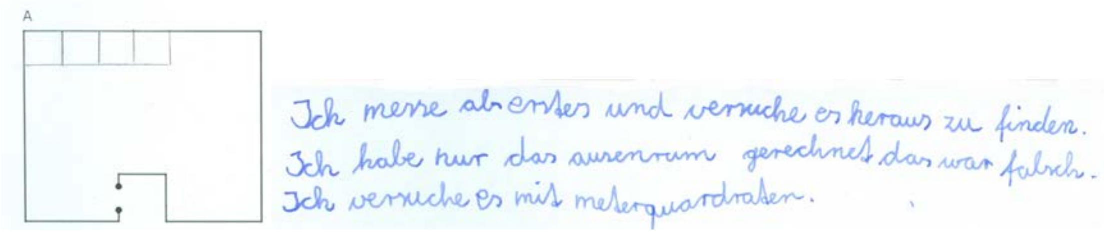
Beispiel 1 - Sidney:



Ich habe in jedem Zimmer Rechtecke gezeichnet. Jedes Rechteck hat eine Länge von 1,2 cm und eine Breite von 2,5 cm. Diese Rechtecke habe ich zusammengezählt und habe das Ergebniss herausgeckrigt. A Wohnzimmer B Tim C Lina

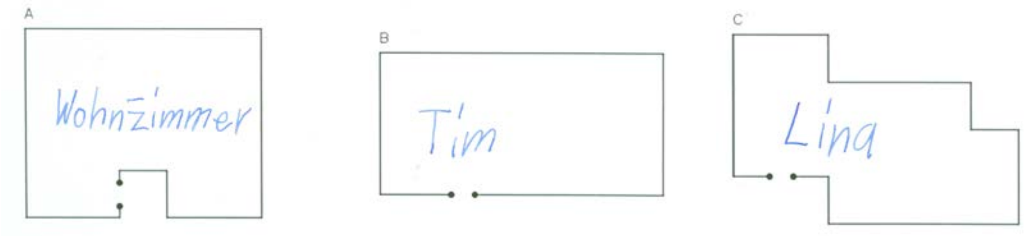
Der Schüler unterteilt die gegebenen Flächen in Orientierung an deren Struktur in Rechtecke und deren Hälften. Er beschreibt sein Vorgehen verständlich und gibt neben den gefundenen Vergleichswerten auch eine Lösung des Problems an, indem er eine entsprechend korrekte Zuordnung der Zimmer vornimmt. Es handelt sich bei dieser Schülerarbeit um eine sehr gute und vollständig nachvollziehbare Problembearbeitung.

Beispiel 2 - Sarah:



In der Arbeit von Sarah wird anhand der erkennbaren Bearbeitung sowie des dazugehörigen Wortlautes deutlich, dass während des Problemlöseprozesses ein Vorgehenswechsel aufgetreten ist. So gibt sie an, zunächst eine Umfangmessung zum Vergleich der Flächen vorgenommen zu haben. Hinweise darauf sind in der originalen Bearbeitung noch anhand radierter Messwerte schemenhaft zu erkennen. Von dieser ersten Fehlstrategie wechselt die Schülerin dann im Verlauf des Problemlöseprozesses zu einer potenziell zielführenden Vorgehensweise. Sarah beginnt Einheitsfiguren einzuzeichnen. Da sie den Begriff *Meterquadrate* gebraucht, kann vermutet werden, dass in der Klasse bereits zum Thema *Flächenvergleich* gearbeitet worden ist. Es erscheint folglich notwendig, anhand der Bearbeitungen aller Schüler/Innen dieser Klasse abzuwägen, ob es sich für diese Kinder um ein Problem oder eher um eine Aufgabe gehandelt haben könnte. Die Problembearbeitung der Schülerin ist aufgrund des vorhandenen Wortlautes in Kombination mit der teilweise noch sichtbaren Darstellung in Ansätzen nachvollziehbar, aber nicht beendet worden.

Beispiel 3 - Stan:



Hinsichtlich einer Einschätzung der Arbeit von Stan gilt als problematisch, dass sich sämtlich sichtbare Bearbeitung auf die Angabe der Problemlösung beläuft. Eine spezifische Vorgehensweise ist nicht nachvollziehbar.

Möglich ist, dass Teile der Arbeit nicht abgegeben wurden oder der Schüler das Problem durch kopfgeometrische Überlegungen gelöst hat. Die angegebene Lösung von Stan ist korrekt, aber aufgrund der fehlenden Darstellung und fehlender schriftlicher Hinweise zum Vorgehen nicht nachvollziehbar.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der bisherigen Erfassung der Schülerarbeiten war es, einen Überblick über die vorliegenden Daten zu erhalten und erste Tendenzen ausfindig zu machen. Im weiteren Verlauf der Forschungsarbeit gilt es zu konkretisieren, welche der erfassten Aspekte vertiefend betrachtet werden sollen.

Die ausgewählten Arbeitsbeispiele von Stan, Sarah und Sidney machen deutlich, wie verschieden die Bearbeitungen der Schüler/Innen zu einer Problemstellung sein können und welche Schwierigkeiten sich daraus für die Einschätzung der kindlichen Produkte ergeben. Dem müssen sich auch die Lehrenden bei der praktischen Umsetzung eines Unterrichts, in welchem Problemlösen zum Lerngegenstand werden soll, stellen.

Literatur

Bruder, R. (2003): Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Darmstadt Material im Rahmen des BLK-Programms "Sinus" zur "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Kiel: IPN.

Hahn, H. & Janott, S. (2010): Heuristische Strategien durch geometrische Aufgaben fördern. Tagungsband GDM

Hahn, H. & Janott, S. (2011): Entwicklung der Problemlösefähigkeit -Heuristische Strategien durch geometrische Aufgaben fördern. Tagungsband GDM

Hahn, H. & Janott, S. (2012a): Wie bearbeiten Grundschüler Problemaufgaben? – Präsentation verschiedener Bearbeitungsweisen. Tagungsband GDM

Hahn, H. & Janott, S. (2012b): „Wer bekommt welches Zimmer?“ – Lösungsvielfalt bei der Auseinandersetzung mit einer geometrischen Problemaufgabe. In: Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben; Stuttgart: Ernst Klett, S. 222-226

KMK (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich - Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand

Rasch, R. (2001): Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim: Franzbecker

Winter, H. (1997): Mathematik als Schule der Anschauung oder: Allgemeinbildung im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Bielefeld: IDM Paper 163, S. 27 – 68

Thomas JANSSEN, Bremen

Lernen als Entwicklung der mathematischen Sinne: Ein Beispiel aus der Algebra

Wer die Algebra beherrscht, hat ein Gespür dafür, wie mit ihren Strukturen umzugehen ist. Er oder sie weiß, wie man eine Gleichung löst, was ein Funktionsterm aussagt oder wie sich ein quadratischer Ausdruck umformen lässt. Gerade wenn die Algebra für Probleme sorgt, hört man naturalisierende Äußerungen wie: „Dafür fehlt mir der Sinn". Dass dieser Sinn sich (weiter-)entwickeln kann, wird damit implizit verneint.

1. Stand der Forschung und Fragestellung

Auch die Forschung zum algebraischen Struktursinn konzentriert sich bislang auf die Feststellung und Beschreibung aktueller Fähigkeiten und Defizite. Malle (1993) sieht die Vermittlung von *Strukturierungsfähigkeit* als ein zentrales Ziel des Algebraunterrichts in der Mittelstufe an, verzichtet jedoch auf eine theoretische Fassung des Begriffs. Linchevski und Livneh (1999) rufen mit ähnlichen Ausführungen zu einer Beschäftigung mit dem „algebraic structure sense" auf. Dem kommt Hoch (2007) nach, die ihn in ihrer Dissertation als gestufte Kompetenz beschreibt. In Tests weist sie nach, dass diese Kompetenz bei den untersuchten Elftklässlern weit weniger ausgebildet sind als man hoffen würde, aber auch, dass durch individuelle Förderung Fortschritte zu erreichen sind. Hochs Beschreibung der zugrundeliegenden Lernprozesse ist allerdings für eine Umsetzung im Klassenverband kaum hilfreich. Auch Rüede (2012) bewegt sich im Kontext des algebraischen Struktursinns. Er wendet sich den im Umgang mit algebraischen Strukturen ablaufenden Prozessen zu. Dabei wird auch untersucht, welche Maßnahmen das individuelle Strukturieren fördern. Der Prozess der Ausbildung algebraischen Struktursinns an sich bleibt aber weiterhin unterbelichtet. Daher soll nun der Frage nachgegangen werden, wie algebraischer Struktursinn *in seiner Entwicklung* verstanden und beschrieben werden kann und wie sich dieser Lernprozess im Klassenunterricht realisiert.

2. Neue Perspektiven durch Theorievernetzung

Als vielversprechende theoretische Ansätze bei diesem Vorhaben wurden das SVSt-Modell (Bikner-Ahsbahs, 2005) und die Theory of Knowledge Objectification (im Folgenden TKO, Radford, 2013) ausgewählt. Das Vorgehen bei der Theorievernetzung (detailliert dargestellt in Janßen & Bikner-Ahsbahs, 2013) bestand aus zwei Schritten. Zunächst wurden die beiden Theorien verglichen, dann wurden sie basierend auf einem kleinen Datensatz kombiniert.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 575–578). Münster: WTM-Verlag

Der Vergleich ergab, dass die zentralen Stärken des SVSt-Modells in seinem offenen Strukturbegriff sowie in der starken Einbindung ins konkret Soziale liegen. Das SVSt-Modell nimmt Struktursehen als die zentrale Handlung der kollektiven Wissenskonstruktion im Klassenraum an. Als mathematische Strukturen werden dabei „Regelmäßigkeiten, Gesetzmäßigkeiten, musterhafte Lösungen“ (Bikner-Ahsbahs, 2005, S. 202) verstanden. Die Stärke der TKO liegt in der vorgenommenen Eingrenzung der Lerninhalte als die kulturell etablierte Mathematik sowie in ihrer Perspektive auf die langfristige individuelle Entwicklung der Schülerinnen und Schüler. Sie nimmt an, dass durch das Erkennen des der kulturellen Tätigkeit (bspw. das Lösen linearer Gleichungen) zugrundeliegenden Tätigkeitsmotivs einerseits diese Tätigkeit erlernt wird (Objectification), sich andererseits gleichzeitig die individuelle Persönlichkeit entwickelt (Subjectification).

In der Kombination der beiden Ansätze ergibt sich ein theoretisches Modell, das den Erwerb algebraischen Struktursinns durch Objectification/Subjectification (im Sinne der TKO) annimmt. Diese werden als Spezialfälle des Struktursehens (im SVSt-Modell) interpretiert.

3. Methodisches Vorgehen

Die Datengrundlage wurde in einer Designstudie in einer 8. Klasse einer Bremer Oberschule gewonnen. In drei Unterrichtseinheiten zu Themen der elementaren Algebra (lineare Gleichungen, lineare Funktionen, Umformen quadratischer Terme) wurden in Zusammenarbeit mit der Lehrkraft Wege gesucht, algebraischen Struktursinn auszubilden. Dabei wurde insbesondere der Arbeitsprozess zweier Schülerpaare videographiert, um die individuellen und gemeinsamen Lernhandlungen beobachten zu können.

Die Unterrichtseinheiten werden getrennt analysiert, da zunächst nicht von einem Strukturen übergreifenden Struktursinn ausgegangen werden kann. In diesem Beitrag werden Ergebnisse aus der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen vorgestellt. Als Tätigkeitskontext dienten dabei Schachtelgleichungen (vgl. Affolter et al., 2003). In der Analyse sind nun zunächst all die Szenen interessant, in denen Struktursicht im Sinne des SVSt-Modells auftritt. Sie wurden transkribiert und daraufhin untersucht, inwiefern sie die Merkmale aufweisen, die die beiden Theorien postulieren, insbesondere, inwiefern und unter welchen Bedingungen es zu Objectification/Subjectification und damit zur Entwicklung von Struktursinn kommt.

4. Ausgewählte Ergebnisse

Im Folgenden werden drei Merkmale von Szenen der Struktursinnentwicklung dargestellt, die zusammengenommen den Ansatz einer Beschreibung des „kommunikativen Prozesses“ (Malle, 1993, S. 35f.) bilden, in dem Algebra gelernt werden muss. Aus den Ergebnissen ergibt sich eine inhaltliche Konkretisierung des Struktursinnbegriffs.

Zunächst sind Szenen der Struktursinnentwicklung als *Zonen der nächsten Entwicklung* verstehbar, wenn man der Definition von Lerman und Meira (2009, S. 199) folgt, die sie als „an ever-emerging semiotic field for interaction and communication where learning-leads-development“ verstehen. Es besteht eine Beziehung zwischen Lehrkraft und Lernenden, die asymmetrisch ist bezüglich des kulturellen Wissens, aber symmetrisch in dem Sinne, dass beide Seiten sich gegenseitig verstehen müssen. Entscheidende Momente dieser Beziehung, die sich immer wieder rekonstruieren ließen, werden im Folgenden an Einzelaussagen einer Episode illustriert. Darin arbeitet die Lehrerin mit zwei Schülern, nachdem diese zunächst vergeblich versucht haben, das Vorgehen einer weiteren Schülerin nachzuvollziehen:

> *Die Lehrkraft initiiert eine Klärung von Zielen und Vorgehen:*
>
> Lehrerin: Was macht ihr mit denen-
>
> *Das Gespräch wird auf die relevanten Objekte fokussiert:*
>
> L: So Streichhölzer kann ich ja nich mehr wegnehm hab ich hier ja nich- ,aber?
>
> Ahmed: Aber die Kisten-
>
> L: Wie viele- kann ich wegnehm?
>
> A: Hier zwei- und hier zwei.
>
> *Betonung der Struktur durch die Lehrkraft:*
>
> L: Und da zwei. ,also immer gleich viele ne? (…) Weil das muss ja gleich bleiben
>
> *Die neue Situation dient als Ausgangspunkt für weiteres Handeln:*
>
> L: so was ham wir dann hier noch liegen?

Wenn Szenen der Struktursinnentwicklung so sehr von den sozialen Voraussetzungen abhängen, ist es wenig erstaunlich, dass sie eine *starke emotionale Aufladung* aufweisen. So sind vor dem Eintreten von Objectification/Subjectification häufig Anzeichen von Ärger, Frustration und Anspannung zu beobachten, die sich dann in Freude und Entspannung auflösen.

Doch es handelt sich hier nicht um rein affektive oder gar unfachliche Situationen. Im Gegenteil, sie enthalten *ausführliche Äußerungen zu (Handlungs-)Zielen und (Tätigkeits-)Motiven sowie zu den relevanten Objekten*. Diese werden durch *explizite Zeigegesten* unterstützt.

Aufbauend auf dieser Analyse lassen sich erste Hypothesen bilden, die den sich herausbildenden Struktursinn zu linearen Gleichungen *inhaltlich-fachlich konkretisieren*: Zwei zentrale Schritte sind zunächst, a) die beiden Seiten der Gleichung als zueinander gleiche Objekte und b) die Variablen- und Skalarterme als vergleichbare Objekte wahrzunehmen; davon ausgehend sind Handlungen möglich, deren Ziel die Vereinfachung der Gleichung bei

Erhaltung der Gleichheit ist – Äquivalenzumformungen. Sie werden zielgerichtet ausgeführt, bis die Lösung unmittelbar erkennbar ist. Diese Beschreibung ist kompatibel mit Hochs Definition, betont aber den konkreten Handlungsablauf gegenüber der abstrakten Fähigkeit.

5. Ausblick

Die Beschreibung der Szenen von Struktursinnentwicklung ist noch unvollständig. Insbesondere müssen Spezialfälle genauer untersucht werden, etwa wenn unterschiedliche Interessen bei Lehrkraft und Schülern auftreten. Offen ist auch, inwiefern sich die beobachteten Vorgänge bei anderen Strukturen rekonstruieren lassen, und ob die Ausbildung bereichsspezifischen Struktursinns die Entwicklung in anderen Gebieten unterstützt.

Schließlich kann es eine Frage weiterer Forschung sein, ob und wie sich Struktursinn nachlernen lässt. Kann es nachträglich „klick machen", oder bräuchten Schülerinnen und Schüler der elften Klasse ebenso viel Zeit und Zuwendung wie die in der Studie beobachteten Achtklässler?

Literatur

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti und B., Wieland, G. (2003). *mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I.* Bern: Schulverlag blmv & Zug: Klett und Balmer.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interessentheorie.* Hildesheim: Franzbecker.

Hoch, M. (2007). *Structure Sense in High School Algebra*. Unveröffentlichte Dissertation. Tel Aviv: Tel Aviv University.

Janßen, T. und Bikner-Ahsbahs, A. (2013). *Networking theories in a design study on the development of algebraic structure sense*. Working group paper auf der CERME8, abrufbar unter http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Janssen_Bikner_Ahsbahs.pdf (1. März 2013)

Linchevski, L., und Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 173–196.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Meira, L. und Lerman, S. (2009). *Zones of proximal development as fields for communication and dialogue.* In: C. Lightfoot und M. C.D.P Lyra (Hrsg.): Challenges and Strategies to Study Human Development in Cultural Contexts. Rom: Firera & Liuzzo, S. 199–219.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. In: *Journal of Research in Mathematics Education 2* (1), S. 7–44.

Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. In: *Journal für Mathematik-Didaktik 33* (1), S. 113–141.

Steffen JUSKOWIAK

„Mathelager“ – Kreativität(sentfaltung) im Lehramtsstudium

Kreativität ist einer der Begriffe, der uns in vielerlei Sinnzusammenhang im Alltag begegnet und gerade dadurch zu einem sehr diffusen Begriff verschwimmt. So überrascht die Aussage „Kreativität ist einer der unbestimmtesten, ambivalentesten und verwirrensten Begriffe der heutigen Psychologie und Pädagogik.“ (AUSUBEL u. a. 1981, S. 670) nicht. Weitgehender Konsens herrscht jedoch sicherlich über die Aussage von Zech (vgl. ZECH 1996, S. 354), dass unter „Kreativität“ die Fähigkeit und Bereitschaft einer Person zu verstehen ist, etwas (für sie) Neues zu schaffen. Dass diese Fähigkeit und Bereitschaft von großer Bedeutung ist, ist unbestritten: „Kreativität ist die Quelle aller Innovationen; sie trägt wesentlich zu Wohlstand und Lebensqualität bei.“ (GESELLSCHAFT FÜR KREATIVITÄT) Auch und gerade bezogen auf Lernprozesse verdienen kreative Prozesse Beachtung: „Die These, dass Lernprozesse umso erfolgreicher sind, je mehr Schüler bei der Entwicklung ihrer eigenen Handlungskompetenzen selber aktiv (einschließlich emotionaler Eingebundenheit) beteiligt sind, macht das Betrachten kreativer Prozesse didaktisch interessant.“ (WINTER 1991, S. 173)

Dies führt auch zum Betrachten der in kreativen Prozessen entstehenden Produkte. Merkmale kreativer Produkte sind deren *Neuheit*, *Sachadäquatheit* und *Originalität*. Bei dem Merkmal *Neuheit* ist zwischen einem kreativen Produkt erster Art, welches absolut neu ist, und einem kreativen Produkt zweiter Art, welches hauptsächlich neu für denjenigen ist, der es hervorgebracht hat, zu unterscheiden. Unter der *Sachadäquatheit* des Produktes ist zu verstehen, dass dieses sinnvoll und sachgemäß sein soll. Der Begriff *Originalität* kann im Sinne von Seltenheit als ein gewisses eigenständiges Kriterium angesehen werden, wird aber auch synonym mit Neuheit verwendet. (angelehnt an NEUHAUS 2002, Seite 47 ff.)

Nach BRUDER (1999) gibt es für kreative Aktivitäten im Mathematikunterricht drei Voraussetzungen: Die Lernenden müssen *kreativ sein dürfen* (Art der Unterrichtsgestaltung), *kreativ sein wollen* (intrinsische Motivation, Anstrengungsbereitschaft) und *kreativ sein können* (Konzentrationsvermögens, Verfügbarkeit von Wissen).

Das Ziel, kreative Prozesse bei SchülerInnen anzuregen, setzt eine entsprechende Sensibilisierung und damit Ausbildung von (werdenden) LehrerInnen voraus. Dieses Ziel wird mit der Lehrveranstaltung(sform) „Mathelager“ verfolgt und hier vorgestellt. Kern der Veranstaltungsform ist das Arbeiten in so genannten Problemfeldern.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 579–582). Münster: WTM-Verlag

Arbeiten in Problemfeldern

Wichtige Facetten kreativen Verhaltens beim Betreiben von Mathematik sind das Bilden von Begriffen (vgl. WETH 1999), das Finden und das Lösen von Problemen. Die beiden letztgenannten Facetten lassen sich zum Arbeiten in Problemfeldern zusammenfassen (bekannt u. a. nach PEHKONEN (1995) und ZIMMERMANN (1991)). Ein Problemfeld umfasst dabei eine Menge inhaltlich verwandter Probleme. Ausgehend von einem abgeschlossen untersuchten Ausgangssachverhalt werden durch Variation einer oder mehrerer Komponenten dieses Ausgangssachverhaltes neue Probleme gesucht, und es wird versucht, diese zu lösen.

Als Beispiel für ein Problemfeld kann das Problemfeld des Satzes des Pythagoras dienen. Ausgehend von der bekannten Pythagoras-Figur mit auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aufgesetzten Quadraten können z. B. diese Aufsetzfiguren (Halbkreise, (ähnliche) Vielecke, ...), die Grundfigur (nichtrechtwinkliges Dreieck, rechtwinkliges Trapez, ...), die betrachteten Flächen (Zwischenraumdreiecke im Sinne des Satzes von Klein), die betrachtete Relation (statt des Flächeninhaltes der Umfang der Aufsetzfiguren) oder die Dimension der betrachteten Figuration variiert werden. (Diese Aufzählung ist selbstredend nicht vollständig.)

Quellen für Ausgangsprobleme von Problemfeldern können u. a. die Umwelt von Lernenden, die Geschichte der Mathematik und „klassische" Schulbuchaufgaben sein (vgl. ZIMMERMANN 1991, S. 40). Als Quellen in der Literatur sind u. a. FRITZLAR (2005) und SCHUPP (2002) zu empfehlen.

Lehrkonzept „Mathelager"

Ziel der Lehrveranstaltung „Mathelager" ist zum einen die Vermittlung grundlegenden denkpsychologischen und mathematikdidaktischen Wissens zur Kreativität an Studierende der Lehrämter GS, HS, RS und GYM. Zum anderen und im Fokus hat dieses Seminar jedoch zum Ziel, Studierenden durch ihre eigene möglichst ungestörte Arbeit in Problemfeldern erfahrbar zu machen, wie kreative Verhaltensweisen insbesondere im Sinne des Findens und Lösens von Problemen bei Mathematiklernenden angeregt werden können. Zugleich sollen die Studierenden dabei auch (erneut) erfahren, welche Freude das Betreiben von Mathematik bereiten kann.

Zum Erreichen insbesondere des genannten Hauptziels ist ein wöchentlich stattfindendes Seminar mit den üblichen 90minütigen Sitzungen ungeeignet. Es bedarf wesentlich längerer zusammenhängender Zeitfenster, die zur ungestörten Arbeit zur Verfügung stehen. Daher wird dieses Seminar als viertägige Blockveranstaltung durchgeführt.

Erfolgreich initiiert haben diese Veranstaltungsform Prof. Dr. Frank Heinrich und AOR Dr. Thomas Janik während ihrer gemeinsamen Tätigkeit an der Universität Bamberg im Jahr 2003. Seit 2008 wird ebenso erfolgreich jährlich ein „Mathelager“ mit je ca. 20 Studierenden an der TU Braunschweig unter Leitung von Prof. Dr. Frank Heinrich und M. Ed. Steffen Juskowiak durchgeführt.

Dabei erfolgt jeweils am ersten Veranstaltungstag die Anreise der Teilnehmern und Lehrenden zu einem externen Veranstaltungsort. (Die Wahl eines Veranstaltungsortes außerhalb der TU Braunschweig hat sich gerade im Hinblick auf Gruppenbildungsprozesse und die Konzentration der Studierenden auf die Inhalte sehr bewährt.) Daran schließt sich ein Vortrag zu Basiswissen im Themenbereich Kreativität an. Anschließend erfolgt die Vorstellung des didaktischen Konzeptes „Problemfeld“ mit erster eigener kreativer Arbeit der Studierenden.

Am zweiten Veranstaltungstag wird die Großgruppe in zwei Teilgruppen aufgeteilt. Jede Teilgruppe arbeitet in einem eigenen Problemfeld. Bewährt hat sich dabei, angelehnt an SCHUPP (2002, S. 21 ff.), nach der Bearbeitung des Ausgangsproblems durch die Studierenden Lösungen im Plenum zu besprechen und auch die von den Studierenden anschließend in ersten Überlegungen entworfenen Anschlussprobleme im Plenum zusammenzutragen. Danach beginnen die Studierenden, die selbst erdachten Anschlussprobleme zu bearbeiten und (davon ausgehend) weitere zu suchen und zu bearbeiten.

Gegen Ende des zweiten Veranstaltungstages erfolgt dann durch einen externen Referenten ein Vortrag zu einem zur Kreativität verwandten, interessierenden mathematikdidaktischen Thema wie z. B. zur (mathematischen) Begabung von Kindern.

Der dritte Veranstaltungstag läuft sehr ähnlich zum zweiten ab. Die Teilgruppen tauschen die Problemfelder und widmen sich wieder der Arbeit darin. Statt des Vortrages am Abend bereiten die Studierenden jedoch die Präsentation ausgewählter, in den vergangenen beiden Tagen erzielter Arbeitsergebnisse vor.

Diese erfolgt am vierten Veranstaltungstag in der Großgruppe, ebenfalls angelehnt an SCHUPP (2002, S. 21 ff.). Präsentiert werden von den Studierenden Inhalte, die sie als besonders wertvoll und insbesondere auch innerhalb der Großgruppe als selten im Sinne von *Originalität* einschätzen. Anschließend erfolgt die Abreise vom Veranstaltungsort.

Erfahrungen und Rückmeldungen

Während aller bisher stattgefundenen Mathelager hat sich eine hohe Arbeitsmotivation der Studierenden eingestellt. Diese drückt sich aus Sicht der Veranstalter sowohl durch die große zeitliche Ausdauer bei der Arbeit in den Problemfeldern als auch durch den z. T. hohen Schwierigkeitsgrad der (erfolgreich) bearbeiteten Anschlussprobleme aus. (Beispielsweise wurde in jedem Mathelager, in dem ausgehend von magischen Quadraten magische Figuren betrachtet wurden, von den Studierenden erfolgreich versucht, magische Würfel zu erschaffen.) Gleichzeitig ist auch die Qualität der Arbeitsergebnisse als hoch zu bezeichnen.

Auch die Rückmeldungen der Teilnehmenden bestätigen den Eindruck der hohen Arbeitsmotivation. Vielfach wurde geäußert, dass die Studierenden durch dieses Blockseminar einen ganz neuen Eindruck davon bekommen haben, wie viel Leben, im Sinne eigenen Erschaffens mathematischer Erkenntnisse, in Mathematik stecken kann.

Die somit erreichten Lehrziel rechtfertigen den im Vergleich zu einem im normalen Rahmen stattfinden Seminar wesentlich größeren organisatorischen und vor allem finanziellen Aufwand für ein „Mathelager“.

Literatur

Ausubel, D. u. a. (1981): *Psychologie des Unterrichts* (Bd. 2). Weinheim: Beltz.

Bruder, R. (1999): *Möglichkeiten und Grenzen von Kreativitätsentwicklung im gegenwärtigen Mathematikunterricht*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 117 - 120.

Fritzlar, T. (2005): *Die „Matheasse“ in Jena*. In: Mathematikinformation Nr. 43. Zugriff über http://www.mathematikinformation.info/pdf/MI43Fritzlar.pdf am 29.11.13

Gesellschaft für Kreativität: *Zwölf Thesen der Gesellschaft für Kreativität*. Zugriff über http://www.kreativ-sein.org/v/12Thesen.html am 29.11.2013

Neuhaus, K. (2002): *Die Rolle des Kreativitätsproblems in der Mathematikdidaktik*. Berlin: Verlag Dr. Köster.

Pehkonen, E. (1995): *Introduction: Use of Open-ended Problems*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 27 (2), S. 55 - 57.

Schupp, H. (2002): *Thema mit Variationen*. Hildesheim: Franzbecker

Weth, T. (1999): *Kreativität im Mathematikunterricht – Begriffsbildung als kreatives Tun*. Hildesheim: Franzbecker.

Winter, H. (1991): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.

Zech, F. (1996): *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Weinheim: Beltz (8. Auflage)

Zimmermann, B. (1991): *Offene Aufgaben für den Mathematikunterricht und ein Ausblick auf Forschungsfragen*. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 23 (2), S. 38 - 44.

Rainer KAENDERS, Bonn

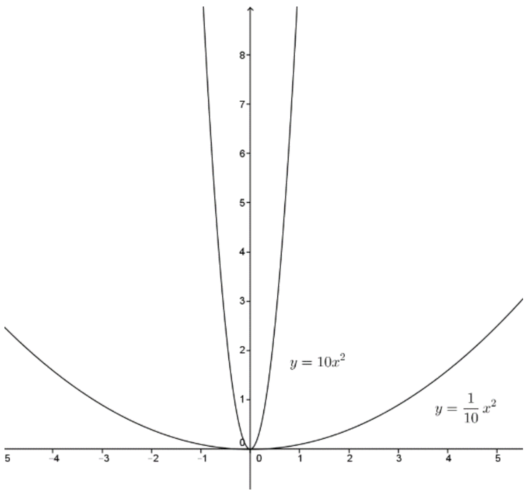
Von einem kognitiven Konflikt zur Quadratur der Parabel

Gibt es schmale und breite Parabeln? Diese Frage erzeugt einen kognitiven Konflikt, der einen Zugang zur Quadratur der Parabel ermöglicht, welcher uns aus der Literatur nicht bekannt ist. Zunächst stellen wir zwei klassische Methoden von Archimedes zur Quadratur der Parabel vor. Dann verfolgen wir eine Analogie zu einer Idee des flämischen Jesuiten Gregorius van St-Vincent (1584-1667) zum Logarithmus und zur Berechnung des Volumens eines allgemeinen Kegels von Frits Beukers (1953). Dies liefert uns einen überraschenden und für die Mittelstufe geeigneten Zugang zur Parabelquadratur, der Gelegenheiten zur Verallgemeinerung bietet. An diesem Beispiel wird deutlich, wie reich die Vielfalt an möglichen Qualitäten mathematischer Bewusstheit (Kaenders & Kvasz, 2011) ist. Wir sehen Möglichkeiten, kontextuelle (Hebelgesetz), manipulative (nachrechnen in Koordinaten), instrumentelle (mit DGS), diagrammatische (Archimedische Dreiecke, Zeichnung der Waage), experimentelle (Flächen in DGS angeben lassen), logische und theoretische Bewusstheit zu erlangen – von intuitiver, strategischer, imitativer und sozialer Bewusstheit mal ganz abgesehen.

In der Schule spielen Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen eine wichtige Rolle – auch, wenn man inzwischen das Wort 'Parabel' (wie übrigens auch das Wort 'Primzahl') in den Kernlehrplänen des Landes NRW und anderswo vergeblich sucht. Die Beschäftigung mit der Parabel gehört seit Jahrtausenden aus guten Gründen zum Grundkanon jedes einführenden Mathematikkurses.

1. Kognitiver Konflikt

Wenn in der Schule die Parabel als Graph einer quadratischen Funktion eingeführt wird, liegt es nahe, von schmalen hohen und von breiten flachen Parabeln zu sprechen. Etwa die Graphen von $y = 10\,x^2$ oder $y = \frac{1}{10}x^2$ scheinen verschiedener Gestalt zu sein.



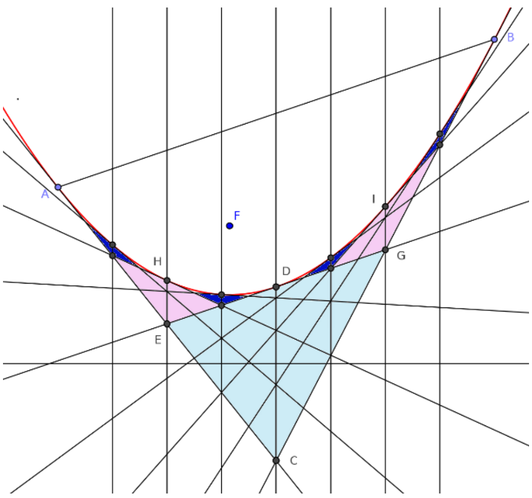
Auf der anderen Seite kennen wir seit Pappus von Alexandria die Definition der Parabel mittels *Leitgerade* und

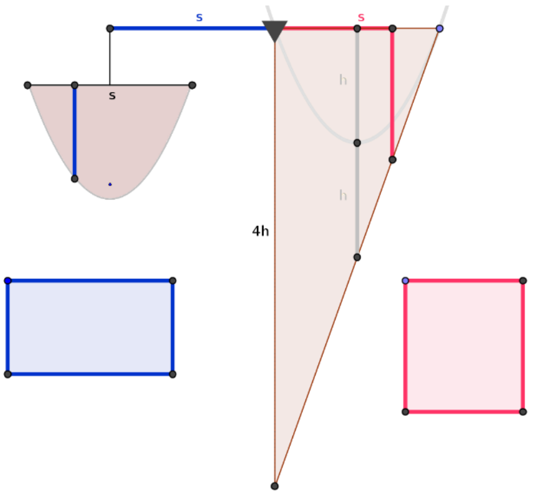
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 583–586). Münster: WTM-Verlag

Brennpunkt. Die schulische Definition einer Parabel wird damit zum Satz. Da jedes Paar aus einer Geraden und einem Punkt durch eine Ähnlichkeitstransformation auf ein anderes Paar bestehend aus Gerade und Punkt abgebildet werden kann, sind je zwei Parabeln ähnlich. Es gibt also nur eine Parabelform. Unsere Intuition sorgt für einen kognitiven Konflikt, dessen Äquilibration uns zu tieferen Einsichten bezüglich der Parabel führt.

2. Archimedes

Die Quadratur der Parabel hat eine lange Tradition (vgl. Führer, 1989, 2006)[1]. Schon Archimedes hat sie auf verschiedene Weisen durchgeführt, von denen zwei im Vortrag im Detail vorgeführt wurden. Bei der ersten hat er die Eigenschaften von Dreiecken, die wir heute *archimedisch* nennen, zur Exhaustion der Parabelfläche genutzt (vgl. Aarts, 2008) und bei der anderen hat er das Hebelgesetz verwendet (vgl. Winter, 1994). Die beiden Abbildungen geben eine Idee dieser Vorgehensweisen.





3. Leitideen

Für die Entdeckung der neuen Methode zur Quadratur der Parabel spielten zwei Leitideen eine entscheidende Rolle:

a) Nennt man $L(a, b)$ die Fläche unter dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x}$ von $x = a$ bis $x = b$, mit $0 < a < b$, so hat schon der flämische Jesuit Gregorius van St-Vincent (1584-1667) erkannt, dass für jedes $c > 0$ gilt: $L(ca, cb) = L(a, b)$. Daraus folgt unmittelbar die wichtigste Eigenschaft des Logarithmus (vgl. Edwards, 1979):

[1] Kollegin Katja Krüger hat uns freundlicherweise auf diese Publikationen aufmerksam gemacht.

$$L(1,x) + L(1,y) = L(1,x) + L(x,xy) = L(1,xy).$$

Dies steht für die Leitidee, sich die funktionalen Eigenschaften einer Fläche – wie $L(a,b)$ – zunutze zu machen.

b) Die zweite Leitidee ist die Berechnung des Kegelvolumens, wie man sie bei Beukers (2009) findet. Ein Kegel der Höhe h, Grundfläche G und Volumen V, wird mit einem beliebigen Faktor $\lambda > 1$ vergrößert. Dabei wird die Grundfläche zu $\lambda^2 G$ und das Volumen zu $V(\lambda) = \lambda^3 V$. Dann passt der ursprüngliche Kegel in den vergrößerten Kegel, sodass die Kegelspitzen zusammenfallen und die Grundflächen der beiden Kegel parallel sind. Betrachtet man das Volumen der Differenzscheibe (‚*plakje kaas*') der beiden Kegel, so kann man diese abschätzen durch die Dicke der Scheibe und die entsprechenden Grundflächen:

$$(\lambda h - h)G \leq \lambda^3 V - V \leq (\lambda h - h)\lambda^2 G$$

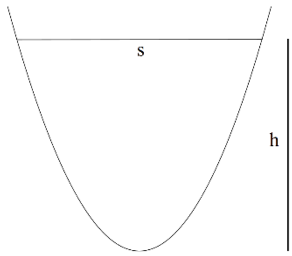
Ausklammern von h und Division durch $(\lambda - 1)$ ergibt:

$$hG \leq \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} V \leq \lambda^2 hG,$$

woraus mit $\frac{\lambda^3-1}{\lambda-1} = 1 + \lambda + \lambda^2$ die bekannte Formel $V = \frac{1}{3} hG$ folgt.

4. Äquilibrium

Bezeichnen wir nun mit $P(h,s)$ eine Parabel, die bei Höhe h die Breite s hat, dann wissen wir, dass es zu jeder Zahl $\mu > 0$ eine Zahl $\lambda > 0$ geben muss, so dass gilt: $P(\mu h, s) = P(\lambda h, \lambda s)$. Man rechnet leicht nach, dass im Fall der Parabel für die beiden Zahlen gilt: $\lambda \cdot \mu = 1$.



5. Quadratur der Parabel

Sei nun $A := A(h,s)$ der Flächeninhalt eines durch eine senkrecht zur Symmetrieachse stehende Sekante begrenzten Parabelsegments, das auf Höhe h die Breite s hat. Nun betrachten wir ein beliebiges $\lambda > 1$ und das zugehörige $\mu := \frac{1}{\lambda}$. Es gilt dann $A(\lambda h, \lambda s) = \lambda^2 A$ und $A(\mu h, s) = \mu A$.

Wir wissen, dass $P(\lambda h, \lambda s) = P(h, \mu s)$. Daher passt $P(h, \mu s)$ genau in $P(\lambda h, \lambda s)$ und lässt dabei nur einen Differenzstreifen unbedeckt, den wir abschätzen können:

$$(\lambda h - \mu h)s \leq \lambda^2 A - \mu A \leq (\lambda h - \mu h)\lambda s.$$

Ausklammern von h und Division durch $(\lambda - \mu)$ liefert:

$$hs \leq \frac{\lambda^2 - \mu}{\lambda - \mu} A \leq \lambda hs,$$

woraus mit $\frac{\lambda^2-\mu}{\lambda-\mu} = \frac{\lambda^3-1}{\lambda^2-1} = \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1}$ das schon von Archimedes abgeleitete Gesetz $A = \frac{2}{3}hs$ folgt, und wir die Parabel quadriert haben.

6. Verallgemeinerungen

In moderner Sichtweise zeigt die archimedische Methode der Exhaustion die Jordan-Messbarkeit und damit die Existenz des Flächeninhaltes eines Parabelsegments. Wir hingegen gehen von der Existenz der Fläche aus.

Flächen- und Volumenberechnungen durch Ähnlichkeitstransformationen und Scherungen gibt es viele (vgl. Führer, 2006). Unsere Methode, die darin besteht, die ähnlichen Bilder einer Figur unter einer zentrischen und einer linearen Streckung miteinander zu vergleichen, funktioniert allgemeiner. Zunächst kann man so auch bei einem beliebigen Parabelsegment vorgehen, womit man ebenfalls das Verhältnis $\frac{2}{3}$ zwischen den Flächeninhalten des Parabelsegmentes und des zugehörigen archimedischen Dreiecks erhält. Auch bei einer orthogonalen Hyperbel, von der es ja aus ähnlichen Gründen auch nur eine Form gibt, kann man die Fläche eines Segmentes so berechnen.

In dieser Vorgehensweise erkennen wir eine Vorbereitung auf die Differentialrechnung; die Ableitungen der Funktionen $V(\lambda)$ und $A(\lambda)$ nach λ bei $\lambda = 1$ werden geometrisch berechnet und verschiedene Qualitäten mathematischer Bewusstheit dieses Gebietes werden vorbereitet.

Literatur

Aarts, J.M. (2008): *Geometry*. Series: Universitext, Heidelberg: Springer.

Beukers, F. (2009): *Pi.* Zebra-reeks. Amsterdam: Epsilon uitgaven.

Edwards, C. H. (1979): *The Historical Development of the Calculus*. Heidelberg: Springer.

Führer, L. (2006): *Heuristik und Geschichte der elementaren Volumenberechnung*. mathematica didactica, 29:1.

Führer, L. (1989): *Fünf Wege zur Parabelfläche*. In: mathematik lehren 37, 35–39.

Kaenders, R.H. & Kvasz, L. (2010): *Mathematisches Bewusstsein.* In K. Lengnink & al. (Hrsg.): Mathematik verstehen - philosophische und didaktische Perspektiven. Wiesbaden: Vieweg.

Winter, H. (1994): *Mathematik entdecken.* 4. Auflage. Berlin: Vieweg.

Michael KALLWEIT, Bochum

Studienvoraussetzungen prüfen – Der StudiCheck Mathematik in NRW

Viele Studiengänge bemängeln, dass StudienanfängerInnen nicht die nötigen Vorkenntnisse mitbringen, die für einen erfolgreichen Studienstart notwendig sind. Besonders häufig werden Defizite in Mathematik beklagt. Seit August 2013 haben Studieninteressierte über das Orientierungsportal StudiFinder die Möglichkeit, ihr Vorwissen in 18 Gebieten der Schulmathematik zu überprüfen. Hierbei kann jeder Studiengang einer Hochschule in NRW individuell relevante Tests zusammenstellen sowie Rückmeldungen und Schwellenwerte festlegen.

Der StudiFinder

Der StudiFinder ist ein gemeinsames Angebot der öffentlich-rechtlichen Fachhochschulen und Universitäten des Landes Nordrhein-Westfalen sowie des hiesigen Ministeriums für Innovation, Wissenschaft und Forschung (MIWF).
An rund 50 Standorten bieten die Hochschulen über 1800 Studiengänge an. Der StudiFinder soll studieninteressierten SchülerInnen nicht nur helfen, sich in diesem breitgefächerten Angebot zurechtzufinden und tragfähige Entscheidungen für den Übergang von der Schule zur Hochschule zu treffen, sondern soll auch Anregungen für passende Studiengänge geben. Dadurch sollen den Studieninteressierten unnötige Frustrationen erspart und Fachwechsel oder gar Studienabbrüche vermieden werden.

Im StudiFinder bilden rund 80 Studienfelder die Grundlage für eine Suche nach einem passenden Studiengang. Den Studienfeldern sind alle grundständigen Studiengänge an den nordrhein-westfälischen Hochschulen mit weiteren Detailinformationen zugeordnet.

Wissen SchülerInnen noch nicht, welches Studium zu ihnen passt, helfen vier Orientierungstests, passende Studienfelder zu finden:

- „Was ich lernen möchte“ (Test zu den fachlichen Neigungen)
- „Was ich beruflich tun will“ (Test zu den beruflichen Interessen)
- „Wie ich denke und arbeite“ (Test zu persönlichen Fähigkeiten)
- „Wie ich mit anderen zusammenarbeite“ (Test zu den persönlichen Arbeitshaltungen)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 587–590). Münster: WTM-Verlag

Die StudiChecks

In einem gemeinsamen Projekt der RWTH Aachen und der Ruhr-Universität Bochum wird der StudiFinder um Wissenstests erweitert. Mit den StudiChecks können SchülerInnen überprüfen, ob ihre Schulkenntnisse für ihren Wunschstudiengang zum Studienbeginn ausreichen und in welchen Teilbereichen eventuell Nachholbedarf besteht. Für jeden StudiCheck wurden auf Grundlage der NRW-Lehrpläne (Gymnasium/Gesamtschule; obligatorische und optionale Inhalte) Wissensbereiche definiert. Anschließend wurden pro Bereich Tests mit 10 Aufgaben von FachdidaktikerInnen, wissenschaftlichen MitarbeiterInnen und LehrerInnen entwickelt. Aus diesen Tests wählt jeder Studiengang individuell die für ihn relevantesten aus und stellt so den Studieninteressierten seinen maßgeschneiderten StudiCheck zur Verfügung.

Die StudiChecks liefern somit Rückmeldung zu denjenigen Teilgebieten des Schulwissens, welche die Studiengänge individuell ausgewählt haben. Zudem wird auf passgenaue Angebote der Hochschulen zur Verbesserung der Vorkenntnisse und zur optimalen Vorbereitung auf den Studienbeginn hingewiesen. Die StudiChecks sollen punktuell Wissensdefizite aufdecken und sind nicht als Eignungsbescheinigung oder Selektionsinstrument für bestimmte Studiengänge zu verstehen.
Seit dem 1. August 2013 sind die Aufgaben zur Mathematik freigeschaltet, Aufgaben zum Arbeiten mit Texten kommen im Frühjahr 2014 hinzu. Langfristig ist auch die Einführung eines StudiChecks Physik geplant.

Der StudiCheck Mathematik

Die Aufgaben zur Mathematik sind in 35 Tests aus 18 Wissensbereichen untergliedert:

- Schreibweisen und Formalia
- Grundrechenarten
- Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
- Zahldarstellungen & Rationale Zahlen
- Logik & Mengen
- Terme & Gleichungen
- Ungleichungen & lineare Optimierung
- Lineare Gleichungssysteme
- Matrizen
- Elementare Zahlentheorie
- Geometrie
- Trigonometrie
- Vektoren & Analytische Geometrie
- Grenzwerte
- Funktionen
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Stochastik

Zu jedem Wissensbereich (Ausnahme: Schreibweisen & Formalia) wurden zwei Tests entwickelt: „gewusst & gekonnt“ und „verstanden & vertieft“. Bei Ersteren liegt der Schwerpunkt auf abstrakt-theoretischem Faktenwissen und dem Lösen von Standardaufgaben. Bei Letzteren stehen eine Überprüfung des tieferen Verständnisses der Inhalte und Transferleistungen im Vordergrund. Die Aufgaben liegen in verschiedenen Formaten vor: Single-Choice, Multiple-Choice, Zuordnungen, Drag'n'Drop, Freitexteingaben (mit Auswertung durch ein Computeralgebrasystem).

Die Aufgaben zur Mathematik werden von rund 450 Studiengängen an 25 Hochschulen (13 Fachhochschulen, 12 Universitäten) angeboten.

Anpassung an Studiengänge

Nach einer generellen Bedarfsermittlung wurde es allen Studiengängen ermöglicht, einen individuellen StudiCheck aus den 35 vorhandenen Tests zusammenzustellen. Eine Empfehlung von maximal sechs Tests wurde von

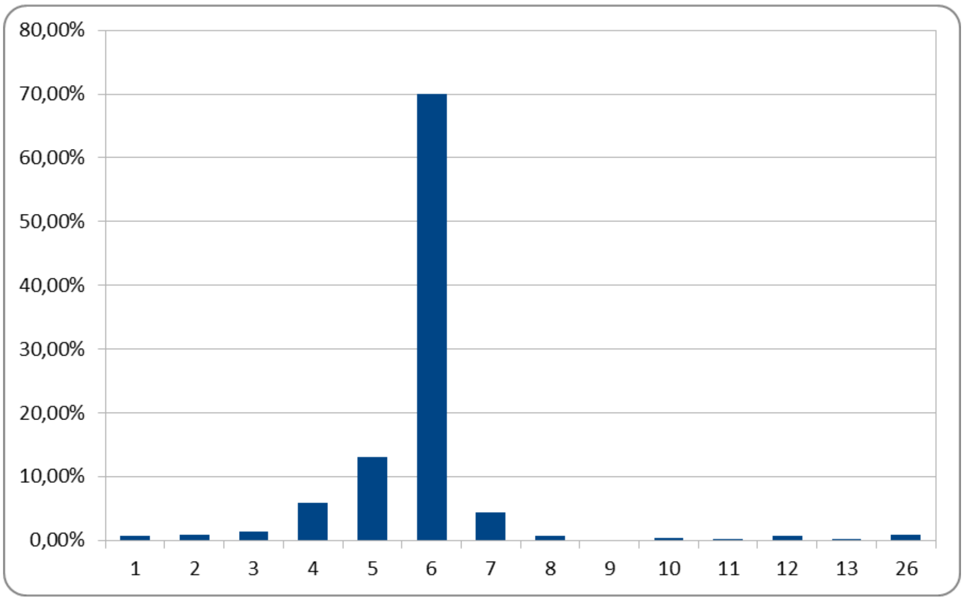


Abbildung 1: Verteilung der Anzahl der ausgewählten Subtests des Studi Checks Mathematik.

den meisten Hochschulen eingehalten, siehe Abbildung 1.

In der Verteilung der ausgewählten Subtests lässt sich eine Priorisierung auf die Themen der Mittelstufenmathematik erkennen, siehe Abbildung 2.

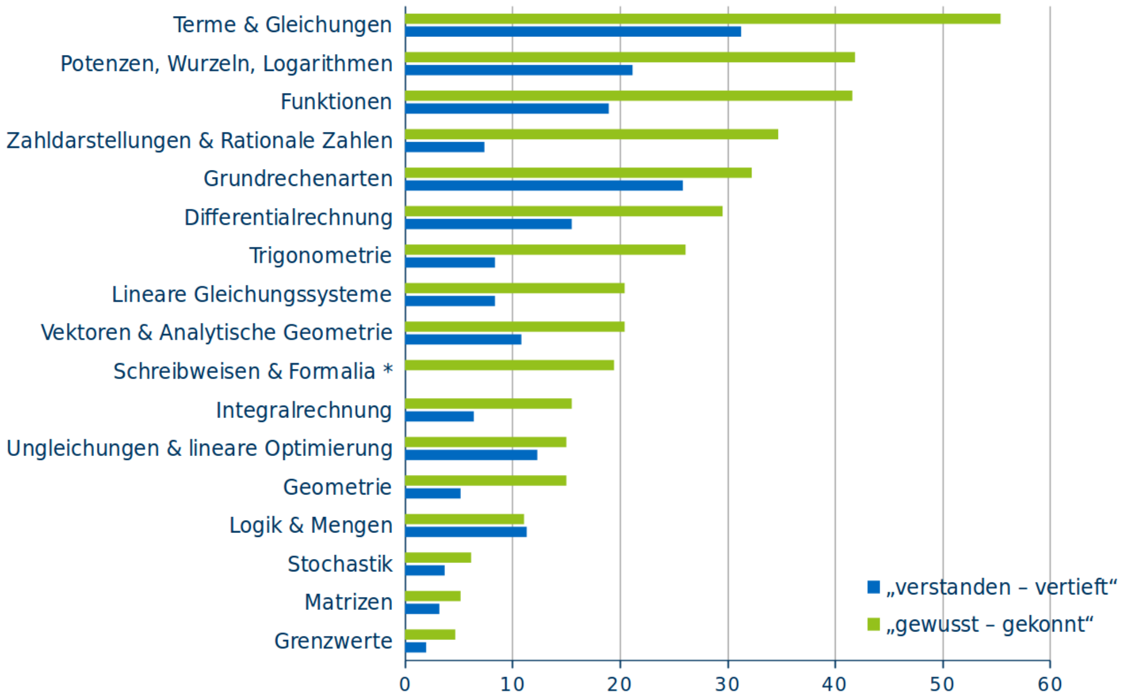


Abbildung 2: Verteilung der ausgewählten Subtests des StudiChecks Mathematik.

Für jeden gewählten Test hat ein Studiengang individuelle Schwellenwerte für die Bewertung der erbrachten Leistung festgelegt. Zusätzlich zur Ergebnisrückmeldung per Ampelfarbe (grün, gelb, rot) gibt es eine Textrückmeldung für die Studieninteressierten, die zusätzlich mit weiterführenden Links (z. B. zu Vorkursangeboten der Hochschulen) separat anpasst werden konnte.

Ausblick

Zur Zeit werden die ersten Testergebnisse der Studieninteressierten ausgewertet und für eine weitere Optimierung des StudiChecks Mathematik genauer analysiert.

Es ist geplant, dass in Anknüpfung an die Wissensbereiche des StudiChecks Mathematik E-Learning-Angebote, sogenannte StudiBrücken, zur Verfügung gestellt werden sollen, welche Studieninteressierte ergänzend zu den Angeboten der Hochschulen nutzen können, um ihr Mathematikwissen aufzufrischen.

Weitere Informationen

http://www.studifinder.de

http://studifinder.rub.de/

http://studicheck-nrw.rub.de/

Michael KALLWEIT, Birgit GRIESE, Bochum

Serious Gaming an der Hochschule - Mit Avataren zum Studienerfolg?

Vielen Studierenden bereitet es Probleme, sich mit den Inhalten ihres Studiums kontinuierlich und organisiert zu beschäftigen; oftmals erscheinen die Ablenkungen der realen oder virtuellen Welt verlockender. Ein möglicher Ausweg könnte sein, in der letzteren Anreize zu schaffen, die digitale Anerkennung und Belohnung spielerisch mit Aufgaben zum Studium und kurzen Befragungen zur Selbstreflexion kombinieren. Das Projekt MatheMücke setzt diese erfolgversprechende Idee um.

Das Projekt MP²-Mathe/Plus/Praxis

Die Ruhr-Universität Bochum verfolgt mit dem Projekt MP²-Mathe/Plus/Praxis das ehrgeizige Ziel, eine Verringerung der Studienabbruchquote in der Studieneingangsphase von ingenieurwissenschaftlichen Fächern zu erreichen, indem speziell für das Fach Mathematik Hilfestellung geboten wird. Es wurden Maßnahmen konzipiert, erprobt und weiterentwickelt, deren Erfolge für sich sprechen, siehe Griese, Roesken-Winter, Kallweit und Glasmachers (2013). Das Teilprojekt MP²-MathePlus richtet sich explizit an Studierende des ersten Semesters. Fehlende Selbstorganisationsfähigkeit zu Studienbeginn wird hier als einer der Schlüsselfaktoren identifiziert. Nach erfolgreicher Bewerbung für das Projekt werden den TeilnehmerInnen an konkreten Beispielen aus ihrer Mathematikveranstaltung Lernmethoden und Arbeitstechniken vermittelt. So werden Grundlagen für einen erfolgreichen weiteren Studienverlauf geschaffen, die auch auf andere Fächer wirken.

Die Ideen von MP²-MathePlus wurden bereits von anderen Hochschulen aufgegriffen und dort in eigenen Maßnahmen umgesetzt. Dieser Transfer wird durch die Aufnahme von MP²-Mathe/Plus/Praxis in das Kolleg Lehre^n des Bündnisses für Hochschullehre weiter vorangetrieben, siehe Glasmachers, Griese und Kallweit (2014).

Lerntagebücher

Eine der getesteten Maßnahmen von MP²-MathePlus ist die Führung eines Lerntagebuchs, in dem die TeilnehmerInnen des Projekts ihre Lernzeit, Arbeitsweisen und Befindlichkeiten dokumentieren sollen, siehe Griese und Kallweit (2014). Die geringe Akzeptanz dieses Instruments führte zu einer Reduzierung von fünf Seiten täglich zu fünf Seiten wöchentlich im nächsten Projektdurchlauf. Dennoch wurde auch diese Version (*LearningLog*)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 591–594). Münster: WTM-Verlag

nicht wie gewünscht angenommen, so dass im Weiteren ein minimalistischer Ansatz verfolgt wurde: Zur Selbsteinschätzung dienten fünf Fragen auf einer mobilfähigen Webseite, die wahlweise täglich oder wöchentlich beantwortet werden konnten. Hier wurde zudem versucht, im Sinne des *Surveytainment* eine einfache Bedienung und ansprechende optische Gestaltung zu erreichen. Hinzu kamen erste spielerische Elemente und Statistiken z. B. über den eigenen Motivationsverlauf, siehe Abbildung 1.

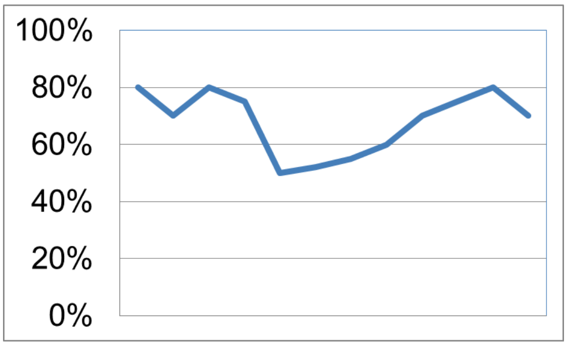


Abbildung 1: Statistik über den eigenen Motivationsverlauf im LearninLog online.

Aber auch damit wurden die geplanten Ziele nicht erreicht, so dass aktuell der Weg weiter verfolgt wird, weg von der Datenabfrage hin zu einer interaktiven Form mit direktem Feedback zu gelangen. Diese Idee erhielt den Namen MatheMücke, um sie als niedliches Instrument / Insekt zu charakterisieren, das seine Umgebung mit Mathematik piesackt.

MatheMücke

Die MatheMücke ist eine mobile Webseite, in der sich die TeilnehmerInnen mit eigenen Daten anmelden können. Sie gelangen zunächst in eine Übersicht, in der die Bereiche der Mücke sichtbar und erreichbar sind (Abbildung 2). Der Avatar-Bereich zeigt in graphischer Form Informationen zum aktuellen Status des Teilnehmers an. Die „Aufgaben zum Abhaken“ enthalten Hinweise, wichtige Texte zum Durchlesen, Vereinbarungen zum Akzeptieren, kleine Umfragen zum Ausfüllen und konkrete Arbeitsanweisungen (bezogen auf das jeweilige Projekt-Wochenthema) fürs „Real-Life“. Unter dem Punkt „Beute zum Bunkern“ findet man ausgewähltes Lernmaterial und Links, hilfreiche Tipps, humoristische Beiträge sowie Addons für die Gestaltung des Avatar-Bereichs.

Um eine nachhaltige Verbesserung des Arbeitsverhaltens der Studierenden zu erreichen, versucht die MatheMücke Einfluss auf die Selbstregulationsprozesse zu nehmen. Dazu wird verstärkt auf direktes automatisches Feedback gesetzt. Getätigte Eingaben führen unmittelbar zu sichtbaren Reaktionen und Rückmeldungen. Die spielerische Aufmachung soll die Motivation zum Mitmachen, aber auch fürs Studium allgemein, erhalten bzw. steigern. Gleichzeitig soll aber auch, wie bei dem Konzept der Lerntagebücher, die Datengewinnung fortgeführt werden. Dies geschieht durch kleine Zwischenumfragen, z. B. zum eigenen Lerntyp oder genutzten Lernorten.

Abbildung 2: Hauptseite der MatheMücke nach Anmeldung

Um systematisch Anreize zu schaffen, regelmäßig und motiviert mit der MatheMücke zu interagieren, werden folgende *Gamification*-Ansätze verfolgt, wie sie auch DeBurr (2013) vorschlägt:

- Spielfigur (teilweise selbstbestimmtes Aussehen)
- Aufgaben, allein oder in einer Gruppe (*Quests*)
- Angezeigter Fortschritt
- Aufstieg in höhere Level
- Belohnungen
- Auszeichnungen (*Badges*)
- Vergleich mit anderen Spielern
- Bedingte und begrenzte Verfügbarkeit

Wichtig bei der Entwicklung war vor allem das Ansprechen einer breiten Zielgruppe. Auf technischer Seite bedeutete dies eine selbsterklärende Bedienung und moderne Optik, inhaltlich wurde auf eine ausgewogene Mischung der Elemente geachtet und mit durchgängig lockerer Wortwahl präsentiert (z. B. „*Hand aufs Herz. Wann hast du das letzte Mal für Mathe ge-*

Abbildung 3: Avatar-Addons je nach angegebenem Lerntyp, von links nach rechts: ohne Spezifikation, visuell, auditiv, haptisch-motorisch, kommunikativ.

lernt? Also so richtig. Mit Hinsetzen und Lesen und so.“). Ein charakteristisches Merkmal ist die Verbindung von Umfrage, Spielelementen und Feedback. So wird beispielsweise die Beantwortung der Frage nach der Selbsteinschätzung des eigenen Lerntyps (visuell, auditiv, haptisch-motorisch, kommunikativ) mit Modifikationen des Avatars belohnt (Abbildung 3).

Die Angabe des favorisierten Lernortes, beispielweise „Hauptsächlich unterwegs“ würde analog eine automatische Aktualisierung des Avatar-Seitenbilds (Comicbild der U35, U-Bahn-Linie zur Ruhr-Universität Bochum) folgen, und als konkretes Feedback ein Hinweis zur Gestaltung einer sinnvollen Lernumgebung Auch statistische Übersichten sind Teil der Überlegungen, z. B. kann rückgemeldet werden, wie sich die eigene Lernzeit in zeitlicher Gegenüberstellung früherer Wochen, im aktuellen Vergleich mit Kommilitonen oder in Konfrontation mit den Erwartungen des Dozenten verhält.

Im Wintersemester 2013/2014 wurde die MatheMücke in einer Vorversion zum ersten Mal eingesetzt. Erste Auswertungen belegen die Akzeptanz der Plattform; es beteiligten 78 Studierende. In weiteren Analysen werden z.B. mögliche Zusammenhänge zwischen dokumentierter Lernzeit und Klausurergebnis genauer untersucht.

Literatur

DeBurr, D. (2013). *Build gamified websites with PHP and jQuery: Engage, empower, and educate with gamified websites*. Birmingham, Mumbai: Packt Publishing.

Glasmachers, E., Griese, B., Kallweit, M. (2014). Transfer von Studienreformprojekten – Kolleg 2013 des Netzwerks Lehre^n. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM-Verlag.

Griese, B., Kallweit, M. (2014). Lerntagebücher in der Studieneingangsphase – eine Bilanz. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM-Verlag.

Griese, B., Roesken-Winter, B., Kallweit, M., & Glasmachers, E. (2013). Redesigning interventions for engineering students: Learning from practice. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 5, S. 65). Kiel: PME.

Nadja KARPINSKI-SIEBOLD, Halle (Saale)

Algebraisches Denken von Grundschulkindern

Mit diesem Beitrag soll ein knapper Einblick in ein aktuell laufendes Forschungsprojekt ermöglicht werden. Ausgehend von den international vielfach diskutierten Early-Algebra-Ansätzen, die eine Verbindung und gegenseitige Stützung arithmetischer und algebraischer Inhalte im Mathematikunterricht anstreben, geht es um die Erkundung algebraischer Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im Grundschulalter (Fritzlar & Karpinski-Siebold, 2012).

Konkret sollen folgende zwei *Forschungsfragen* Beantwortung finden:

- *Wie kann algebraisches Denken im Grundschulalter beschrieben werden?*
- *Welche entsprechenden Fähigkeiten bezüglich des algebraischen Denkens sind im 4. Schuljahr ohne vorherige spezifische Programme zu erfassen?*

Zum algebraischen Denken

Ausgehend von der weltweit geführten Diskussion zum algebraischen Denken und bezugnehmend zur o. g. ersten Frage wird das Konstrukt algebraisches Denken von mir mit folgenden sechs Komponenten umrissen:

Umgehen mit Operationen als Objekten und ihren Umkehrungen; Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen; Verallgemeinern; Umgehen mit Unbekannten; Umgehen mit Veränderungen; Nutzen von (symbolischen) Repräsentationen

Diese Komponenten sind nicht auf Algebra beschränkt, sie erfahren in algebraischer Konstellationen allerdings eine spezifische Ausprägung. Mit ihnen erscheint algebraisches Denken als ein sehr reichhaltiges spezifisches Konstrukt, wobei nicht alle Komponenten trennscharf voneinander sind (ausführlich dazu Fritzlar & Karpinski-Siebold, 2011).

Die empirische Hauptstudie

Nach einer im Frühjahr 2011 durchgeführten Vorstudie mit 44 Schülerinnen und Schülern im Raum Halle (Saale) und Umgebung, schloss sich im Mai bis Juli 2013 die Hauptstudie zu diesem Promotionsprojekt ebenfalls in Halle (Saale) und Umgebung und in Magdeburg und Umgebung mit insgesamt 74 jeweils ca. 45-minütigen diagnostischen Einzelinterviews an. An dieser Studie nahmen zum einen 20 mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler, jeweils 10 aus den o.g. Regionen teil (Schülergruppe A), die aus den 25 Besten des Aufnahmetests zweier in Sachsen-Anhalt befindli-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 595–598). Münster: WTM-Verlag

cher Spezialgymnasien ausgewählt wurden. Zum anderen wurden aus den Schulklassen dieser Teilnehmer jeweils drei weitere Schülerinnen und Schüler in die Untersuchung einbezogen, die sehr gute bis gute, durchschnittliche und unterdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik erreicht haben und damit das Leistungsspektrum repräsentieren sollten (Schülergruppen B, C, D). Die Auswahl der Schülerinnen und Schüler nahm die Mathematiklehrerin nach von mir ausgearbeiteten konkreten Vorgaben vor. Man kann davon ausgehen, dass durch diese Konstruktion der Untersuchungsgruppe ein Ausblick auf einen evtl. Zusammenhang zwischen den Konstrukten „mathematische Begabung“ und „algebraisches Denken“ möglich ist. Die Untersuchungsgruppe löste neun Aufgaben passend zu den Komponenten algebraischen Denkens.

Ausgewählte Aufgaben am Beispiel der Komponente „Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen“

Zu dieser Komponente gab es drei Aufgaben, von denen eine im Folgenden vorgestellt werden soll.

Herstellen von Beziehungen zwischen Mengen

Marie und Alec sammeln Fußballbilder, von denen es kleine und große Packungen gibt.
Marie hat eine kleine Packung, zwei große Packungen und 5 einzelne Bilder. Alec hat eine kleine Packung, eine große Packung und 9 einzelne Bilder.
Wie viele Bilder sind in einer großen Packung, wenn beide Kinder insgesamt gleich viele Bilder haben?

Abb. 3 Aufgabe „Panini“

Auswertung der Ergebnisse

Die Auswertung der Interviews und der Arbeitsblätter erfolgt aufgabenspezifisch. Dabei wurde aus den beobachtbaren Lösungsstrategien der Vorstudie von mir für jede Aufgabe ein Kategoriensystem entwickelt, welches in der Auswertung der Daten der Hauptstudie evaluiert wurde.

Schritt	Vorgehen
1	Sichtung der Videoaufzeichnungen der Vorstudie
2	Konstruktion von Kategorien ähnlicher Vorgehensweisen (induktiv)
3	Beschreiben konkreter Beispiele zu den Kategorien
4	Zuordnung der Zweifelsfälle durch das Aufstellen von Regeln
5	Sichtung der Videoaufzeichnungen der Hauptstudie
6	Ausdifferenzierung der Kategorien der Vorstudie
7	Evaluation des Kategoriensystems (Reduzierung von Kategorien)
8	Zuordnung der Zweifelsfälle
9	Quantifizierung

Tabelle1 Herausarbeitung des Kategoriensystems

Aus den beobachtbaren Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler der „Panini-Aufgabe“ wurde von mir folgendes Kategoriensystem entwickelt.

Ziffer der Kategorie	Erläuterung
1	Ein Herstellen von Beziehungen ist nicht erkennbar.
2	Aus der Alltagserfahrung werden 5 Sammelkarten für die große Packung angenommen.
3	Der Unterschied zwischen beider Mengen einzelner Sammelkarten wird erkannt, aber nicht erkennbar genutzt.
4	Beziehungen werden genutzt, um systematisch zu probieren.
5	Beziehungen zwischen den Teilmengen werden erkannt und genutzt.

Tabelle 2 Kategoriensystem Panini

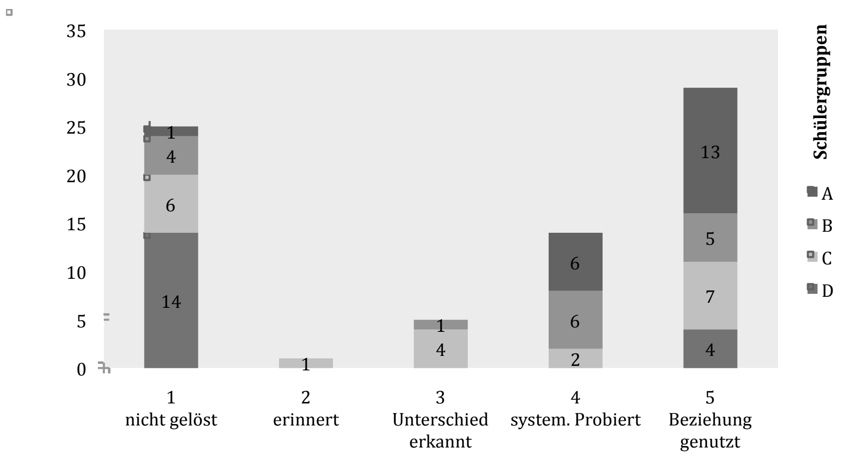


Diagramm 1 Auswertung der Vorgehensweisen der gesamten Schülerinnen und Schüler

In der Auswertung zeigt sich, dass 48 von 74 Schülerinnen und Schülern Beziehungen zwischen den Mengen herstellen konnten (Kategorien 3, 4 und 5). Davon nutzten 14 Schülerinnen und Schüler die Beziehungen, um die Lösung durch systematisches Probieren zu ermitteln, fünf der Probandinnen und Probanden erkannten den Unterschied von 4 kleinen Sammelkarten, konnten aber trotz Nachfrage nicht sagen, wie viel Bilder die große Packung enthält (Kategorie 3). Ein Herstellen von Beziehungen war bei 26 Schülerinnen und Schülern nicht zu erkennen (Kategorien 1 und 2).

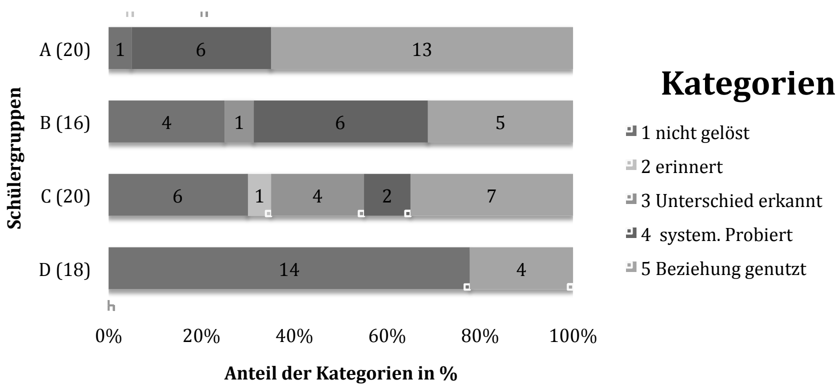


Diagramm 2 Auswertung der Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler ihres des Leistungsspektrums

Das Diagramm 2 zeigt, dass Fähigkeiten bezüglich der Komponente „Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen“, hier speziell Beziehungen zwischen Mengen, in jeder Schülergruppe vorhanden sind. Erwartungsgemäß zeigten die Schülerinnen und Schüler der Schülergruppe A am häufigsten ein Herstellen von Beziehungen zwischen Mengen (95%). Deutlich wird der Unterschied im Vergleich zur Schülergruppe B. Diese Befunde könnten auf ein Begabungsmerkmal deuten. Diesbezüglich scheinen weitere Forschungsbemühungen notwendig. Für die weitere Auswertung der Hauptstudie wäre es interessant auch der Frage nachzugehen, ob *typische Schülerprofile über die verschiedenen Komponenten algebraischen Denkens* zu finden sind.

Literatur

Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2011). Algebraic thinking of primary students. In B. Ubuz (Ed.), Proceedings oft he 35th Conference oft he International Group fort he Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 345-352). Ankara: PME.

Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2012). Algebraisches Denken und mathematische Begabung im Grundschulalter. In Ludwig, M. & Kleine, M. (Eds.), Beiträge zum Mathematikunterricht (pp. 261-264). Münster: WTM-Verlag.

Michael KATZENBACH, Berlin, Ursula BICKER, Bad Kreuznach, Julia CRAMER, Nikola LEUFER, Christine KNIPPING, Bremen

Vielfalt wahrnehmen durch diagnostische Interviews 1 - Interview und neuseeländisches Lernentwicklungsmodell Numeracy

„Significant changes in teacher attitudes and beliefs happen when they use new practices effectively and see changes in student learning.” (Guskey, 1986, S. 7). Dieser Satz steht für die Grundidee des Numeracy Professional Development Projects (NDP), mit dem Neuseeland auf das unbefriedigende Abschneiden bei der TIMS-Studie 1995 reagiert hat. Konzeptelemente sowie ins Deutsche übertragene Projektmaterialien werden – u. a. von der Autorengruppe – in deutschen Schulen und in der Lehrerbildung erprobt.

Dieser Beitrag gibt Informationen zu zentralen Elementen von NDP und berichtet über erste Erfahrungen aus der Arbeit mit Fachberatungen in Rheinland-Pfalz. Im Beitrag „Vielfalt wahrnehmen … 2“ wird ein Kooperationsprojekt aus Bremen (Schule, Landesinstitut, Universität) vorgestellt.

1. Die Strategie „Policy to Practice“

Nach Vorarbeiten einer Kommission aus Politik und Mathematikdidaktik gründete die neuseeländische Regierung 1999 einen „Numeracy Think Tank” mit dem Auftrag „to develop a New Zealand Number Framework […] and an associated diagnostic tool […] that outlined for teachers key stages of number understanding against which they could chart the achievement of students in their class“ (Higgins, 2003). Mit der Entwicklung eines Lernentwicklungsmodells (LEM) und eines darauf aufbauenden diagnostischen Interviews sollten Grundlagen für ein Fortbildungsvorhaben geschaffen werden, das Guskeys Kriterium (s. o.) realisieren kann.

Die Aufmerksamkeit richtete sich zunächst auf das in Australien erfolgreiche Projekt „Count me in Too“ (Department of Education and Training, NSW, 1998) für die Jahrgänge 1 - 3, das in Deutschland in einer adaptierten Übersetzung als ElementarMathematischesBasisInterview (EMBI) bekannt wurde (Peter-Koop et al., 2007). Nach erfolgreicher Pilotierung von „Count me in Too“ in Neuseeland wurde ein neuseeländisches Lernentwicklungsmodell für die Jahrgänge 1 – 8 entwickelt und erprobt.

LEM und Interview wurden zu zentralen Instrumenten des NDP. Um Nachhaltigkeit erreichen zu können, wurden Maßnahmen u. a. zum Curriculum, zur Schulinspektion und zur Lehrerausbildung beschlossen. NDP wurde in die Regierungsstrategie „Formative Beurteilung“ aufgenommen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 599–602). Münster: WTM-Verlag

2. Lernentwicklungsmodell und diagnostisches Interview

Das LEM im Bereich „Zahl“ umfasst acht Niveaus, die global und spezifisch für Teilbereiche (Strategien in den drei Bereichen Addition & Subtraktion, Multiplikation & Division, Verhältnisse sowie Verständnis des Stellenwertsystems und Grundwissen) beschrieben werden. Zum Grundwissen gehören z. B. Rückwärtszählen oder das Benennen von vorgelegten Bruchzahlen. Das LEM unterstützt Lehrkräfte in der Feststellung, was ein Kind bereits *kann* – und was es als nächstes lernen könnte. Indikatoren zu den Strategiebereichen des Modells beschreiben hierzu Strategietypen, die ein Kind auf den einzelnen Niveaus zur Bearbeitung von Aufgaben nutzt. Die folgenden Indikatoren für die Niveaus 2-3 und 8 zeigen z. B. für das spezifische LEM zu multiplikativen Strategien das Spektrum auch für das diagnostische Interview auf (Ministry of Education 2008, eig. Übers.):

2-3 **Zählen beginnend mit 1:** Das Kind löst Multiplikationsaufgaben durch das Zählen der Gegenstände.

8 **Fortgeschrittene proportionale Rechenstrategien:** Das Kind ist in der Lage, mindestens zwei verschiedene fortgeschrittene Rechenstrategien (im Kopf) zu nutzen, um Aufgaben zur Multiplikation und zur Division mit Dezimalbrüchen und Brüchen mit einfachen (verwandten) Nennern zu lösen.

Das adaptive diagnostische Interview startet mit in der Schwierigkeit aufsteigenden Fragen zu Strategien beim Zählen und bei der Addition. In Abhängigkeit von den hier verwendeten Strategien wird für die folgenden Interviewbereiche eine von drei unterschiedlich schwierigen Formen A, B, und C ausgewählt. Ein Interviewleitfaden enthält Abbruchkriterien für Bereiche des Interviews auch innerhalb der drei Formen, Verzweigungsregeln und Hinweise zur Einstufung im Lernentwicklungsmodell. In jedem Strategiebereich wird das Interview an der vermuteten Leistungsgrenze abgebrochen, um Misserfolgserlebnisse der Lernenden zu vermeiden.

3. Fortbildungszyklus

Die fortbildungsdidaktische Idee im NDP ist es, Lehrkräfte zu Beginn eines achtmonatigen Fortbildungszyklus die Heterogenität ihrer Klasse aus einer neuen Perspektive erfahren zu lassen. Die Durchführung des diagnostischen Interviews mit allen Kindern ihrer Klasse führt in vielen Fällen zu einer individuellen Konfrontation mit den eigenen Haltungen und der bisherigen Praxis. So entsteht die Motivation, Unterricht so umzugestalten, dass alle Kinder mehr Lernchancen erhalten. Aus den wahrgenommenen Lernbedürfnissen der Kinder ergeben sich so Lernanlässe für die Lehrkräfte. Hierfür stehen im Projekt Fortbildungs- und Unterrichtsmaterialien für alle Niveaustufen zur Verfügung. Interviewbeispiele zu den acht Niveaus aller Strategiebereiche auf öffentlichen Seiten der Homepage des Projekts illustrieren die jeweiligen Anforderungen.

Zu Beginn des Fortbildungszyklus (Abb. 1) erfassen die Lehrkräfte mit dem Interview auch die Ausgangslage ihrer Lernenden. Das abschließende, erneute Interview mit allen Kindern der eigenen Klasse lässt Lehrkräfte die individuelle Lernentwicklung im Bereich Numeracy und damit - im Sinne Guskeys (s. o.) - den Erfolg ihrer eigenen Bemühungen während der Fortbildung erfahren.

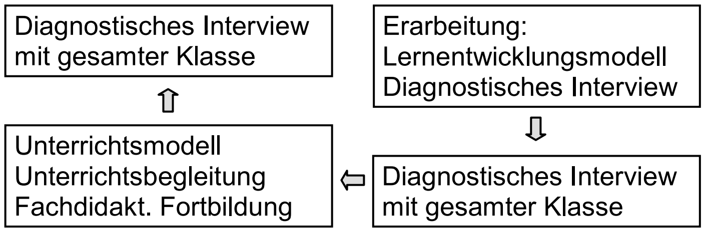


Abb. 1: Elemente des Fortbildungszyklus

4. Ergebnisse

Eine umfangreiche Begleitforschung liefert jährlich Daten zur Steuerung des NDP. 2004 wurde eine Studie mit TIMSS-Items aus allen Bereichen des Curriculums durchgeführt. In Numeracy, aber auch in anderen Bereichen, die nicht Gegenstand der Fortbildung waren, schnitten die Numeracy-Schülerinnen und Schüler der Jahrgänge 4 und 5 jeweils signifikant besser ab als die nationale TIMSS-Stichprobe (Thomas & Tagg, 2004). Andere Studien zeigten positive Veränderungen bei Kindern in ihren Einstellungen zur Mathematik und bei der Berufszufriedenheit von Lehrkräften. Bis Anfang 2014 haben mehr als 95 % der Schulen bis Jahrgang 8 und mehr als 80 % aller Maori-Schulen an der Fortbildungsmaßnahme teilgenommen.

5. Erfahrungen in Rheinland-Pfalz

Im Schuljahr 2012/13 wurden das Numeracy-Konzept und die Materialien von 20 Beraterinnen und Beratern für Unterrichtsentwicklung Mathematik in Rheinland-Pfalz erprobt (Bicker, 2013) und Konzepte für Fortbildung und Beratung entwickelt. Basis war dabei das Teilinterview zur Multiplikation & Division und das zugehörige spezifische LEM. Zwei Kernprobleme bestimmten die Beratungsarbeit in RP: Wie kann die Durchführung des Interviews im Schulalltag unter sehr heterogenen Rahmenbedingungen gelingen? Wie kann aufbauend auf den Ergebnissen des Interviews ein niveaugestufter Unterricht oder Förderkurs gestaltet werden?

Derzeit werden von den Beratungskräften verschiedene Konzepte entwickelt und erprobt: etwa produktives gemeinsames Lernen von Kindern auf verschiedenen Lernniveaus oder ein Förderkurs, in dem Kleingruppen gemeinsam niveaugestuftes Übungsmaterial bearbeiten oder spielerisch Wissen festigen, während die Lehrkraft die Zeit für individuelle Förderarbeit mit einzelnen Kindern oder sehr kleinen Gruppen nutzt.

Seit Mai 2013 haben mehr als 200 rheinland-pfälzische Lehrkräfte das Numeracy-Konzept kennengelernt und Interviews durchgeführt. Die anfangs erwarteten Vorbehalte wegen des Zeitaufwandes für ein Interview haben sich nicht bestätigt, vielmehr konnten die Lehrkräfte schnell durch die über die Diagnose hinausgehenden positiven Zusatzeffekte überzeugt werden, ein Interview zu erproben. Dieser Mehrwert des Interviews liegt vor allem in der Verbesserung der Schüler-Lehrer-Beziehung, aber auch in der Ermutigung und Bestärkung von insbesondere schwachen Lernenden. Zahlreiche Lehrkräfte, die das Interview durchgeführt haben, berichten, dass sie im Unterricht stärker auf verschiedene Lösungsstrategien achten, alternative Lösungswege wahrnehmen und sensibler mit Fehlern umgehen.

„Ich glaube, ich habe oft an den Schülern vorbei unterrichtet“, erzählt eine Lehrerin einer Realschule plus. Dass im Interview so deutlich sichtbar wird, dass einige Kinder von der Lehrkraft erwartete Lernvoraussetzungen nur teilweise oder gar nicht erfüllen, ist für die Lehrkräfte zunächst oft ein Schock, aus dem eine starke Bereitschaft erwächst, im Unterricht eine gute Passung zu den Lernvoraussetzungen der Lernenden zu erreichen. Einzelne Lehrkräfte haben ihre Unterrichtsplanung so abgeändert, dass sie nach Absprache mit der Schulleitung zunächst wesentliche Grundvorstellungen früherer Klassenstufen aufarbeiten, bevor sie lehrplangemäß weiterarbeiten. So schaffen sie für alle eine stabilere Basis für einen Lernzuwachs. „Mir sind durch das Interview richtig die Augen geöffnet worden!“

Literatur

Auf der Seite **http://www.nzmaths.co.nz/** des neuseeländischen Bildungsministeriums sind die Projektmaterialien und Berichte zur Begleitforschung veröffentlicht.

Bicker, U. (2013). Verstehen, wie Schüler denken. *Pädagogik – Leben, 5*, 14 - 16.

Department of Education and Training, (1998). *Count Me In Too: Learning framework in number.* New South Wales, Department of Education and Training.

Guskey, T. R. (1986). Staff development and the process of teacher change. *Educational Researcher, 15(5) ,* 5–12.

Higgins, J.; Parsons, R.; Hyland, M. (2003). The Numeracy Development Project: Policy to Practice. *Victoria University Review 2003,* 157–175.

Ministry of Education (2008). *Numeracy Professional Development Projects. Book 2. The Diagnostic Interview*. Wellington, New Zealand.

Peter-Koop, A.; Wollring, B.; Spindeler, B.; Grüßing, M. (2007). *ElementarMathematischesBasisInterview. [Handbuch].* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Thomas, G.; Tagg, A. (2004): The Impact of the Numeracy Development Project on Mathematics Achievement. *Findings From the New Zealand Numeracy Development Project 2004,* Wellington: Ministry of Education, 35 – 46

Michael KATZENBACH, Berlin, Ursula BICKER, Bad Kreuznach, Julia CRAMER, Nikola LEUFER, Christine KNIPPING, Bremen

Vielfalt wahrnehmen durch diagnostische Interviews 2 – Erfahrungen aus der Arbeit in Schule und Beratung

Zentrales Anliegen des neuseeländischen Numeracy Development Project (NDP) ist es, Schülerleistungen durch die Professionalisierung von Lehrkräften zu verbessern. Professionalität wird dabei sowohl in fachlicher als auch in diagnostischer Hinsicht verstanden: *„The effective teacher of mathematics and statistics has a thorough and deep understanding of the subject matter to be taught, how students are likely to learn it, and the difficulties and misunderstandings they are likely to encounter"* (Ministry of Education 2008a, S. i). In einem Kooperationsprojekt der Gesamtschule Bremen-Mitte (GSM), der Universität Bremen und des Landesinstituts für Schule in Bremen sind das diagnostische Interview und einige Lerneinheiten des NDP überarbeitet und durch Studierende in der Lehramtsausbildung erprobt worden. Erfahrungen dieses Projekts werden im Folgenden vorgestellt. Mit dem Fokus auf der Frage: „Was passiert eigentlich *nach* den Interviews?" schließt dieser Beitrag direkt an den Beitrag „Vielfalt wahrnehmen durch diagnostische Interviews 1" von Katzenbach et al. (in diesem Band) an.

1. Kooperation: Interessen von Schule, Landesinstitut und Universität

Im o.g. Kooperationsprojekt kamen unterschiedliche Interessen zusammen, die sich in besonderer Weise ergänzend realisieren ließen:

Die **Schule** hatte das Ziel, diagnostische Interviews mit dem gesamten 5. Jahrgang zur Erfassung der Leistungsstände in unterschiedlichen Bereichen des Grundschulstoffes durchzuführen. Auf Grundlage dieser Lernausgangslage sollte der weitere Unterricht angepasst und aussagekräftige Empfehlungen zur Weiterarbeit für einen Teil der Schülerinnen und Schüler erstellt werden können. Die **Universität** wollte in einem Theorie-Praxis-Seminar Studierende des Lehramts an Gymnasien und Oberschulen an verschiedene diagnostische Verfahren heranführen. In diesem Rahmen sollten sich die Studierenden mit einem Diagnose- und Förderansatz vertieft auseinandersetzen und praktische Erfahrungen damit sammeln. Da sie im Rahmen ihrer Ausbildung mit der Grundschulmathematik wenige Berührungspunkte haben würden, bot ein solches Seminar auch die Gelegenheit, an dieser systematischen Lücke zu arbeiten. Das **Landesinstitut für Schule** hatte das Interesse, den Diagnose- und Förderansatz des NDP reflektiert und begleitet zu erproben, um eine Rückmeldung einerseits zur stofflichen Passung,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 603–606). Münster: WTM-Verlag

zu inhaltlichen und didaktischen Überarbeitungsbedarfen des Materials sowie andererseits zur Realisierbarkeit eines entsprechenden Diagnoseszenarios zu erhalten.

2. Das Seminarkonzept

Das vor diesem Hintergrund konzipierte Seminar an der Universität Bremen bestand aus einem Theorie- und einem Praxisteil. Im Rahmen des Theorieteils wurden unterschiedliche Diagnoseansätze und –methoden vorgestellt und diskutiert. Im Praxisteil setzte sich eine Gruppe von 15 Studierenden mit dem Ansatz des NDP auseinander. Sie führten zudem diagnostische Interviews und Lerneinheiten mit jeweils zugeordneten Schülerinnen und Schülern der GSM durch. Neben der Einarbeitung in das diagnostische Interview musste das Seminar auch die Einarbeitung der Studierenden in zentrale Themengebiete der Grundschularithmetik sowie die Möglichkeit zur und Unterstützung bei der Aufarbeitung von Unterrichtsmaterialien zum Einsatz in Kleingruppen von Schülerinnen und Schülern leisten. Die Studierenden setzten sich mit fachdidaktischen Erkenntnissen zu Lernentwicklungen, Grundvorstellungen und typischen Fehlermustern von Lernenden im Bereich der Grundschularithmetik auseinander, um vor diesem Hintergrund den Aufbau der diagnostischen Interviews und das den Numeracy-Materialien zugrunde liegende Lernentwicklungsmodell zu verstehen.

3. Das Lernentwicklungsmodell: Gelingensbedingung für einen konsistenten Diagnose- und Förderansatz

Die theoretische Grundlage sowohl des Interviews als auch der Lehr- bzw. Lernmaterialien im Numeracy-Projekt bildet ein Lernentwicklungsmodell (LEM) zum Bereich „Zahl" („Number"), auf das im vorangegangenen Beitrag näher eingegangen wird. Neben der globalen Beschreibung des LEM wird im NDP auch jeder Inhaltsbereich (Addition & Subtraktion, Multiplikation & Division, Proportionen & Verhältnisse) ausdifferenziert beschrieben. Die Materialien beruhen wesentlich auf Ideen und fachdidaktischen Vorarbeiten u.a. von Steffe & Cobb (1983), Steffe et al. (1988) und von Glasersfeld (1982).

Im Kooperationsprojekt zeigte sich in vielfacher Hinsicht die zentrale Bedeutung des globalen LEM bzw. der bereichsspezifischen LEM, sowohl für die Deutungen der Interviewergebnisse als auch für die Folgerungen zur anschließenden Weiterarbeit. Durch geeignete Fragestellungen im diagnostischen Interview, die an den einzelnen Niveaus des LEM orientiert sind, ließen sich die Lernenden nachvollziehbar auf die jeweiligen Niveaus einordnen. Anders als standardisierte Paper-Pencil-Tests, die als Ergebnisse lediglich Prozentwerte, Perzentile oder Einstufungen entlang verdeckter

Kompetenzmodelle liefern, konnte das diagnostische Interview auch für die noch relativ unerfahrenen Studierenden substanzielle und nachvollziehbare Aussagen zum Lernstand der Schülerinnen und Schüler liefern. Die Indikatoren im LEM konnten sowohl als Ergebnisse des Interviews gedeutet werden als auch als relevante beobachtungsleitende Dimensionen in der weiteren Förderung genutzt werden (Ministry of Education 2008a, vgl. auch Katzenbach et al. 2014).

Entsprechend der angenommen Lernentwicklung des LEM liefern die Interviewergebnisse nun konkrete Hinweise zur Weiterarbeit mit den Schülerinnen und Schülern. Die ausgearbeiteten Lerneinheiten des Numeracy-Materials helfen der Lehrperson dabei, die entsprechende Entwicklung eines Kindes von einer Stufe zur nächsten zu unterstützen: Sie setzen genau an den bereits vorhandenen Kenntnissen der Schülerinnen und Schüler an und initiieren eine Weiterentwicklung entlang des angenommenen Modells. Dabei gehen die Lerneinheiten zu Strategien stets in derselben Weise vor: Sie beginnen damit, Vorstellungen zu neuen Strategien an überschaubaren Zahlen und anhand von Materialeinsatz aufzubauen, um sich dann unterstützt durch spezielle Aufgabenformate vorstellungsorientiert vom Material zu lösen. Schließlich wird das Nutzen von Strategien auch mit größeren Zahlen angebahnt, indem Zahleigenschaften genutzt werden. Der Lehrperson, die die entsprechenden Aktivitäten auswählt und idealerweise in einer kleinen Gruppe moderieren soll, kommt dabei eine zentrale Rolle zu.

Für das Kooperationsprojekt wurden ausschließlich Lerneinheiten zum Thema Multiplikation & Division verwendet (Ministry of Education 2008b).

4. Auswirkungen: Haltungsveränderung der Studierenden – und auch der Schülerinnen und Schüler

Es zeigt sich, dass einerseits die Erarbeitung des Materials in den Seminaren intensive fachliche Diskussionen auslöste und gleichzeitig auch die kritische und reflektierte Haltung der Studierenden gegenüber einem diagnostischen Instrument schulte, indem fortwährend die Einstufung der Schülerinnen und Schüler und die Ausrichtung der Lerneinheiten am LEM abgeglichen und hinterfragt wurde. Die explizite Darstellung des Lehrmaterials, auf welche Weise welche Strategien angeregt und gefördert werden sollte, zeigte dabei immens fortbildenden Charakter. Die Studierenden wurden nicht nur zunehmend sicherer dabei, die Kinder beim Interview und in den Lerneinheiten kompetenzorientiert zu beobachten („Das zweite Interview lief schon viel besser…“), sondern sie entwickelten systematisch auch eigene fachlich fundierte Ideen, wie sich passende Lernsituationen gestalten ließen. Dabei war vorstellungsorientiertes Arbeiten, Materialnutzung und eine Ablösung vom Material zu einem geeigneten Zeitpunkt ein ganz selbstverständlicher Bestandteil. Diese Entwicklung zeigte sich deutlich in der Aussagekräftigkeit der von den Studierenden angefertigten Dokumentationen der erlebten Lernsituationen und den schriftlichen Empfehlungen zur Weiterarbeit mit den jeweiligen Kindern.

Insbesondere war bei den Studierenden eine Haltungsveränderung bei der Orientierung auf Lösungswege statt auf Lösungen zu beobachten. Diese war einerseits durch das Material angelegt. Andererseits hatte diese Entwicklung – unseres Erachtens – auch ihren Grund darin, dass die Studierenden die Nutzung und Begründung von Strategien sowohl beim eigenen, materialgestützten Erarbeiten derselben in der Universität als auch in der Praxis mit den Schülerinnen und Schülern regelmäßig als sinnvoll und hilfreich erleben konnten. Damit hat sich gezeigt, dass der Ansatz des neuseeländischen NDP, die diagnostische Entwicklung von Lehrkräften eng an die fachliche Professionalisierung zu binden, nicht nur zur Professionalisierung von Lehrkräften, sondern auch in der Lehrerausbildung gewinnbringend eingesetzt werden kann. Auch wenn in dem durchgeführten Projekt die Leistungsentwicklung der Lernenden nicht messbar gemacht wurde, ist überraschend positiv eine Haltungsveränderung auch bei den Lernenden aufgefallen: So beteiligten sie sich nach den Interviews merkbar aktiver und selbstbewusster an Unterrichtsgesprächen über Lösungswege und fokussierten von selbst stärker verschiedene Lösungsstrategien statt einfach nur im Hinblick auf ihre Richtigkeit Ergebnisse zu vergleichen.

Literatur

Katzenbach, M.; Bicker, U.; Knobel, H.; Krauth B.; Leufer, N. (2014). „Wie hast Du das gerechnet?“ - Erste Erfahrungen mit einem neuseeländischen Diagnoseverfahren. In: *Friedrich Jahresheft XXXII 2014*, 86 – 90.

Ministry of Education (2008a). *Numeracy Professional Development Projects. Book 2. The Diagnostic Interview*. Wellington, New Zealand. Online verfügbar unter: http://nzmaths.co.nz/sites/default/files/Numeracy/2008numPDFs/NumBk2.pdf [zuletzt abgerufen am 20.03.2014]

Ministry of Education (2008b). *Numeracy Professional Development Projects. Book 6. Teaching Multiplication and Division. Revised Edition 2007*. Wellington, New Zealand. Online verfügbar unter: http://nzmaths.co.nz/sites/default/files/Numeracy/2008numPDFs/NumBk6.pdf [zuletzt abgerufen am 20.03.2014]

Steffe, L. P.; von Glasersfeld E.; Richards, J.: Cobb, P. (1983). *Children`s Counting Types: Philosophy, Theory and Applications*. New York: Praeger.

Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of Arithmetic Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag.

Von Glasersfeld, E. (1982): Subitizing – The Role of Figural Patterns in the Development of Numerical Concepts. In: *Archives de Psychologie 50*, 191-218.

Leander KEMPEN, Paderborn

Sind das jetzt schon „richtige“ Beweise? - Ausführungen zu Grundfragen der Beweisdidaktik

In diesem Beitrag sollen vier Grundfragen der Didaktik des Beweisens thematisiert werden: (1) „Welche Implikationen ergeben sich aus dem Verhältnis von Beweisprozess und Beweisprodukt?“, (2) „Welche Bedeutung kommt der Darstellung eines Beweises zu?“, (3) „Ab wann ist ein Beweis ein Beweis?“ und (4) „Wie sind die (anschaulichen) Beweiskonzepte der Mathematikdidaktik zu bewerten?“. Die folgenden Ausführungen zu den genannten Bereichen erfolgen durch eine Synthese von Perspektiven der Fachmathematik, der Mathematikdidaktik und der Semiotik.

1. Welche Implikationen ergeben sich aus dem Verhältnis von Beweisprozess und Beweisprodukt?

Dem Produkt ‚Beweis‘ geht ein Prozess voraus, der u.a. Exploration, Überprüfung und quasi-empirische Evidenz beinhalten kann (etwa Heintz, 2000). Die Reduktion des Prozesses auf das Produkt des fertigen Beweises, wie es häufig im unterrichtlichen Geschehen passiert, kaschiert die eigentliche mathematische Tätigkeit. Will man der mathematisch-kulturellen Tätigkeit des Beweisens gerecht werden, sollte jede Beweisaktivität mit der Exploration des Sachverhalts beginnen. Eine entsprechende Betrachtung von Beispielen kann bereits zu einer Beweisidee führen und eventuell auch zu einem Beweis ausgebaut werden (vgl. „generische Beweise“ in Kempen, 2013). Innerhalb der Explorations- und Untersuchungsphase wird das Vorwissen mit neuen Erkenntnissen verknüpft, es geschieht (zumindest zunächst) eine lokale Ordnung im Sinne Freudenthals (1973, S. 142). Die zugrunde gelegte Argumentationsbasis gilt es zu explizieren, da sich die Frage nach der Zulässigkeit eines Arguments nur vor dem Wissenshintergrund der jeweiligen Community („shared-knowledge“) und der im unterrichtlichen Geschehen vereinbarten Normen beantworten lässt.

2. Welche Bedeutung kommt der Darstellung eines Beweises zu?

Eine Verabsolutierung der fachmathematischen Symbolsprache als Darstellungsmittel beim Beweisen wird aus didaktischer Sicht kritisch betrachtet, da diese bereits für viele Lernende ein Verstehenshindernis darstellt. Wie Maier (1999) ausführt, sind viele Probleme von Lernenden bei der Konstruktion von Beweisen und beim Lesen und Verstehen von Beweisen auf die formale Darstellung zurückzuführen. Es gilt hier, die Verwendung (das

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 607–610). Münster: WTM-Verlag

Schreiben und Lesen) von mathematischer Fachsprache neben dem Beweisen als eigenen Lerngegenstand aufzufassen.

Aus semiotischer Sicht konzentriert sich mathematische Tätigkeit auf den Umgang mit Diagrammen (im Sinne von Peirce, vgl. hierzu Stjernfeld, 2000) und deren Erforschung. Vor diesem Hintergrund basieren Beweise auf „einer Deutung der Situation mittels eines Diagramms und ebenso wie das *Funktionieren* eines Beweises hängt auch dessen *Konstruktion* von der gewählten Darstellung ab“ (Lenhard, 2003, S. 248; Hervorhebungen im Original). Beispiele für solche Diagrammsysteme sind etwa die formale Sprache der Algebra oder Punktmuster bei figurierten Zahlen. Somit ist auch die Verwendung von anderen Darstellungsmitteln legitim und die Untersuchung von nicht-mathematisch-symbolischen Diagrammsystemen, etwa von Punktmustern, als genuin mathematisches Tun zu bezeichnen (etwa Dörfler, 2008). Hier gilt es Stjernfelt (2000) zuzustimmen, wenn er betont: „The good formalization is one which permits manipulation in order to reveal new truths about its object“ (Ebd., S. 360). Das gewählte Diagrammsystem ist somit ausschlaggebende für das Gelingen eines bestimmten Beweises; die Güte und Angemessenheit eines Diagrammsystems ist folglich erstens vom fachlichen Inhalte her und zweitens personenbezogen zu bewerten.

3. Ab wann ist ein Beweis ein Beweis?

Die Akzeptanz eines Beweises als einen solchen geschieht durch einen sozialen Akt einer bewertenden Community (siehe z.B. Hersh, 1993). Dabei beginnt diese ‚soziale Akzeptanz‘ beim Betrachter des Diagrammsystems. Welches Diagrammsystem für den Betrachter verständlicher, anschaulicher, allgemeingültiger etc. ist, ist individuell unterschiedlich. Aufgrund des Vorwissens kann eine Argumentation in einem gegebenen Diagrammsystem für den Betrachter überzeugend sein, oder nicht. Die Frage, ob eine Argumentation „ein Beweis ist oder nicht?“, müsste somit eher lauten, ob eine Argumentation „<u>für den Betrachter</u> ein Beweis ist oder nicht?“ und die Antwort liegt beim Betrachter des Diagrammsystems. Lernende müssen folglich in die Lage versetzt werden entscheiden zu können, ob eine Argumentation ein ‚Beweis‘ ist, d.h. ob für den Betrachter die Validität der Behauptung allgemeingültig gezeigt wird.

4. Wie sind die (anschaulichen) Beweiskonzepte der Mathematikdidaktik zu bewerten?

Im Kontext des Beweisens war und ist es eine Bemühung der Mathematikdidaktik, das Beweiskonzept der Mathematik zu elementarisieren und anschauliche Beweisformen stärker zu legitimieren. Solche Beweisformen sind z.B. präformale Beweise, inhaltlich-anschauliche Beweise, generische Beweise etc. (vgl. Kempen, 2014). Vorteile dieser Beweiskonzepte sind u.a.: (i) Das Beweisen wird bereits Lernenden in unteren Schulstufen zugänglich gemacht, (ii) das Beweisen wird als eine kreative und forschende Aktivität verdeutlicht, (iii) sie können den Aufbau einer positiven Selbstwirksamkeit auf Seiten der Lernenden bewirken, (iv) das erklärende Moment der Beweise wird betont, (v) die Erforschung des Sachverhalts und Beispielbetrachtungen werden ausdrücklich in den Prozess der Beweisfindung/des Beweisens integriert und (vi) die Abgrenzung zu bloßen Beispielbetrachtungen kann thematisiert werden. Da die Güte eines Beweises - wie wir gesehen haben - nicht vom Grad der Formalität des Beweises abhängt, sind diese didaktischen Beweiskonzepte als wirkliche ‚Beweise' legitimierbar: Sie können einem Betrachter die Validität einer Behauptung in Bezug auf ein zugrunde gelegtes theoretisches System allgemeingültig verdeutlichen. Um die Allgemeingültigkeit der Argumentation im konkreten Sachverhalt zu gewährleisten und das entsprechende Verständnis sicherzustellen, empfiehlt es sich hier, die Argumentation zu verschriftlichen (vgl. Kempen, 2013). Diese Beweistypen sind aber nicht nur eigenständige valide Beweise, sie sind auch eine sinnvolle didaktische Zwischenstufe zum Erlernen der formalen Beweisaktivität, wie im Folgenden begründet wird.

Bei der Untersuchung von konkreten Sachverhalten (Materialien, konkrete Zahlenbeispiele oder Punktmuster) rückt die Frage nach der Allgemeingültigkeit einer Beobachtung/einer Argumentation in den Vordergrund. In diesem Kontext werden verschiedene Funktionen und Stärken der fachmathematischen Sprache deutlich. (1) Dem algebraischen Kalkül kommt eine Kontrollfunktion bei der Argumentation zu: Es kann sichergestellt werden, dass keine speziellen Eigenschaften von konkreten Zahlen o.ä. verwendet wurden, die die Gültigkeit der Argumentation auf die konkrete Situation beschränken würden. (2) Nach Betrachtung eines solchen anschaulichen Beweises kann ein eventuell weiterhin bestehender Zweifel an der Gültigkeit der Behauptung und der Allgemeingültigkeit der Argumentation durch die Formulierung eines formal dargestellten Beweises – bei einem entsprechenden Variablenverständnis - beseitigt werden (vgl. Leuders, 2010, S. 54). (3) Durch die gesicherte Allgemeingültigkeit, bei Verwendung der Algebra, tritt ihre immanente Stärke in den Vordergrund: „Expressing generality" (vgl. Mason et al., 2005, S. 2). (4) Schlussendlich kann die symbolische Fachsprache als sinnvolles Kommunikationsmedium der mathematischen Community verdeutlicht werden.

5. Schlussbemerkung

Die Beweiskonzepte der Mathematikdidaktik sind zunächst als wertvolles didaktisches Mittel für das Erlernen der formalen Beweisaktivität zu bewerten. Des Weiteren stellen sie, insofern sie eine gegebene Behauptung allgemeingültig verifizieren, wirkliche ‚Beweise' dar. Die Güte eines Beweises richtet sich dabei nicht nach dem Grad seiner ‚formalen' Darstellung, sondern nach seiner Überzeugungskraft innerhalb einer Community und nach den Funktionen, die er im (unterrichtlichen) Kontext erfüllen soll. Es gilt zu betonen, dass das Operieren in verschiedenen Diagrammsystemen die Bedeutung von mathematischen Argumenten betont und die Möglichkeit der Diskussion über gegebene Argumentationen (Qualität, Vollständigkeit, Allgemeingültigkeit etc.) bietet. Schlussendlich werden durch eine Formalisierung von Argumentationen der eigentliche Wert und die Funktion der mathematischen Fachsprache erst wirklich ersichtlich.

Literatur

Dörfler, W. (2008). Mathematical reasoning: Mental activity or practice with diagrams. In J. Böhm (Hrsg.), *Proceedings Regular Lectures ICME 10,* CD-Rom. Osnabrück: European Society for Research in Mathematics Education.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. *Band 1*. Stuttgart: Klett.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik*. Wien [u.a.]: Springer.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Kempen, L. (2014). Der operative Beweis als didaktisches Instrument in der Hochschullehre Mathematik. In T. Wassong, D. Frischemeier, P. R. Fischer, R. Hochmuth & P. Bender (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (S. 463-470): Springer Fachmedien Wiesbaden.

Kempen, L. (2013). Generische Beweise in der Hochschullehre. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (Bd. 1, S. 528-531). Münster: WTM-Verlag.

Lenhard, J. (2003). Verändert ein Beweis, was er beweist, indem er es beweist? Über die Veränderlichkeit mathematischer Objekte. In M. Hoffmann (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven* (S. 242-257). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Leuders, T. (2010). *Erlebnis Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Maier, H. (1999). Wieviel Fachsprache brauchen die Schüler im Mathematikunterricht?. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999* (S. 19-26). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005*). Developing thinking in algebra*. London: Open Univ. [u.a.].

Stjernfelt, F. (2000). Diagrams as centerpiece of a Peircean epistemology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, *36*(3), 357-384.

Barbara KIMESWENGER, Markus HOHENWARTER, Linz

GeoGebraBooks für Tablets

Tablet Computer finden mehr und mehr Verbreitung und eignen sich auch gut für den Unterricht (siehe Abbildung 1), da sie einfach mit dem Finger zu bedienen sind, wenig Platz brauchen und lange Batterielaufzeiten haben. Öffnet man die seit Sommer 2013 verfügbare GeoGebra Tablet App, erscheint eine leere Datei und Lernende können eigene Konstruktionen erstellen oder Befehle in die Eingabezeile eintippen.

Abb. 1: Mathematik mit GeoGebra für Tablets begreifen (eigene Abbildung)

Dazu müssen Lernende bzw. Lehrende über Kenntnisse in der Handhabung des Programms, wie etwa den Gebrauch der Werkzeuge, verfügen. Vorgefertigte interaktive Arbeitsblätter benötigen im Gegensatz dazu weniger fundiertes Wissen über die Bedienung der Software selbst (vgl. Preiner, 2008). Die Ende 2011 gestartete Materialien-Tauschplattform www.geogebratube.org umfasst mittlerweile (19.03.2014) bereits über 85 000 solcher frei verfügbaren interaktiven Arbeitsblätter zu verschiedensten Themen aus der Mathematik und den Naturwissenschaften. Von Beginn an gab es dabei die Möglichkeit, mehrere Arbeitsblätter zu privaten Sammlungen zusammenzufassen, also sehr einfache Mini-Lernpfade zu erzeugen. Daraus entstand der Wunsch auch größere Einheiten als Sammlung von Sammlungen bauen zu können.

GeoGebraBooks

Diese Idee wurde mit Jänner 2014 in sogenannten „GeoGebraBooks“ umgesetzt, die in mehreren Kapiteln jeweils eine Reihe von GeoGebra Arbeitsblättern umfassen. Auf GeoGebraTube können nun alle angemeldeten Benutzerinnen und Benutzer eigene GeoGebraBooks basierend auf vorhandenen Materialien erstellen. Dabei können sowohl eigene Arbeitsblätter wie auch jene von anderen Nutzerinnen und Nutzern verwendet und sehr einfach in Kapiteln organisiert werden. Die resultierenden GeoGebraBooks können entweder via Webadresse mit anderen geteilt oder als offline-Paket

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 611–614). Münster: WTM-Verlag

heruntergeladen werden und funktionieren sowohl auf traditionellen Computern wie auch auf Tablets und Smartphones – einzige Voraussetzung ist ein Webbrowser.

Wir haben nun begonnen, uns mit der Frage zu beschäftigen, wie entsprechende Materialien aussehen bzw. aufgebaut sein sollen, um sie für die Verwendung auf Tablets zu optimieren. So unterscheiden sich zum Beispiel die Bildschirmgröße und die Art der Bedienung dieser Geräte deutlich von der Arbeit mit einer Maus an einem großen Computermonitor auf einem Schreibtisch. Die Verwendung von Tablets erfordert daher meist entsprechende Anpassungen im Design der interaktiven Arbeitsblätter. Beispielsweise sollten Bedienelement wie Schieberegler oder Eingabefelder im unteren Bereich eines Arbeitsblattes positioniert werden, um bei der Fingerbedienung nicht den Rest des Arbeitsblattes mit der Hand zu verdecken (vgl. Hohenwarter und Kimeswenger, 2013, S. 354ff). Aus solchen Überlegungen und ersten Erfahrungen mit Tablets im Unterricht ist etwa ein prototypisches GeoGebraBook mit Materialien für die 6. Schulstufe entstanden (siehe Abbildung 2). Seine Gestaltung wurde aber im Besonderen für die Nutzung auf Tablets und für die Bedienung mit Fingern adaptiert. Jedes GeoGebraBook enthält Kapitel, die mit einem Fingertipp ausgewählt werden können, wodurch eine Übersicht der zugehörigen dynamischen Arbeitsblätter erscheint. Zum Beispiel befindet sich im GeoGebraBook „KidZ – 6. Schulstufe“ im Kapitel „Brüche“ das Arbeitsblatt „Addition gleichnamiger Brüche“ (siehe Abbildung 2).

In diesem interaktiven Arbeitsblatt sollen Lernende unter anderem zur ikonischen Repräsentation zweier gleichnamiger Brüche in Form von Kreissektoren die symbolische Darstellung, also Zähler und Nenner der Brüche, in die freien Textfelder eingeben (vgl. Meier, 2009, S. 96ff; Bruner, 1971). Laut dem Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen kann Wissen leichter behalten werden, wenn es in verschiedenen Darstellungsformen erworben wurde (vgl. Wittmann, 1981, S. 91; Zech, 1996, S. 106).

Hierbei handelt es sich um eine interaktive Übung, bei der Schülerinnen und Schüler direkte Rückmeldungen erhalten, wie gut sie eine konkrete Aufgabenstellung bearbeitet haben (vgl. Hohenwarter, 2006, S. 5).

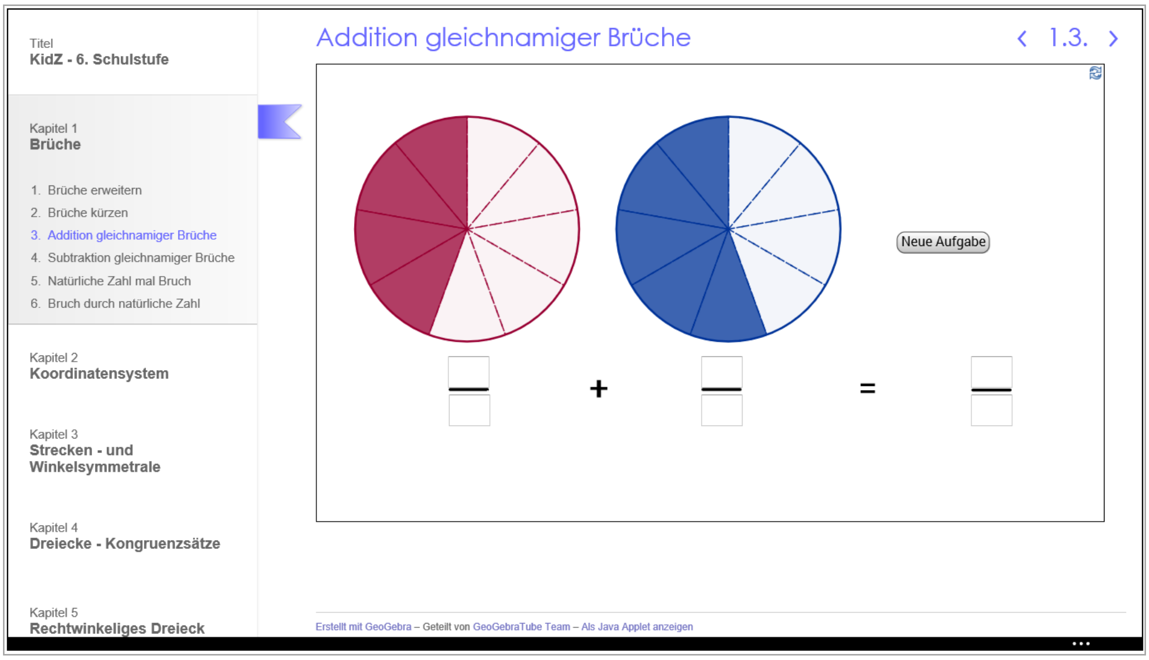


Abb. 2: GeoGebraBook für die 6. Schulstufe, www.geogebra.org/book/at/st6/

Solche interaktiven Arbeitsblätter können von jeder Benutzerin und jedem Benutzer auf GeoGebraTube in ein eigenes GeoGebraBook eingebunden werden. Falls gewünscht, kann das Arbeitsblatt auch kopiert und so eigene Fragestellungen ergänzt oder das Applet verändert werden.

An dieser Stelle möchten wir anmerken, dass derartige interaktive Arbeitsblätter den Unterricht und Hausübungen bereichern können, keinesfalls jedoch bewährte enaktive Materialien wie z.B. das Falten von Brüchen auf Papier ersetzen sollen oder können. Wichtig ist dabei immer der reflektierte Einsatz durch die Lehrperson, um zu entscheiden, an welcher Stelle im Unterricht welche Medien (Tafel, Papier, echte Modelle, Tablets, usw.) zum Einsatz kommen sollen.

Zukunft der GeoGebraBooks

Basierend auf den Rückmeldungen von Nutzerinnen und Nutzern sollen die GeoGebraBooks in den nächsten Monaten um neue Funktionen erweitert werden. Insbesondere ist geplant, die Möglichkeit zur Einrichtung eigener *Gruppen* (z.B. für Schulklassen) zu schaffen, sodass etwa eine Lehrperson ein GeoGebraBook nur mit der eigenen Klasse teilen kann. Damit soll das Arbeiten auf GeoGebraTube mit den eigenen Schülerinnen bzw. Schülern, das Organisieren, das Strukturieren und das Bereitstellen unterrichtsrelevanter Materialien erleichtert werden. Verwendete GeoGebraBooks sollen dabei im Laufe eines Schuljahres um weitere Kapitel und dynamische Arbeitsblätter ergänzt werden können. Ab welchem Zeitpunkt Inhalte freigegeben und daher sichtbar für ihre Schülerinnen und Schüler werden, sollen

Lehrerinnen und Lehrer flexibel entscheiden und nach dem eigenen Unterrichtstempo anpassen können.

Gruppen werden dann auch eine Weiterentwicklung in Richtung mathematischer Portfolios erlauben, also von GeoGebraBooks, deren Inhalte auch Schülerinnen und Schüler selbst mitgestalten können. Einerseits könnte eine Lehrperson ein GeoGebraBook mit Übungen so gestalten, dass die Schülerinnen und Schüler darin selbst Konstruktionen erzeugen sowie ihre Arbeitsergebnisse speichern können. Damit hätte jede Schülerin und jeder Schüler eine eigene Kopie dieses GeoGebraBooks gleichsam eines eigenen mathematischen Portfolios, in dem neben GeoGebra Konstruktionen in Zukunft auch Texte, Bilder und Videos eingebunden werden können sollen. Andererseits soll es auch möglich sein, dass mehrere Schülerinnen und Schüler oder sogar eine ganze Klasse ein gemeinsames GeoGebraBook erstellen können, in dem alle gemeinsam ihre Materialien sammeln können.

Wie auch in der Entwicklung von GeoGebra werden die Details der zukünftigen GeoGebraBook-Funktionen stark von den Wünschen und Rückmeldungen der Nutzerinnen und Nutzer beeinflusst werden. Das grundlegende Ziel der Entwicklung bleibt jedenfalls, dass Lernende und Lehrende möglichst große Freiräume in der Gestaltung von GeoGebraBooks haben sollen, wobei sie aktiv mit dem System arbeiten und selbst kreativ sein können.

Literatur

Bruner, J. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung. 1. Auflage. Ernst Klett: Stuttgart

Hohenwarter, M. (2006): Dynamische und interaktive Materialien für den Mathematikunterricht. http://www.geogebra.org/publications/2006_nuernberg.pdf (28.02.2014)

Hohenwarter, M.; Kimeswenger, B. (2013): Mathematik begreifen mit GeoGebra für Tablets. In: Brandhofer, G.; Ebner, M.; Micheuz, P.; Reiter, A. (Hrsg.): 25 Jahre Digitale Schule in Österreich. Österreichische Computer Gesellschaft: Wien, 353–358. http://www.informatische-grundbildung.com/sommertagung-2013/tagungsband/oer/ (28.02.2014)

Meier, A. (2009): realmath.de. Konzeption und Evaluation einer interaktiven dynamischen Lehr- Lernumgebung für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Dissertation. Franzbecker: Hildesheim – Berlin

Preiner, J. (2008): Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra. Dissertation. Universität Salzburg

Wittmann, E.C. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg: Braunschweig – Wiesbaden

Zech, F. (1996): Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik. 8. Auflage. Beltz: Weinheim

Elena KLIMOVA, Schwäbisch Gmünd

Entwicklung von Interesse an der Mathematik

1. Mathematische Schulleistungen und Interesse an der Mathematik

Eine psychologische Studie (Murayama 2013) analysierte, wie sich Motivation, kognitive Lernstrategien (auswendiges Lernen und tiefes Verständnis) und Intelligenz auf die Leistungsentwicklung in Mathematik in den Klassenstufen 5 bis 10 auswirkt. Die Ergebnisse zeigten, dass das Ausgangsniveau der Leistungen von der Intelligenz stark beeinflusst war, die Schlüsselfaktoren für die Leistungsentwicklung aber die Motivation und kognitive Lernstrategien sind (vgl. Abb.1). Das Interesse am Lerngegenstand, auf dem die intrinsische Motivation beruht, stellt demnach eine unmittelbare Voraussetzung für erfolgreiches Mathematik-Lernen in der Sekundarstufe dar.

Ein internationaler Vergleich zeigt jedoch: Das Interesse an der Beschäftigung mit Mathematik sinkt im Laufe der Schullaufbahn kontinuierlich ab (Neumann 2013, Willems 2011). Die Ergebnisse unserer Erkundungsuntersuchung bestätigen diese Tendenz auch in Baden-Württemberg (Abb. 2).

Parameter Estimates for the Growth Curve Model Including Motivational and Strategy Variables Assessed at Grade 7

	Estimates
Perceived control	- 2,76
Intrinsic motivation	4,51
Extrinsic motivation	- 0,55
Deep learning strategies	4,64
Surface learning strategies	- 0,81
Intelligence	0,37

Abb. 1: Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik, eigene Darstellung, vgl. Murayama 2013 S. 1484.

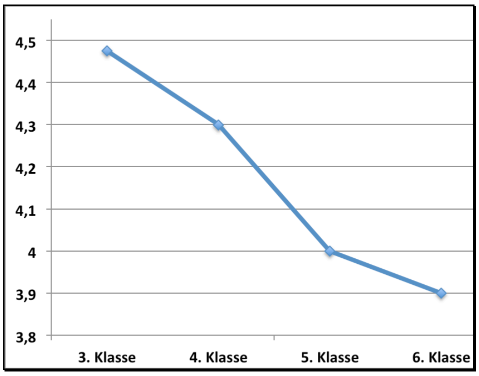


Abb. 2: Interesse an Mathematik nach Klassenstufen (N=162).

Die Frage, wie das Interesse entsteht und durch welche Prozesse es im Unterricht aufgebaut werden kann, ist offen. Vor dem Hintergrund der Person-Gegenstands-Theorie (Krapp 2002) wird vermutet, dass die Entwicklung individueller Interessen durch die Anregung eines situationalen Interesses eingeleitet werden kann (Abb. 3).

Ziel der Arbeit ist deshalb, einen Beitrag zum Wecken und zur Entwicklung situationaler mathematischer Interessen sowie langfristig zur Festigung individueller Interessen und zur Erweiterung und Vertiefung darauf aufbauender mathematischer Kenntnisse bei Jugendlichen zu leisten.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 615–618). Münster: WTM-Verlag

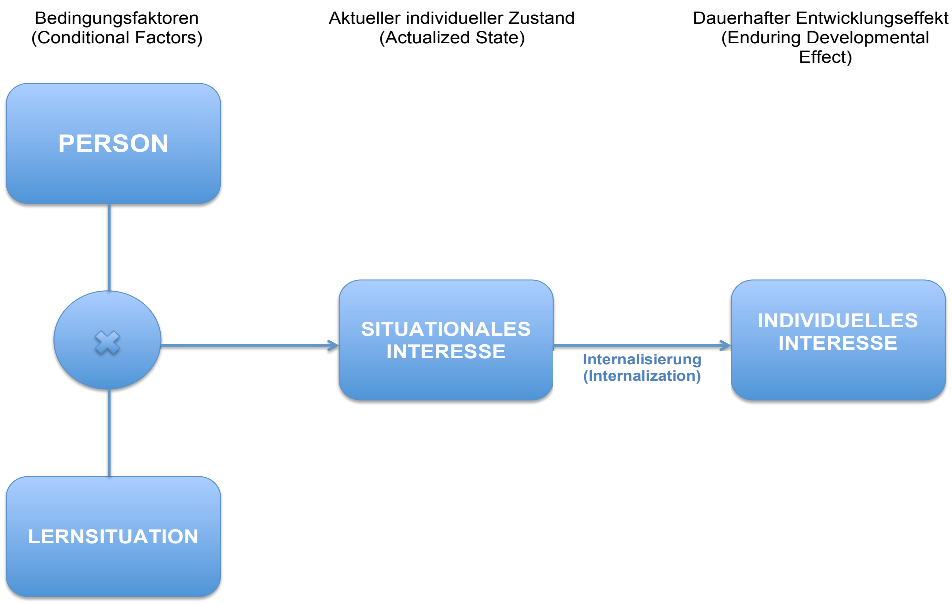


Abb. 3: Rahmenmodell zur Interessenentwicklung (eigene Darstellung, vgl. Krapp 2002, S. 398).

2. Situationales Interesse.

Die Möglichkeiten zur Entwicklung des situationalen Fachinteresses sind generell in anregenden mathematischen Inhalten und vielseitigen Organisationsformen der Begegnung mit den Inhalten zu sehen (Abb. 4).

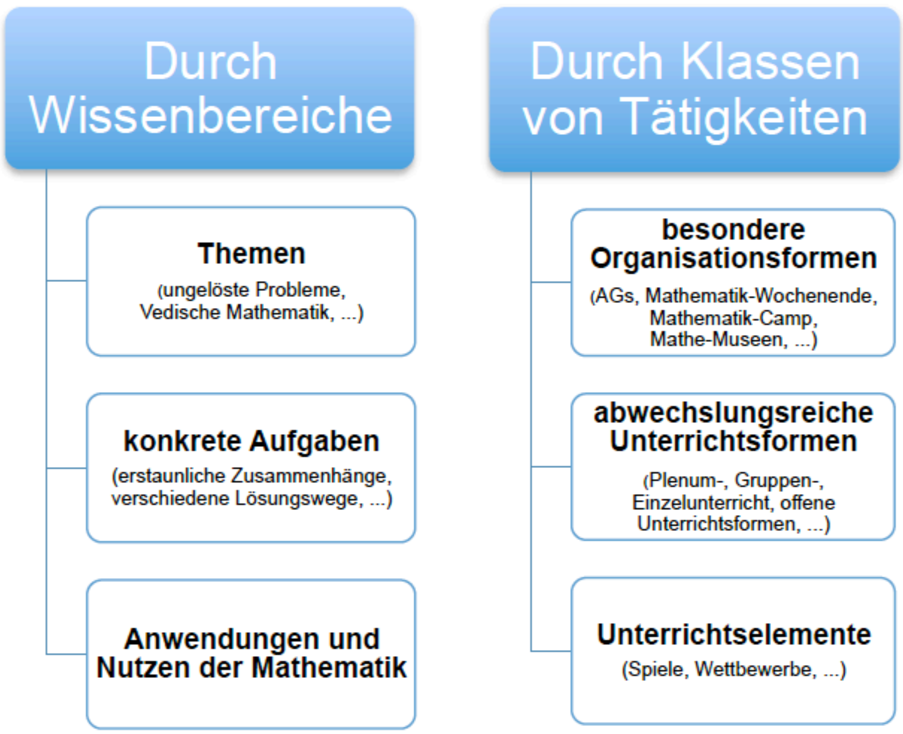


Abb. 4: Entstehen des situationalen Interesses an Mathematik.

Im fachlichen Fokus der Untersuchung standen zwei konkrete Themenkreise: Die „Vedische Mathematik“ und „Ungelöste Probleme der Mathematik“. Es wurden dementsprechende Unterrichtsmaterialien vorbereitet.

Die Vedische Mathematik besteht aus 16 Sutras – Rechenregeln, die angeblich aus heiligen Textsammlungen der Hinduismus Atharveveda stammen und im 20. Jahrhundert (wieder)veröffentlicht wurden. Die Sutras beschleunigen arithmetische Rechnungen. Aktuell werden Chip-Designs und Algorithmen diskutiert, die diese Verfahren zur FFT nutzen. Das Sutra „vertikal und kreuzweise“ wird zum Beispiel zur Multiplikation von Zahlen, die nahe an einer gleichen Zehnerpotenz liegen, verwendet.

$$\begin{array}{rrr} 9988 \times 9995 = 998.360 & 9988 & 12 \\ & - & \cdot \\ & \underline{9995} & \underline{5} \\ (9988 - 5 = 9995 - 12 =) & 9983 & 60 \end{array}$$

Unter Nutzung dieser Inhalte wurden Effekte inner- wie außerunterrichtlicher Maßnahmen in Baden-Württemberg untersucht, die zeigten, dass das Thema ein Potenzial besitzt (vgl. Abb. 5).

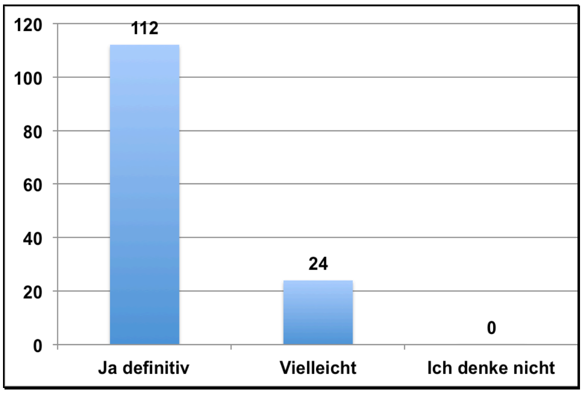


Abb. 5: Wäre dein Interesse an Mathematik größer, wenn du die vedischen Rechentricks kennen würdest?

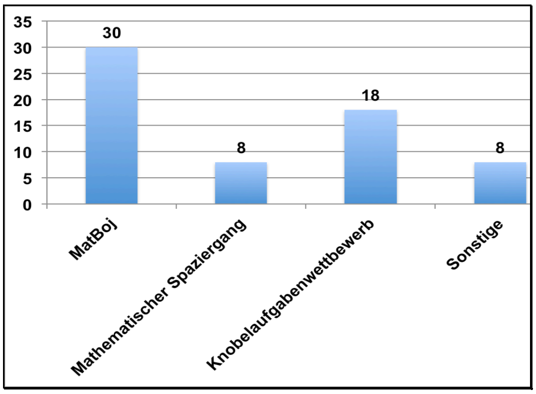


Abb. 6. Welchen der Wettbewerben beim MWE hast du am interessantesten gefunden?

Es wurden Kriterien der Interessantheit eines Themas für Jugendliche ausgearbeitet. Ein Thema soll Chance für ***alle*** Kinder geben (keine besondere Vorkenntnisse erforderlich, jeder kann „einsteigen“) und ***Erfolgssituation schaffen*** („Können“-Ergebnisse sind schnell zu sehen und beeindruckend, und die Selbsteinschätzungsfähigkeit der Schüler_innen wächst).

Das zweite Thema „Goldbachsche Vermutung und andere ungelöste Probleme der modernen Mathematik“ (s. Klimova 2014) wurde gezielt für mathematisch ***Begabte*** ausgearbeitet. Es wurde ein kurzer Blick in die neuere Geschichte der Mathematik geworfen und ein Versuch unternommen, die Jugendlichen mit ungelösten Problemen vertraut zu machen. Die ausgewählten Probleme, welche vielseitig und vielschichtig betrachtet wurden, reichen von Primzahlzwillingen über arithmetische Folgen aus Primzahlen bis zu den Vollkommenen Zahlen. Es wurden auch diejenigen Variationen von ungelösten Problemen gestellt, die Schüler_innen selbst lösen können. Die eingefügten Aufgaben ermöglichten eine tiefgreifende Auseinandersetzung mit der Mathematik und bahnen somit mathematisches Verständnis und nachhaltige Freude am Fach an.

Weiter wurden unterschiedliche Teamwettbewerbe als Organisationsform der Begegnung mit den Inhalten für mathematisch Begabte erörtert: Der Wettbewerb Matboj (Klimova 2012), ein mathematischer Spaziergang und ein Knobelaufgabenwettbewerb (Abb.6). Es wurde die These formuliert: mathematisch begabte Jugendliche finden die Lernaktivitäten mit ***höchsten fachlichen und emotionalen*** Herausforderungen am interessantesten.

3. Ausblick

Die „interessanten“ Themen (o.g. Kriterien), mit welchen entgegen dem Trend das Interesse an mathematischen Aktivitäten geweckt bzw. verstärkt werden kann, wäre es sinnvoll, im regulären Unterricht periodisch als Impuls zu behandeln. Im Mathematik-Unterricht der Sekundarstufe muss viel mehr über Freude, Interesse, Spaß und Schaffung der Erfolgssituationen gesprochen werden. Für die weitere Arbeit sind Ausarbeitungen weiterer „interessanter“ Themen sowie die Überprüfung der These geplant.

Literatur

Klimova, E. (2012). MatBoj-Wettbewerb als ein neuer fachspezifischer Wettbewerb in Mathematik zur Förderung begabter Schüler. *In Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012,* S. 449–452. Münster: WTM-Verlag.

Klimova, E. (2014). Goldbachsche Vermutung und andere ungelöste Probleme der modernen Mathematik als Mittel der Förderung von Interesse am Fach. *In: Mathematikinformation, voraussichtlich Heft 2.*

Krapp, A. (2002). Structural and dynamic aspects of interest development: theoretical considerations from an ontogenetic perspective. *In: Learning and Instruction, 12,* S. 383-409.

Murayama, K.; Pekrun, R., Lichtenfeld, S. and vom Hofe, R. (2013). Predicting Long-Term Growth in Students' Mathematics Achievement: The Unique Contributions of Motivation and Cognitive Strategies. *In: Child Development Volume 84, Issue 4,* S. 1475 – 1490, July/August 2013.

Neumann, K. (2013). Die Entwicklung von Interesse und Motivation im naturwissenschaftlichen Unterricht. *Vortrag am 16.12.2013 am fachübergreifenden Forum an der Universität Stuttgart.*

Willems, A. S. (2011). *Bedingungen des situationalen Interesses im Mathematikunterricht.* Münster, New York, München, Berlin: Waxmann 2011.

Rebecca KLOSE, Gießen

PriMaPodcasts im bilingualen Mathematikunterricht

1. Möglichkeiten des Einsatzes digitaler Medien

Der Einsatz digitaler Medien im Unterricht ermöglicht es den Fokus auf bestimmte Kommunikationsweisen zu richten. Während beim Chat beispielsweise die schriftlich-grafische Kommunikation im Vordergrund steht geht es bei der Produktion von Audio-Podcasts vielmehr um mündliches Darstellen und Kommunizieren (Schreiber 2012). Da bei letzterem der Rückgriff auf schriftlich-grafische Mittel nicht möglich ist, erfordert dies im Vorfeld eine intensive Auseinandersetzung mit den zu vermittelten Themen. Sprachlich gesehen sollten Inhalte verständlich und ansprechend für den Zuhörer übermittelt werden. Indem man Audio-Podcasts zu mathematischen Themen in der Primarstufe erstellen lässt (PriMaPodcasts), kann dies sowohl zum fachlichen Lernen beitragen als auch zur Erweiterung von mathematischer Kommunikationskompetenz bei den Lernenden führen. Aufgrund der Verbindung von Fachinhalten und der Nutzung sprachlicher Mittel lassen sich PriMaPodcasts neben anderen Settings ideal im bilingualen Mathematikunterricht einsetzen (Klose 2013).

2. Bilinguales Lernen im Mathematikunterricht

Bilinguales Lernen impliziert die Verwendung von zwei Unterrichtssprachen zur Erschließung fachlicher Inhalte. Dabei werden die spezifischen Ziele des Sachfaches mit den Anforderungen an einen modernen Fremdsprachenunterricht verbunden (Böttger 2013). Ziel ist es also sowohl das fachliche Lernen als auch das Sprachenlernen zu unterstützen (Elsner & Keßler 2013). Seit den 1960er Jahren wird dies in unterschiedlicher Weise an Schulen in Deutschland praktiziert: von immersiven Ansätzen über CLIL (Content Language Integrated Learning) bis hin zu bilingualen Modulen (vgl. Elsner und Wittkowske 2010). Während der Einsatz zweier Sprachen vor allem in den gesellschaftskundlichen (z.B. Politik) und naturwissenschaftlichen Fächern (z.B. Biologie) zum Tragen kommt, stellt die Praxis eines bilingualen Mathematikunterrichts in allen Schulformen eher eine Seltenheit dar. Dies ist nach Rolka (2004, 2012) in den Einstellungen der beteiligten Personen begründet, welche u.a. Mathematik als eher international neutral und kulturfrei ansehen und von „sprachreduzierten Vorgängen“ (Rolka 2012, S. 133) beim Mathematiklernen ausgehen. Wenngleich bilinguales Lernen aus Sicht der Fremdsprachenforschung bereits seit einigen Jahren im Fokus des Interesses steht liegt für den Mathematikunterricht „keine eigenständige Sachfachdidaktik“ (Küppers 2013, S.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 619–622). Münster: WTM-Verlag

308) vor. Ebenso mangelt es diesbezüglich an empirischer Fundierung. Erste unterrichtspraktische Ansätze bezüglich der Nutzung einer Zweitsprache zum Mathematiklernen beziehen sich v.a. auf den Sekundarstufenbereich (z.B. Rolka 2012). Bezogen auf die Primarstufe gibt es nur selten ein bilinguales Angebot für den Mathematikunterricht (Viebrock 2013). Die wenigen Grundschulen, welche Mathematik bilingual unterrichten, sind vorwiegend in Großstädten angesiedelt und oft in privater Trägerschaft. Anders als im gängigen Fremdsprachenunterricht der Primarstufe werden hier nicht nur alltagssprachliche Wortfelder in der Fremdsprache behandelt. Es findet vielmehr eine Auseinandersetzung mit fachspezifischen Themen in beiden Sprachen statt.

3. Produktion von PriMaPodcasts

An der Goethe Universität Frankfurt a.M. wurden verschiedene Formen von Audio-Podcasts zu mündlichen Darstellung mathematischer Inhalte entwickelt (vgl. Schreiber 2013). PriMaPodcasts sind solche, die mit Primarstufenschülerinnen und –schülern erstellt werden. Zur Erstellung der mathematischen Audio-Podcasts durchlaufen die Lernenden verschiedene Phasen.

Zunächst werden sie in Kleingruppen eingeteilt, erhalten eine Fragestellung zu einem bereits bekannten mathematischen Thema und sollen dazu gemeinsam eine *Spontanaufnahme* erstellen. Auf diese Weise findet eine Art digitales Brainstorming statt, Inhalte werden neu ins Gedächtnis gerufen und Vorwissen kann aktiviert werden. Als nächstes haben die Lernenden die Möglichkeit, weitere Informationen zum Thema einzuholen. Dazu wird ihnen Material zur Verfügung gestellt in Form verschiedener Schulbücher, diverser Anschauungsmaterialien, eigene oder vorab ausgewählte Internetlinks. Mithilfe der gewonnen Informationen erstellen die Kinder ein *Drehbuch,* welches Orientierung zur Aufnahme der *ersten Podcast-Version* bietet. Die erste Podcast-Version stellen sie daraufhin einer anderen Kleingruppe und der Lehrperson vor und erhalten in dieser *Redaktionssitzung* Feedback, Hinweise und Anregungen zur weiteren Bearbeitung des Themas. Das Drehbuch kann also nochmals überarbeitet werden, oft wird sogar ein *zweites Drehbuch* erstellt. Schließlich wird der *PriMaPodcast* aufgenommen, der auf einem Blog im Internet veröffentlicht wird.

Die erste Podcast-Version und die Endversion sind zwar medial mündlich, sie basieren jedoch auf Drehbüchern, die medial schriftlich-grafisch sind. In den einzelnen Phasen sind also Schriftlichkeit und Mündlichkeit eng miteinander verbunden (Schreiber 2012). Eine tiefe inhaltliche und sprachliche Auseinandersetzung wird dadurch ermöglicht.

Wenn man PriMaPodcasts im bilingualen Kontext nutzt, ist es aus fachlicher Perspektive interessant zu erfahren, welche Kernideen und mathematischen Grundvorstellungen die Kinder durch ihre Äußerungen kenntlich werden lassen und welche Wege sie finden, um mathematische Inhalte mündlich darzustellen und zu kommunizieren. Es lässt sich ebenfalls ermitteln, welche sprachlichen Fertigkeiten und Sprachebenen (wie Aussprache, Wortschatz, grammatische Strukturen, Redemittel) die Kinder dazu verwenden. Erste englischsprachige PriMaPodcasts sind auf folgenden Blog veröffentlicht:
http://blog.studiumdigitale.uni-frankfurt.de/primapodcast-en/

4. Dissertationsprojekt

Im Rahmen des Dissertationsprojektes wird der Erstellungsprozess von PriMaPodcasts genutzt um die Verfügbarkeit von mathematischer Fachsprache (Maier & Schweiger 1999, Schleppegrell 2007) im bilingualen Unterricht der Primarstufe zu untersuchen. Da sich die Themenauswahl auf die Geometrie bezieht, richtet sich der Fokus der qualitativen Untersuchung gezielt auf die Verwendung und Bildung geometrischer Begriffe (Franke 2007, Holland 1996, Vollrath 1984). Die Forschungsfrage diesbezüglich lautet: ‚Wie weit sind mathematische Begriffe für Schülerinnen und Schüler einer bilingualen Klasse zur mündlichen Beschreibung mathematischer Inhalte in den verschiedenen Sprachen verfügbar?' Durch die Heranziehung lern- und kognitionspsychologischer Ansätze (z.B. Piaget 1983, Wygotski 1991) werden Begriffsbildungs- und Denkprozesse im Erst- und Zweitspracherwerb näher betrachtet. Mithilfe der Interaktionsanalyse (Krummheuer & Naujok 1999) sollen die sprachlichen Interaktionsphasen der Kinder genauer untersucht werden.

Literatur

Böttger, H. (2013). Bilingualer Unterricht in Primarschulen: Die Fremdsprache in den Lernbereichen der Grundschule. In W. Hallet & F.G. König (Hrsg.), *Handbuch bilingualer Unterricht. Content and Language Integrated Learning.* Seelze: Kallmayer, S. 66-74.

Elsner D. & Keßler, J.-U. (2013). Bilingual Approaches to Foreign Language Education in Primary School. In D. Elsner & J.-U. Keßler (Eds.), *Bilingual Education in Primary School. Aspects of Immersion, CLIL, and Bilingual Modules*. Tübingen: Narr, S. 16-27.

Elsner D. & Wittkowske, S. (2010). Bilingualer Sachfachunterricht. Wieso, Weshalb, Warum? In: *Grundschulunterricht Sachunterricht 3*, S. 4-7.

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum.

Holland, G. (1996). *Geometrie in der Sekundarstufe*. Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.

Klose, R. (2013). Englische PriMaPodcasts im Mathematikunterricht. *lehrer-online*. Verfügbar unter http://www.lehrer-online.de/primapodcasts-englisch-mathe.php (18.3.2014).

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung.* Opladen: Leske + Budrich.

Küppers, A. (2013). Mathematik. In W. Hallet & F.G. König (Hrsg.), *Handbuch bilingualer Unterricht. Content and Language Integrated Learning.* Seelze: Kallmayer, p. 308-314.

Maier, Hermann und Fritz Schweiger (1999): *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht*. Wien. Verfügbar unter: http://wwwu.uni-klu.ac.at/kadunz/semiotik/products.htm (19.3.2014).

Piaget, J. (1983). *Meine Theorie der geistigen Entwicklung.* (Herausgeber der Deutschen Ausgabe: Reinhard Fatke.) Frankfurt/München: Fischer.

Rolka, K. (2004). Bilingual Lessons and Mathematical World Views – a German Perspective. In M.J. Hoines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 4. Bergen: PME, p. 105-112.

Rolka, K. (2012). Bilingualer Mathematikunterricht – Theoretische Überlegungen und praktische Beispiele. In B. Diehr & L. Schmelter (Eds.), *Bilingualen Unterricht weiterdenken. Programme, Positionen, Perspektiven*. Frankfurt a.M.: Peter Lang, S. 131-147.

Schleppegrell, M.J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & Writing Quarterly, 23*, p. 139-159.

Schreiber, Chr. (2013). *Mündliche Darstellung mit digitalen Medien*. In Beiträge zum Mathematikunterricht. WTM: Münster.

Schreiber, Chr. (2012). Mit Neuen Medien forschen – Schriftlichkeit und Mündlichkeit beim Darstellen im Mathematikunterricht. In S. Ladel & Chr. Schreiber (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe.* Schriften des CERMAT zu Mathematikunterricht und Technologieeinsatz, 1. Band. Hildesheim: Franzbecker. S. 131-150.

Viebrock, B. (2013). Mathematics. In D. Elsner & J.-U. Keßler (Eds.), *Bilingual Education in Primary School. Aspects of Immersion, CLIL, and Bilingual Modules*. Tübingen: Narr, p. 51-60.

Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begrifflehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.

Wygotsky, L.S. (1991). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a.M.: Fischer Taschenbuch Verlag.

Imke KNIEVEL, Anke LINDMEIER, Aiso HEINZE, Kiel

Erfassung aktionsbezogener Kompetenzen von Mathematiklehrkräften in der Grundschule mit videobasierten Items

Das Projekt vACT(Primar) strebt an, fachspezifische Kompetenzen von Mathematiklehrkräften der Primarstufe und insbesondere deren aktionsbezogene Kompetenz anforderungsbezogen zu erfassen. Dazu wurde ein computerbasierter standardisierter Test mit videovignettten-basierten Items entwickelt. Es werden das zugrundeliegende Modell, eine Operationalisierung und Ergebnisse ($N = 85$) in Bezug auf die Machbarkeit präsentiert.

Modellierung der fachspezifischen Kompetenzen von Grundschullehrkräften

Die fachspezifischen Kompetenzen von Lehrkräften werden im Sinne von Koeppen et al. (2008) als individuelle erlernbare kontext-spezifische kognitive Ressourcen verstanden, die benötigt werden um die fachspezifischen Anforderungen des Unterrichtens zu bewältigen. Zur Modellierung der fachspezifischen Kompetenzen von Mathematiklehrkräften in der Grundschule wird das erweiterte Strukturmodell der Lehrerkognition von Lindmeier (2011) zu Grunde gelegt. Neben einer *Wissenskomponente (BK)* unterscheidet Lindmeier ausgehend von den unterschiedlichen Anforderungscharakteristika des Unterrichtens die *aktionsbezogene Kompetenz (AC)* sowie die *reflexive Kompetenz (RC)*. Die AC wird durch die Anforderungen des Unterrichtens an sich, und die RC durch die Anforderungen der Unterrichtsvor- und -nachbereitung charakterisiert. In einer Machbarkeitsstudie mit Sekundarschullehrkräften konnte das vorgeschlagene Modell empirisch bestätigt werden. Eine empirische Prüfung mit einer größeren Stichprobe steht noch aus. Das Modell ist nicht spezifisch für Sekundarschullehrkräfte, so dass es in diesem Projekt für Grundschullehrkräfte konkretisiert wird.

Die Mathematiklehrkräfte an deutschen Grundschulen unterscheiden sich in ihrer universitären Ausbildung: Lehrkräfte, die Mathematik als Hauptfach oder Schwerpunktfach studiert haben (Lehrkräfte M) sowie Lehrkräfte ohne vertiefte Ausbildung in Mathematik (Lehrkräfte oM). Lehrkräfte M haben nach ihrer Ausbildung ein höheres Fachwissen und fachdidaktisches Wissen als Lehrkräfte oM (Blömeke et al., 2010). Für unterschiedliche Ausprägungen in den vorgeschlagenen Kompetenzkonstrukten RC und AC gibt es noch keine empirische Evidenz. AC und RC sind als fachspezifische Kompetenzkonstrukte konzeptualisiert, so dass anzunehmen ist, dass Lehrkräfte M eine höhere Ausprägung erreichen als Lehrkräfte oM. Studien, die untersucht haben, ob sich die Schülerleistungen in Abhängigkeit von der

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 623–626). Münster: WTM-Verlag

Ausbildung der Lehrkraft unterscheiden kommen zu divergenten Ergebnissen (Tiedemann & Billmann-Mahecha, 2007; Richter et al., 2012).

Messung der aktionsbezogenen Kompetenz

Der Einsatz von videovignetten-basierten Items nimmt im Bereich der Erfassung von Lehrerkognition in den letzten Jahren zu. Videobasierte Items bilden zum einen augenscheinlich die Komplexität fachspezifischer Unterrichtssituationen besser ab als bekannte Paper-Bleistift-Formate. Zum anderen werden videovignetten-basierte Erhebungsverfahren vorgeschlagen, die insbesondere charakterisierende Anforderungen professioneller Handlungsfelder – in Bezug auf Unterricht sind dies Komplexität, Unmittelbarkeit, Spontanität und Interaktivität – implementieren. Erste Ergebnisse zeigen, dass sich eine videobasierte Operationalisierung eignet, um Kompetenzkonstrukte, die über das Wissen hinausgehen, zu messen (zsf. s. Lindmeier, 2013). Folglich wird zur Messung der AC der Grundschullehrkräfte ein videobasierter Zugang gewählt mit dem Ziel die AC, wie auch das BK und die RC von Grundschullehrkräften valide und reliabel zu erheben.

Stichprobe und Instrument

Die Stichprobe umfasst $N = 85$ Lehrkräfte aus Schleswig-Holstein, die regelmäßig Mathematik unterrichten. Sie sind im Mittel 45,3 Jahre alt (25-65 Jahre) überwiegend weiblich (89,4 %) und 51,8 % haben Mathematik als Unterrichtsfach studiert (M).

Es wurde ein computerbasierter standardisierter Test mit insgesamt 26 Items entwickelt. Der Test fokussiert inhaltlich auf den Bereich Arithmetik. Es wurden unterschiedliche Itemtypen realisiert, um die Anforderungen der drei Strukturkomponenten abzubilden: Zur Erfassung der AC wurden acht, ausschließlich videobasierte Items entwickelt. Die Lehrkräfte hatten begrenzt Zeit, um am Ende des Videos direkt mündlich auf die Fragen/Aussagen der Lernenden einzugehen. Die RC (9 Items) wurde teils durch videobasierte, teils bildbasierte Items erhoben, wobei die Lehrkräfte für ihre mündlichen bzw. schriftlichen Antworten ausreichend Zeit hatten. Schließlich wurde das BK (9 Items) durch Aufgaben ähnlich denen aus Papier-Bleistiftbasierten Wissenstests operationalisiert. Die Lehrkräfte bearbeiteten den Test in ihrer eigenen Geschwindigkeit und benötigten im Mittel 68 min (42-88 min). Zu Beginn des Tests bekamen die Lehrkräfte eine technische Einführung, in der auch Beispielitems eingesetzt wurden.

Zunächst wurden die audiografierten Antworten transkribiert. Dann wurden die Antworten durch zwei geschulte Rater unabhängig voneinander anhand eines Kodiermanuals bewertet. In der Entwicklung wurden Erkenntnisse aus der Lehr-Lernforschung im Bereich der Arithmetik sowie Forschung zur Unterrichtsqualität berücksichtigt. Die Interkoderreliabilität für die einzelnen Aufgaben war moderat bis hoch (κ = .74-.94). Der Anteil fehlender Werte (z. B. Item übersprungen, technische Probleme) ist gering (2 %).

Ergebnisse: Machbarkeit

Zur Prüfung der Reliabilität der theoretisch trennbaren Einzelskalen BK, RC und AC wird die interne Konsistenz (Cronbachs Alpha) untersucht und mit der Gesamtskala verglichen um zu überprüfen, ob die Einzelskalen eine höhere interne Konsistenz aufweisen. Hierzu wurden mit der Spearman-Brown Formel ein extrapoliertes Alpha berechnet (Tabelle 1).

Skala (Skalenlänge)	Cronbachs Alpha (SE)	extrapoliertes Alpha[1] für Skalenlänge 11	M (SD)
BK (7 Items)	.68 (.03)	.77	.55 (.12)
RC (7 Items)	.64 (.04)	.73	.49 (.20)
AC (8 Items)	.69 (.02)	.76	.38 (.15)
Gesamtskala (22 Items)	.83 (.01)	.70	.47 (.17)

[1] nach Spearman-Brown Formel

Tabelle 1: Interne Konsistenz der Einzelskalen und der Gesamtskala

Aus der BK und RC Skala wurden jeweils zwei Items entfernt, da diese empirisch zu schwer oder nicht zu den Skalen passend waren. Die Kennwerte sind dann für die angenommen Skalen und unter Berücksichtigung der offenen und heterogenen Itemformate akzeptabel. Die extrapolierten Alphas der Skalen BK, RC und AC sind etwas größer als für die Gesamtskala, so dass diese für die weitere Auswertung herangezogen werden.

Skala	M		Prüfgröße T-Test $t(82)$	Effektgröße Cohens d
	Lehrkräfte M $N = 43$	Lehrkräfte oM $N = 41$		
BK	64.63	46.62	3.91**	0.87
RC	55.58	41.68	2.82*	0.62
AC	37.39	37.39	0.00	0.0
Gesamtskala	52.10	46.62	2.86*	0.63

* $p < .01$, ** $p <.001$

Tabelle 2: Mittelwertsunterschiede der Lehrkräfte mit/ohne Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik

Um die diskriminierende Validität der Subskalen zu prüfen, wurden die Mittelwertsunterschiede der Lehrkräfte M und oM auf statistische Signifikanz geprüft (Tabelle 2). Die Mittelwerte der Gruppen unterscheiden sich für BK, RC und die Gesamtskala mit einem mittleren bis hohen Effekt, so dass Lehrkräfte mit Ausbildung im Fach bessere Werte erreichen. Allerdings unterscheiden sich die Mittelwerte der Lehrkräfte M und oM für AC nicht signifikant.

Zusammenfassung und Diskussion

In der vorliegenden Arbeit konnte das erweiterte Strukturmodel der fachspezifischen Lehrkognition erfolgreich für Grundschullehrkräfte operationalisiert werden. Dabei konnten die angenommenen handlungsnahen Kompetenzkonstrukte (RC, AC) vom fachspezifischen Wissen empirisch trennbar erhoben werden. Der Vergleich der Lehrkräfte mit bzw. ohne Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik gibt einen ersten Hinweis auf Konstruktvalidität für BK und RC. In diesem ersten Zugang gelang es nicht zufriedenstellend, die angenommenen Unterschiede in der AC abzubilden. Eine mögliche Erklärung wäre, dass in dieser ersten Operationalisierung prototypische Situationen des Anfangsunterrichts genutzt wurden. Um das Konstrukt in seiner vollen Breite abzubilden müssen weitere Items entwickelt werden. Es bleibt zudem die prädiktive Validität der entwickelten Maße für unterrichtliches Handeln zu prüfen. Insgesamt liefert dieser Zugang allerdings durch seinen differenzierten Blick auf fachspezifische Lehrerkognition einen vielversprechenden Ausgangpunkt, um die Genese fachspezifischer Lehrerkognition detailliert untersuchen zu können.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G., Döhrmann, M., Suhl, U. & Lehmann, R. (2010). Mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich. In S. Blömeke, G. Kaiser, & R. Lehmann (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich* (pp. 195–251). Münster: Waxmann.

Koeppen, K., Hartig, J., Klieme, E. & Leutner, D. (2008). Current issues in competence modeling and assessment. *Journal of Psychology, 216*(2), 61–73.

Lindmeier, A. (2011). Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers: A threefold Domain-Specific Structure Model for Mathematics. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik: Vol. 7. Münster: Waxmann.

Lindmeier, A. (2013). Video-vignettenbasierte standardisierte Erhebung von Lehrerkognitionen. In U. Riegel & K. Macha (Hrgs.). *Videobasierte Kompetenzforschung in den Fachdidaktiken* (pp. 45–62). Münster: Waxmann.

Richter, D., Kuhl, P. & Reimers, H. (2012). Aspekte der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften in der Primarstufe. In P. Stanat., H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011* (pp. 237–251). Münster: Waxmann.

Tiedemann, J. & Billmann-Mahecha (2007). Macht das Fachstudium einen Unterschied? Zur Rolle der Lehrerexpertise für Lernerfolg und Motivation in der Grundschule. *Zeitschrift für Pädagogik, 53*, 58–73.

Kerstin KOCH, Dresden

Schüler-Feedbackgeräte im Mathematikunterricht

Digitale Medien sind heute aus dem Schulalltag nicht mehr wegzudenken. Neben der bereits fest etablierten Computernutzung vollzieht sich an einer großen Zahl von Schulen der Wechsel von der bewährten Kreidetafel zum interaktiven Whiteboard. Dabei geht eine technische Einführung in die Bedienung der Software in der Regel nicht mit einer methodisch-didaktischen Schulung einher (vgl. Weigand, H.-G. et al., 2013).
Die schulische Realität können sich unsere Studenten in den Praktika bzw. später im Referendariat nicht aussuchen. Vielmehr wird von den jungen, frisch ausgebildeten Berufsanfängern häufig geradezu erwartet, dass sie sich den Herausforderungen der neuen Technik engagiert stellen und ihr aktuelles Wissen aus dem Studium einbringen. An der TU Dresden haben die Lehramtsstudenten verschiedene Gelegenheiten, in Tutorien, regulären und fakultativen Lehrveranstaltungen interaktive Tafeln und Feedbackgeräte kennen- und nutzen zu lernen.

Für das Beantworten von Fragen bzw. das Äußern von Meinungen stehen bei der Verwendung der Feedbackgeräte im Zusammenhang mit dem Fragenmanager der Tafelsoftware vielfältige Möglichkeiten zur Verfügung, z.B. Texteingaben, Gleichungen, Multiple Choice-Fragen, Sortieren nach einer Reihenfolge, ja/nein oder die Likert-Skala. Dabei sind verschiedene Einsatzszenarien vorstellbar: Eine Frage wird spontan (im Allgemeinen mündlich) gestellt und unmittelbar von allen Schülern beantwortet. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, Fragen so vorzubereiten, dass ein dazu passendes Flipchart gestaltet wird. Vorteilhaft ist dabei die Möglichkeit der Einbindung von Grafiken, Bildern oder sonstigen Visualisierungen. Die dritte Variante erlaubt es dem Lehrer Fragen so vorzubereiten, dass diese von den Schülern in eigener Zeiteinteilung bearbeitet werden. Hierbei erscheinen die Aufgaben nur auf den Schülergeräten. (vgl. Learner Response Systems, 2010)

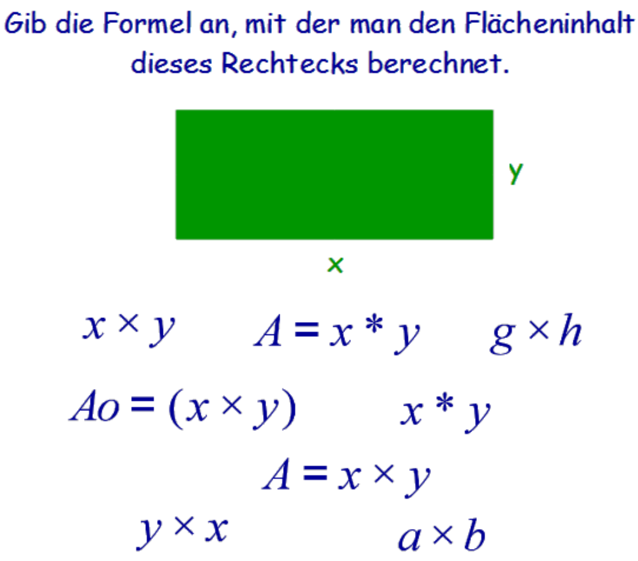
Die Ergebnisse können benannt oder anonym in verschiedenen Darstellungsformen unmittelbar auf dem Flipchart angezeigt werden. Sie stehen gespeichert auch später zur Verfügung und können immer wieder aufgerufen und ausgewertet werden. Das Anlegen einer Schülerdatenbank ist ebenso möglich wie der Export der Daten in ein Tabellenkalkulationsprogramm.

Beim Einsatz der Feedbackgeräte im Unterricht kann und soll jeder Schüler einbezogen werden. Dadurch ist es möglich, eine größere Vielfalt von Antworten, Aussagen oder Meinungen zu erhalten als sonst. Zudem erhält

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 627–630). Münster: WTM-Verlag

jeder Schüler unmittelbar eine Rückmeldung darüber, ob seine Antwort richtig ist bzw. wie sich seine Antwort in das Gesamtbild der Antworten seiner Mitschüler einfügt. Das gibt ihm Aufschluss über seinen individuellen Lern- bzw. Wissensstand. Andererseits bekommt der Lehrer einen Überblick über den Lern- bzw. Wissensstand der ganzen Klasse oder auch das Meinungsbild seiner Schüler und kann gegebenenfalls Lernbedürfnisse ableiten.

Es ist prinzipiell für jede Phase des Unterrichts und jede Sozialform denkbar, mit den Geräten zu arbeiten. Dabei muss die Nutzung nicht generell vom Lehrer ausgehen. Es ist auch sinnvoll, dass die Schüler selbst das System einsetzen, um z.B. im Rahmen von Vorträgen ihre Mitschüler aktiv einzubeziehen bzw. Rückmeldungen einzuholen.



Um zu Beginn der Unterrichtsstunde das Vorwissen der Schüler zu reaktivieren, können Fragen gestellt werden, die vorhandenes Wissen aufgreifen und als Basis für den weiteren Unterrichtsverlauf sichern. Die Möglichkeit, die Antworten auf dem Flipchart einzufügen, kann dazu dienen, Ideen zu strukturieren, zu ergänzen und Ausgangspunkt für die Erstellung einer Mindmap sein.

Stundeneinstiege sind oft übende Wiederholungen. Hier eignen sich Aufgabenformate, wie sie als hilfsmittelfreie Basiskompetenzen in Abschlussprüfungen gefordert werden und langfristig gesichert werden müssen. Zudem kann sich der Lehrer im Laufe der Zeit einen Aufgabenfundus anlegen, der ihm stets schnell, unkompliziert, variabel und effektiv hinsichtlich der Auswertung zur Verfügung steht.

Es kann sinnvoll sein, auch bei der Einführung neuer Begriffe, der Erarbeitung sehr komplexer Sachverhalte, bei Herleitungen, Beweisführungen o.Ä. Verständnisfragen zu stellen, um Fehler als Indikatoren von Schülervorstellungen zu erkennen. Die Zwischenfrage „Habt ihr das verstanden?“ wird oft spontan und automatisch mit einem Nicken beantwortet, auch wenn sich später herausstellt, dass es sehr wohl Unklarheiten gibt und der „Faden“ zwischendurch verloren ging.

Je nach gewählter Sozialform lassen sich ebenso Ergebnisse aus Partner- oder Gruppenarbeitsphasen zusammentragen und für den weiteren Erkenntnisgewinn nutzen. Dazu braucht in jeder Lerngruppe nur ein Gerät zur Verfügung zu stehen. Die Diskussion in der Lerngruppe und das Sich-Verständigen vor der Abgabe der Ergebnisse fördern Fähigkeiten des mathematischen Argumentierens und Kommunizierens. Dabei können Resultate zu Tage treten, die durchaus nicht im Erwartungshorizont des Lehrers lagen und im mündlichen Gespräch eventuell gar nicht genannt würden, da die „erwartete“ Antwort bereits gegeben wurde.
Auch Ergebnisse aus Datenerhebungen oder Experimenten können zusammengefasst und für die weitere Erarbeitung genutzt werden. Es ist sogar möglich, den Klassenraum zu verlassen, um Aufträge im Gelände, in einem Museum oder anderen Lernorten zu erfüllen.

Für eine Erstfestigung eignen sich Aufgaben, die an die ganze Klasse in gleicher Weise gerichtet werden und zunächst abschließend Aufschluss über das Verständnis geben. Der Umgang mit Fehlern kann durch die Anonymisierung sehr offen gestaltet werden.

Individualisiertes Üben und Differenzierung wird dadurch unterstützt, dass die Schüler bei der Bearbeitung von Fragen in eigener Zeiteinteilung durch die Fragen navigieren und bis zu neun Schwierigkeitsstufen durchlaufen können. Es ist sinnvoll, den Schülern ergänzend eine Übersicht der Aufgaben mit eventuell notwendigen Abbildungen und Grafiken in die Hand zu geben. Es bleibt dem Lehrer überlassen, ob die Rückmeldung über die richtige oder falsche Antwort übermittelt wird und ob es möglich ist, falsche Antworten zu korrigieren.

In erster Linie werden hier „Aufgaben zum Leisten“ (Leuders, Büchter 2011, S. 165 ff.) geeignet sein. Sie gestatten dem Schüler, das eigene Verstehen zu überprüfen, auf Fehler „anonym“ hingewiesen zu werden, selbst Fehler zu korrigieren oder sich Hilfe einzufordern.

Der Lehrer erhält unmittelbar den Gesamtüberblick und kann sowohl individuelle Schülerleistungen nachvollziehen als auch das Leistungsspektrum der ganzen Klasse einschätzen. Die Dokumentation der Leistungsentwicklung der Klasse bzw. einzelner Schüler mithilfe der Schülerdatenbank ist für den Lehrer ein hilfreiches diagnostisches Werkzeug.

Über einen längeren Zeitraum regelmäßig für bestimmte Aufgabenformate eingesetzt (Basiswissen, rechnerfreie Fertigkeiten …), können Lehrer Lernfortschritte einzelner Schüler feststellen, Defizite aufzeigen und damit auch individuellen Forder- und Förderbedarf erkennen. In Beratungssituationen mit Schülern und Eltern lassen sich gezielt Lernbedürfnisse aufzeigen.

Wenn es darum geht, einen Einblick in den Lernprozess der Schüler zu gewinnen, dann kann die Nutzung dieser Feedbacksysteme durch die Rückmeldung über den aktuellen Stand ein hilfreiches Instrument sowohl für den Schüler als auch den Lehrer sein. Insbesondere dann, wenn man sich mit diesen Fragen auseinandersetzt: Was sind gute Fragen beim Einsatz der Schülerantwortsysteme? Worin besteht das Diagnosepotenzial einer Aufgabe? (Leuders, Büchter, 2011, S. 168)

Zum Schluss noch einige praktische Erfahrungen: Abgesehen von den materiellen Voraussetzungen und der Abhängigkeit von funktionierender Technik setzt die Verwendung dieser oder anderer Schüler-Antwort-Systeme eine gründliche Einarbeitung in die Software voraus. Die Erstellung der Fragen, insbesondere die Einbettung in adäquat gestaltete Flipcharts ist sehr zeitaufwändig, ehe ein großer Aufgabenpool zur Verfügung steht. Die Einbindung mathematischer Terme und Gleichungen ist nur eingeschränkt möglich. Grafische Darstellungen und Abbildungen können nicht an die Schülergeräte übertragen werden. Das Zuordnen der korrekten Antwort funktioniert nicht immer zuverlässig.

Seitens der Schüler gibt es bei der Anwendung kaum Probleme. Die Bedienung Geräte ist sehr intuitiv und kommt den Schülern durch den Umgang mit Mobiltelefonen, Smartphones und Tablets vertraut vor.

Für uns besteht ein Arbeitsschwerpunkt darin, Unterrichtsbeispiele zu entwickeln, die das didaktische Potenzial der interaktiven Tafeln und der Feedbacksysteme in den Mittelpunkt stellen.

Literatur

Weigand, H.-G., vom Hofe, R., Ruppert, M. (2013). Die interaktive Tafel im Mathematikunterricht. *mathematik lehren, 178, S. 2 – 7*

Learner Response Systems. Schnellstartanleitung. TP 1788-DE Ausgabe 1, 2010, http://www1.prometheanplanet.com/de/upload/pdf/Schnellstartanleitung_ActiVote.pdf, zuletzt abgerufen am 17.03.2014

Leuders, T., Büchter, A. (2011). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*, Berlin: Cornelsen Scriptor 2011, S. 165 - 194

Promethean. Education Support Papers. (2013). Wie kann ein Schülerfeedback-System außerhalb des Klassenraums genutzt werden? Online verfügbar unter: http://www.prometheanworld.com/rx_content/files/PDF/deWiekann08_Schlerfeedback_auerhalb_Klassenzimmer_fin-178709.pdf, zuletzt abgerufen am 17.03.2014

Promethean. Education Support Papers. (2013). Wie kann Schülerfeedback mit ActivExpression formatives Assessment fördern? Online verfügbar unter: http://www.1.prometheanplanet.com/de/upload/pdf/ActivExpression_2_Formatives_Assessment.pdf, zuletzt abgerufen am 17.03.2014

Sebastian KOLLHOFF, Bielefeld

Elementare Transferprozesse in der Bruchrechnung

Das Gelingen von Transferprozessen beim Lernen gilt sowohl in der empirischen Lernforschung, als auch insbesondere im schulischen Lernkontext als wesentliches Kriterium für die Permanenz des Gelernten. Tragfähige, hinreichend vernetzte, flexible und bereichsunabhängig aktivierbare Wissensstrukturen zeichnen sich dadurch aus, dass sie auch in unbekannten wie komplexen Situationen und Lernanforderungen angewandt werden können. So wird die Lösung von Transferaufgaben im schulischen Kontext wie auch in empirischen Studien häufig zur Bewertung des Erfolgs von Lernprozessen herangezogen. Nicht zuletzt aus diesem Grund ist das Ausbleiben von Transfer einer der häufigsten Befunde der psychologischen wie fachdidaktischen Lernentwicklungsforschung.

In Anbetracht der hohen Bedeutungszuschreibung von Transferprozessen für das Lernen, stellt sich eine Antwort auf die Frage, was konkret unter einem Transfer zu verstehen ist, höchst divergent dar. Verallgemeinernde Definitionen, wie etwa von Mähler und Stern (2010, S. 859) beschreiben Transfer als „die erfolgreiche Anwendung angeeigneten Wissens bzw. erworbener Fertigkeiten im Rahmen einer neuen, in der Situation der Wissens- bzw. Fertigkeitsaneignung noch nicht vorgekommenen, Anforderung“. In der Literatur gibt es jedoch eine Vielfalt von Definitionen und Theorien aus verschiedenen Disziplinen und im Laufe der empirischen Erforschung von Transferprozessen wurde eine Vielzahl von Transferbegriffen vorgeschlagen, die eine Unterscheidung auf einem Kontinuum verschiedener Qualitäten des Transfers in eng umschriebenen Wirkungsdimensionen repräsentieren (eine ausgewählte Übersicht findet sich zum Beispiel bei Mähler & Stern, 2010).

So vielfältig sich die Unterscheidungen zwischen verschiedenen Transferqualitäten darstellen, verhält es sich auch mit theoretischen Erklärungen für erfolgreichen (vgl. z.B. Mähler & Stern, 2010; Steiner, 2006; Goldstone & Day, 2012) und ausbleibenden Transfer. So unterscheidet etwa Renkl (1996) in einem Übersichtsartikel zum Phänomen ausbleibenden Transfers zwischen

- Strukturdefiziterklärungen, die das Ausbleiben von Transfer auf strukturelle Defizite im Wissen zurückführen,
- Metaprozesserklärungen, die eine fehlende Aktivierung von vorhandenen Wissensstrukturen zum Beispiel durch defizitäre metakognitive Steuerungsprozesse erklären und

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 631–634). Münster: WTM-Verlag

- Situiertheitserklärungen, die träges Wissen über die situative Gebundenheit bzw. die Bereichsspezifität des Wissens erklären.

Steiner resümiert in einem Lehrbuchbeitrag zum Transfer, dass „was da wirklich transferiert wird, nicht leicht zu sagen [ist]; die Forschung ist kompliziert, bewegt sich in Mikrowelten und gestattet wenig Verallgemeinerung etwa im Hinblick auf schulische Lernprozesse“ (Steiner, 2006, S. 202). Insbesondere in der experimentalpsychologischen Literatur findet sich eine Vielzahl von Studien zu Transferprozessen mit mathematischen Konzepten als Untersuchungsgegenstand. Die Betrachtung dieser Untersuchungen wirft besonders in einem mathematikdidaktischen Kontext Fragen auf und offenbart Forschungsdesiderata:

- Die psychologische Forschung konzentriert sich häufig auf schematische Inhalte und Problemlösesituationen, wie etwa das Umformen von Gleichungen (vgl. z.B. Sweller & Cooper, 1985) oder der Anwendung von Pfadregeln in der Stochastik. Inwieweit sich jedoch Transferprozesse beim Begriffsverständnis oder bei der Entwicklung tragfähiger inhaltlich mathematischer Vorstellungen vollziehen bleibt weitestgehend offen.
- Die Studien folgen im wesentlichen zwei Paradigmen: Zum einen haben sie einen Laborcharakter und es wird in kontrollierten instruktionalen Settings eine spezifische Verhaltensänderung der Probanden gefordert. Zum anderen bestehen sie in Einzelfallstudien (vgl. z.B. Wagner, 2006), die zum Teil ebenfalls unter Laborbedingungen Wahrnehmungs- und Verhaltensänderungen einzelner Probanden über einen mehrstündigen Lehrgang verfolgen. Die Studien werden zumeist mit Studierenden und nicht mit Schülern durchgeführt. Inwieweit sich die hier gewonnen Kenntnisse auf einen schulischen Lernkontext übertragen lassen ist nicht geklärt.

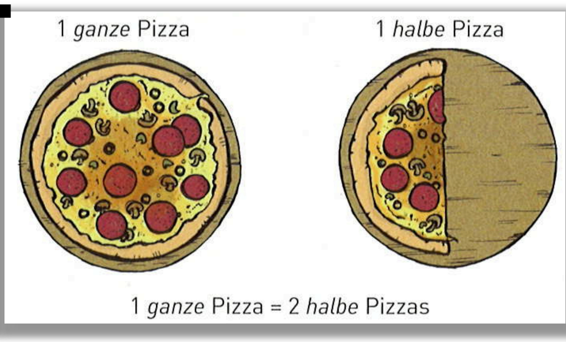
Für den Mathematikunterricht können Analysen von Schülervorstellungen auf einer *normativen stoffdidaktischen Ebene*, die im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergleitet werden und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs und dessen inhaltlich mathematischen Kerns beschreiben, erfolgen oder auf *deskriptiver Ebene* Aufschluss über die individuellen und subjektiven Erklärungsmodelle der Schüler geben (vgl. vom Hofe, 1995). In der Forschung dominieren deskriptive Analysen, die Fertigkeiten von Schülern über mathematische Aufgaben erfassen und beschreiben. Insbesondere in Bezug auf Transferprozesse beim Mathematiklernen bilden sich in den Fähigkeitsstrukturen der Schüler zwangsläufig Gegenstandsstrukturen mit ab (vgl. Bauersfeld, 1985), die aus einer stoffdidaktischen Perspektive bisher nicht eindeutig identifiziert sind. Zudem mangelt es an einer theoretischen Fundierung für die Analyse von Variationen, die eine Aufgabe zu einer Transferaufgabe machen.

Im Folgenden wird exemplarisch anhand eines Beispiels aus der Bruchrechnung veranschaulicht, wie sich Transferprozesse normativ auf drei Ebenen charakterisieren lassen.

Zwei Freunde teilen sich gleichmäßig *eine* Pizza. Jeder bekommt eine *halbe* Pizza.

a) Wie viel bekommt jeder, wenn sich 3, 4, 5, 6 Freunde eine Pizza teilen? Zeichne auch.

b) Wie viele drittel, viertel, fünftel, sechstel Pizzas ergeben jeweils eine ganze Pizza?



Aus: vom Hofe, R. et al. (2012): *Mathematik heute 5*. Braunschweig: Schroedel Verlag, S. 170.

Von dieser Aufgabe ausgehend lassen sich Transferschritte auf der *Ebene des Objekts und der situativen Einbettung*, der *Ebene der Repräsentation* und der *Ebene der zugrunde liegenden Grundvorstellung* im Sinne der konzeptuellen Vorstellungsentwicklung aufzeigen.

Die Pizza als konkreter Gegenstand soll auf zwei Freunde gleichmäßig verteilt werden. Die Anteilbildung erfolgt zunächst auf einer anschaulichen Ebene und ist, obgleich sie in der Aufgabe grafisch vorgegeben wird, an eine konkrete Handlung und einen spezifischen subjektiven Erfahrungsbereich (Bauersfeld, 1985) gebunden. Für einen Transferschritt auf Ebene des Objekts bzw. der Situation könnte die Pizza auch durch eine Torte oder ein Blatt Papier ersetzt werden, ohne dass sich an der primären Handlungsvorstellung etwas ändert. Wird die Pizza jedoch durch eine abstrakte Größe, z.B. eine Strecke mit 1 km Länge, ausgetauscht, ändern sich die situativen Handlungsmöglichkeiten und –einschränkungen (vgl. Greeno, Smith & Moore, 1993). Für die Aufgabenbearbeitung müssen andere spezifische Größenvorstellungen aktiviert werden, und sie ist nicht ohne weiteres an einem konkreten Gegenstand durchführbar.

In Aufgabenteil a) soll die Pizza auf mehr als zwei Personen verteilt werden. Die zugehörige externe Repräsentation soll eigenständig erstellt werden. Eine naheliegende Darstellung wäre an dieser Stelle die Repräsentation als Kreis, der mit Hilfe der Winkelteilung in die entsprechende Anzahl von Teilen zerlegt wird. Ein Transferschritt in Form einer Übersetzung in eine andere Darstellung besteht z.B. in der Wahl eines Rechtecks als Repräsentation der Pizza, wodurch eine gerechte Teilung vereinfacht wird.

Durch eine Übersetzung in ein sprachliches Register (vgl. Duval, 2006) ist die Aufgabe über die Deutung des Nenners als Maßzahl ohne zusätzliche Vorstellungsaktivierung möglich.

Auf der Ebene der zugrundeliegenden Grundvorstellung wird bereits in Aufgabenteil a) ein Transferschritt erfordert, indem das Halbieren einer Pizza auf eine Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsteilung erweitert werden muss. Während das Verteilen an zwei und vier Personen durch fortgesetztes Halbieren noch über alltagsgebundene Handlungsvorstellungen erfolgen kann, so sind diese für ein Fünftel oder Sechstel möglicherweise weniger ausgeprägt und erfordern eine schematische Erweiterung der konkreten Handlungsvorstellung. In Aufgabenteil b) wird eine Inversion erfordert, indem nicht mehr von einem Ganzen auf den Teil, sondern von einem Teil auf die Beschaffenheit des Ganzen geschlossen werden muss. Die zugrundeliegende Handlungsvorstellung ist nicht mehr die eines Teilungsprozesses, sondern das Zusammenfügen von gleichen Teilen im Sinne einer fortgesetzten Addition oder der n-fachen Vervielfachung des betrachteten Anteils.

Literaturverzeichnis

Bauersfeld, H. (1985): Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In: W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.): *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, S. 7-26.

Duval, R. (2006): A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics*, 61, S. 103-131.

Goldstone, R.L. & Day, S.B. (2012): Introduction to „New Conceptualizations of Transfer of Learning“. In: *Educational Psychologist*, 47(3), S. 149-152.

Greeno, J.G., Moore, J.L. & Smith, D.R. (1993): Transfer of Situated Learning. In: D.K. Dettermann & R.J. Sternberg (Hrsg.): *Transfer on Trial: Intelligence, Cognition, and Instruction*. Norwood: Ablex, S. 99-167.

Mähler, C., Stern, E. (2010): Transfer. In: D.H. Rost (Hrsg.): *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie.* 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. Weinheim, Basel: Beltz, S. 859-869.

Renkl, A. (1996): Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. In: *Psychologische Rundschau*, 47, S. 78-92.

Steiner, G. (2006): Lernen und Wissenserwerb. In: A. Krapp & B. Weidemann (Hrsg.): *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch.* 5., vollständig überarbeitete Auflage. Weinheim, Basel: Beltz Verlag, S. 137-202.

Sweller, J. & Cooper, G. (1985): The Use of Worked Examples as a Sutstitute for Problem Solving in Learning Algebra. In: *Cognition and Instruction*, 2(1), S. 59-89.

Vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Wagner, J.F. (2006): Transfer in Pieces. In: *Cognition and Instruction*, 24(1), S. 1-71.

David KOLLOSCHE, Potsdam

Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts

Während die normative Frage, was Mathematikunterricht leisten soll, ein traditionelles Arbeitsfeld der Mathematikdidaktik ist, gibt es auf die deskriptive Frage, was gegenwärtiger Mathematikunterricht an deutschen Sekundarschulen tatsächlich leistet, kaum Antworten. Dabei hat gerade eine soziologische Analyse der gesellschaftlichen Funktionen des Mathematikunterrichts das Potential, diesen in seinen Möglichkeiten und Grenzen zu erkennen, auf diese in Forschung und Praxis zu reagieren und so Zielkonflikte zu vermeiden, welche dem Erfolg mathematikdidaktischer Interventionen im Wege stehen können.

Helmut Fends legte mit einer Soziologie der Schule (1974) eine Typologie gesellschaftlicher Funktionen von Schule vor. Demnach hat Schule nicht nur die Aufgabe einer Qualifikation der Heranwachsenden, sondern muss die bestehenden Formen gesellschaftlichen Denkens und Tuns legitimieren, die Schüler in diese Formen integrieren und sie schließlich an geeigneten Maßstäben bewerten. Da Studien wie die von Jean Lave (1988) zeigen, dass außerschulisch verwendete Mathematik meist nicht in der Schule, sondern im Verwendungskontext gelernt wurde, und da die Inhalte des Mathematikunterrichts ab der achten Klasse in der Regel nur von wenigen Menschen außerschulisch verwendet werden (vgl. Heymann 1996, S. 153), ist der Qualifikationsfunktion des Mathematikunterricht zumindest skeptisch zu begegnen und zu vermuten, dass andere gesellschaftliche Funktionen wenigstens ebenso prägend sind.

Fraglich ist also, welches gesellschaftliches Denken und Tun im Mathematikunterricht legitimiert und kultiviert wird. Erste Anhaltspunkte dazu finden sich in kritischer Forschung zum Mathematikunterricht. So heißt es bei Christine Keitel (1979) und Philipp Ullmann (2008), dass der Mathematikunterricht die Mathematik als gesellschaftliches Machtmittel etabliere, indem er vermittle, dass alle weltlichen Probleme mathematisierbar und dann eindeutig lösbar seien. Roland Fischer (2001) und Ole Skovsmose (2005, S. 11f.) verweisen auf unterschiedliche Aspekte der Verwandtschaft von Mathematik und Bürokratie, so dass wenigstens die Frage im Raum steht, inwiefern der Mathematikunterricht bürokratisches Denken vorbereitet. Schließlich sehen soziolinguistisch inspirierte Beiträge (Dowling 1998) im Mathematikunterricht allgemein eine Institution zur Reproduktion und Inthronisierung elaborierter Formen des Denkens und Sprechens.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 635–638). Münster: WTM-Verlag

Problematisch ist an diesen Beiträgen jedoch zweierlei: Zum einen sind sie soziologisch nicht konsistent, sondern verwenden oft unterschiedliche, sich teilweise widersprechende soziologische Ansätze in willkürlicher Zusammenstellung, was die Interpretation der vorgebrachten Thesen erheblich erschwert. Nötig ist stattdessen eine Soziologie des Mathematikunterrichts, die die Funktionen von Mathematikunterricht sowohl auf der gesellschaftlichen Makroebene, als auch auf der individuellen Mikroebene zu beschreiben imstande ist. Zu diesem Zweck lässt sich die Soziologie von Michel Foucault ausarbeiten (vgl. Kollosche 2012). Zum anderen betrachten diese Beiträge die Mathematik in ihrer reinen Form meist als Phänomen jenseits kultureller Einflüsse, welches erst durch die Form seiner Anwendung oder Lehre politisch wird. Eine solche Sicht versperrt jedoch den Blick auf kulturelle Dimensionen der Mathematik an sich, weshalb diese in den genannten Beiträgen selten zum Untersuchungsgegenstand werden. Um diese Lücke zu schließen, wurden in genealogischen Studien zur Logik (vgl. Kollosche 2013a) und zum Rechnen (vgl. Kollosche 2013b) zwei zentrale Aspekte von Mathematik unter die soziologische Lupe genommen.

Die gemeinsame Betrachtung der gesellschaftlichen Makro- und Mikroebene gelingt Foucault (1994) durch seinen Begriff der Führungstechniken, deren Verfügung das ist, was Foucault Macht nennt. Er unterscheidet zwischen Techniken zur Führung anderer und Techniken zur Führung des Selbst und interessiert sich besonders für sogenannte Disziplinartechniken, d. h. Techniken zur Führung anderer *durch* deren Selbstführungstechniken. Eine schlechte Note für Fehler beim Konstruieren im Geometrieunterricht dient als Technik zur Führung anderer (der Schüler) durch den Lehrer; doch um wie vom Lehrer erwünscht konstruieren zu können, muss der Schüler Selbstführungstechniken ausbilden – ein Prozess, den Foucault Askese nennt, den der Lehrer nicht steuern kann, der je individuell verläuft und der schließlich zur Internalisierung ursprünglich externer Forderungen durch das Individuum führt. In dieser Internalisierung sieht Foucault die Effizient der in der Neuzeit populären Disziplinartechniken: sie müssen sich nicht bestätig aufdrängen, sondern wirken alsbald aus dem Einzelnen heraus, wie womöglich aus dem Schüler, der nun auch von anderen saubere Konstruktionen erwartet und auch außerhalb des Mathematikunterrichts gewissenhaftere Zeichnungen anstellt.

Da der Mathematikunterricht die Schüler Situationen aussetzt, die nur mathematisch zu bewältigen sind, in keinem Fall jedoch die genaue Technik zur Lösung vorgeben wird, lässt er sich verstehen als Disziplinarinstitution, die bestimmte Formen des gesellschaftlichen Denkens legitimiert und kultiviert, den Schülern also eine entsprechende Askese abverlangt.

Indem das Verständnis mathematischer Konzepte mit dem logischen eine sehr spezielle Form des Denkens verlangt, ist die Beschäftigung mit Mathematik eine Disziplinartechnik, welche eine Askese im logischen Denken verlangt. Damit wird im Mathematikunterricht eine Form des Denkens und Sprechens legitimiert, welche religiöse, epistemologische und politische Dimensionen hat. Einerseits bietet die Logik Beruhigung durch Wahrheitsglaube, eine Ordnung des Denkens und eine Technik zur Konsensfindung jenseits physischer Gewalt; andererseits führt sie zu einem statischen Weltbild, einer Reduktion des Denkbaren und zur Etablierung neuer Unterdrückung (vgl. Kollosche 2013a).

Neben der Logik und anderen ist auch das Rechnen ein zentraler Aspekt der Mathematik, insbesondere im Mathematikunterricht. Für das Rechnen lässt sich an Hand der Genese des Rechnens (Krämer 1988) und Max Webers Theorie der Bürokratie (1972, S. 551ff.) nicht nur aufzeigen, dass Entwicklungsschübe in der Formalisierung des Rechens meist zeitlich und örtlich mit der Etablierung bürokratischer Verwaltungsstrukturen einhergehen, sondern auch, dass beide sehr ähnlicher Selbstführungstechniken bedürfen. Sowohl das Rechnen als auch die Bürokratie reduzieren reale Probleme auf Modelle bzw. Fälle, also auf eine regelhaft handhabbare Vereinfachungen, die im Folgenden an Hand fremdbestimmter Regeln und unter Ignoranz aller persönlicher Empfindungen zu bearbeiten sind. Dazu bedarf es seitens des Bearbeiters nicht nur der Fähigkeit zur reduktionistischen Wahrnehmung von Wirklichkeit in Fällen, zu ihrer rein regelhaften Bearbeitung und zum Ausschalten aller persönlichen Einflüsse, sondern auch der Bereitschaft dazu. Diese Fähigkeit und Bereitschaft im Heranwachsenden auszubilden und so jene unpersönliche Verwaltung zu ermöglichen, welche in der Neuzeit gerecht genannt wird, mag eine Funktion des Rechenunterrichts sein (vgl. Kollosche 2013b).

In beiden Fällen sind die Disziplinartechniken, die eine Askese zum logischen bzw. bürokratischen Denken anstoßen, so gestaltet, dass sie dem Schüler idealtypisch nur die Wege der Komplizenschaft oder Askese offenhalten. Entweder ist der Schüler fähig und willig, logisch bzw. bürokratisch zu denken und zu handeln, und ermöglicht sich dadurch Erfolgserlebnisse im Mathematikunterricht sowie gute Bewertungen, oder er nicht dazu nicht fähig oder nicht willig, in welchem Fall er sich durch andauernde Misserfolgserlebnisse gepeinigt vom Mathematikunterricht und der Mathematik abwenden wird. Auf diese Weise produziert der Mathematikunterricht auf der einen Seite Komplizen seiner Machttechniken und sorgt auf der anderen Seite dafür, dass Zweifler nicht aufbegehren, sondern verstummen und das Feld den Willigen überlassen. Eine solche Wirkungsweise hatte

Skovsmose (2005, S. 11f.) freilich schon allgemein hinter dem Mathematikunterricht vermutet. In der Tat können erst durch dieses Verhindern eines Dissenses bezüglich der Legitimität des logischen Denkens und des Rechnens beide zu gesellschaftstragenden Führungstechniken avancieren.

Abgesehen vom moralischen Dilemma, welches durch den Konflikt zwischen gesellschaftstragender Sozialisation einerseits und individuellem Emanzipationsbestreben andererseits entsteht, führen die obigen Überlegungen zur Einsicht, dass eine soziologische Betrachtung des Mathematikunterrichts mathematikdidaktisch durchaus relevante Erkenntnisse bereithält, das Forschungsgebiet jedoch noch in seinen Kinderschuhen steckt. Es bleibt zumindest die Hoffnung, dass eine weitere soziologische Untersuchung des Mathematikunterrichts dazu beträgt, seine gesellschaftlichen Funktionen besser zu verstehen und mathematikdidaktisch effizienter auf diese reagieren zu können.

Literatur

Dowling, Paul (1998) *The Sociology of Mathematics Education.* Falmer: London.

Fend, Helmut (1974) *Gesellschaftliche Bedingungen schulischer Sozialisation.* Beltz: Weinheim.

Fischer, Roland (2001) »Mathematik und Bürokratie« in Lengnink et. al. (Hg.) *Mathematik und Mensch. Sichtweisen der allgemeinen Mathematik.* Allg. Wiss.: Mühltal. S. 53-64.

Foucault, Michel (1994) »Wie wird Macht ausgeübt?« in Dreyfus & Rabinow (Hg.) *Michel Foucault. Jenseits von Strukturalismus und Hermeneutik.* Beltz: Weinheim. S. 251-261.

Heymann, Hans Werner (1996) *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz: Weinheim.

Keitel, Christine (1979) »Sachrechnen« in Dieter Volk (Hg.) *Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht.* Wilhelm Fink: München. S. 249-264.

Kollosche, David (2012) »Foucault und Mathematikdidaktik – eine fruchtbare Mischung?« in Ludwig & Kleine (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.* VTM: Münster.

Kollosche, David (2013) »Logik, Gesellschaft, Mathematik« in Martin Rathgeb (Hg.) *Mathematik im Prozess.* Springer: Wiesbaden. S. 29-40.

Kollosche, David (2013) »Bürokratie und Rechnen im Mathematikunterricht« in Greefrath et. al. (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013.* VTM: Münster.

Krämer, Sybille (1988) *Symbolische Maschinen.* WBG: Darmstadt.

Lave, Jean (1988) *Cognition in Practice. Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life.* Cambridge University Press: Cambridge.

Skovsmose, Ole (2005) *Travelling Through Education. Uncertainty, Mathematics, Responsibility.* Sense: Rotterdam.

Ullmann, Philipp (2008) *Mathematik, Moderne, Ideologie. Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik.* UVK: Konstanz.

Weber, Max (1922) *Wirtschaft und Gesellschaft. Grundriss der verstehenden Soziologie.* Erw. Ausgabe von 1972. Hg. von Johannes Winckelmann. Mohr: Tübingen.

Jana KOLTER, Potsdam

So schwer kann das mit dem Bündeln doch nicht sein: Vorstellungen und Schwierigkeiten Studierender zum Bündelungsprinzip

1. Einleitung

„Für unser dezimales Stellenwertsystem sind zwei Ideen grundlegend, nämlich die Idee der Bündelung und die Idee des Stellenwertes“ (Padberg & Benz, 2011, S. 84). Es ist nicht nur für das Lesen und Schreiben von Zahlen wichtig, den Aufbau der Zahldarstellung zu verstehen; spätestens bei den Normalverfahren zu den Grundrechenarten wird auf die Bündelstruktur zurückgegriffen. Dass (angehende) Grundschullehrer/innen die Stellenwertsysteme grundlegend verstanden haben müssen, um Zahldarstellungen und die Rechenverfahren nicht nur anwenden und „vorzeigen“ sondern erklären und vermitteln zu können, versteht sich von selbst. Welche Kompetenzen Studierende tatsächlich zum Stellenwertsystem (mit den Ideen des Stellenwerts in der Zahldarstellung und der Bündelung) haben, wie sie sich entwickeln und welche Hürden dabei zu meistern sind, wird im hier ausschnittsweise beleuchteten Dissertationsprojekt untersucht[1]. Es zeigt sich, dass Bündeln als „echter Prozess“ für die meisten Studierenden nicht mehr präsent ist und dass sich viele den Aufbau der Zahldarstellung und insbesondere die Zusammenhänge zwischen Bündeln und Stellenwerten sowie zur Zahldarstellung mit Ziffern wieder neu erschließen müssen.

2. Bündeln als zentraler Prozess der Grundschul-Arithmetik

Zum Bündeln gibt es ein weites Netz aus Begrifflichkeiten, die auf verschiedenen Ebenen beschreiben, was Bündeln ist und umfasst. Man liest von konkreten und symbolischen Bündelungen als Ergebnisse von Bündelungs*prozessen*, welche als Vorgänge, die dem Bündelungs*prinzip* folgen, verstanden werden (z.B. Rödler, 2006) und deren Durchführung auf enaktiver, ikonischer oder symbolischer Ebene erfolgen kann. Diese Durchführung wird entweder konkret mit „echtem“ Material, mit Zeichnungen, mit Rechnungen und Symbolen oder später mental mit „vorgestelltem“ Material repräsentiert. Gerster und Schultz (2000) beschreiben die Verinnerlichung der konkreten Handlungen zu geistigen Aktivitäten als wichtigen Schritt beim Erwerb *mathematischer Vorstellungen*. Mit diesen soll dann – und das gilt umso mehr für (angehende) Lehrpersonen – ein *Übersetzen* zwischen enaktiver, ikonischer und symbolischer Darstellungsebene mög-

[1] Angegliedert an das Projekt KLIMAGS des khdm, www.khdm.de

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 639–642). Münster: WTM-Verlag

lich sein. Das Ergebnis eines Bündelungsprozesses ist eine Zahl*darstellung*, die durch Anordnungen von realen oder gezeichneten Objekten in Bündeln oder durch die Potenz- oder Ziffernschreibweise angegeben wird. Durch die Durchführung des Bündelns, die Verinnerlichung der Handlungen und die Thematisierung der verschiedenen aus dem Bündelprozess resultierenden Zahldarstellungen sollen *Grundvorstellungen* zu Zahlen ausgebaut werden, die dann die Übersetzung zwischen verschiedenen Zahldarstellungen ermöglichen(Wartha & Schulz, S. 6).

3. Empirische Untersuchung – Einbettung, Fokus, Methode

Der vorliegende Beitrag dokumentiert einen Ausschnitt eines Promotionsprojektes, welches sich mit Grundschul-Studierenden beschäftigt und anhand materialbasierter Interviews erforscht, wie die angehenden Mathematiklehrer/innen zu ihren Kompetenzen zum Bündeln (als Prozess) und zu verschiedenen Zahldarstellungen kommen. Dazu wurden zu vier Zeitpunkten im Studium (T1: Studienbeginn, N=15; T2: Ende 1. Semester, Fach-Arithmetik, N=14; T3: Ende 2. Semester, Didaktik der Arithmetik, N=10; T4: am Ende des gesamten Studiums, N=4) Interviews geführt, in denen u.a. Bündelungsvorgänge im Zehnersystem, auf welchem der Fokus dieses Beitrags liegt, und im Vierersystem mit unstrukturiertem Bündelmaterial (lose Deko-Steinchen) durchgeführt und erklärt werden sollten. Somit sollten neben dem „Fachwissen" auch die Kompetenzen, dieses in Handlung umzusetzen und diese zu beschreiben sowie das Erzeugen von und Übersetzen zwischen verschiedenen Zahldarstellungen erhoben werden.

Im Verlauf des Interviews wurden mit der Frage, mit welchem Vorgang man Kindern den Aufbau der Zahldarstellung mit der 10 als „Strukturierungszahl" nahebringen könnte, zunächst die Ideen der Testpersonen (TP) zum Bündeln erfragt. Es war die Hoffnung, dass trotz der Offenheit der Frage und ohne Prompt in Richtung des Bündelns einige Testpersonen von sich aus eine Bündelungshandlung 1) als adäquaten Vorgang erkennen / erinnern und 2) in der Lage sind, diesen verbal zu beschreiben. Entsprechend der Antwort folgten die weiteren Aufträge:

- Entsprach der geschilderte Vorgang einem Bündelungsvorgang (zumindest in Ansätzen), wurden 123 Dekosteine ausgehändigt und die Probanden gebeten, den beschriebenen Vorgang am Material zu demonstrieren.
- Wies der beschriebene Vorgang keine Bezüge zum Bündeln auf, wurden 123 Deko-Steine ausgelegt und die TP gebeten, diese zu zählen.

- Waren beim Zählen keinerlei Bündel-Ansätze zu erkennen, wurde das Interview an dieser Stelle beendet.
- Wurde beim Zählen eine Orientierung an (Zehner-)Bündeln offensichtlich, wurde dies den Probanden bewusst gemacht und dann im Interview fortgefahren.

Die Auswertung der Handlungen und Antworten erfolgt aufgabenweise induktiv in Anlehnung an die Vorgehensweisen der Grounded-Theory-Methode (Strübing, 2008; für genauere Informationen und erste Kategorie-Bildungen siehe Schneider & Kolter, 2014).

4. Ergebnisse

Insgesamt wurden sechs Personen (drei zu T1, je einmal T3 und T4) gebeten, die Steine zu zählen, da der von Ihnen verbal beschriebene Vorgang zur Verdeutlichung der sukzessiven Multiplikation mit 10 keine Bündelaktivitäten beinhaltet hatte. Fünf von ihnen wählten spontan die Zählstrategie, Zehnerhäufchen zu legen. Eine Bündelung zum Hunderter fand dann nicht mehr statt, da am Resultat „12 Zehnerpäckchen und drei einzelne Steine" die Anzahl bereits erkannt wurde. Von den sechs waren eine Testperson aus T1 und die aus T4 in der Lage, auf Nachfrage die Ziffern der 123 anhand der Steine zu erläutern.

Wie erwartet, zeigen sich große Unterschiede zwischen den verschiedenen Erhebungszeitpunkten. Je weiter die Testpersonen im Studium fortgeschritten sind, desto besser können sie Bündelungsvorgänge durchführen, die Schritte sowie die erzeugte Zahldarstellung kommentieren und den Bezug zu Ziffern- oder Potenzdarstellung herstellen. Es zeigen sich dabei aber sowohl innerhalb der Erhebungszeitpunkte als auch übergreifend Phänomene, von denen hier einige dargelegt werden. Die nachfolgende Tabelle zeigt drei Phänomene des Aufgabenbereichs „Zeigen des Vorgangs" und führt den inhaltlichen Kern einer Beobachtung sowie die Häufigkeiten des Auftretens je Erhebungszeitpunkt auf. Aus Platzgründen wird nur eine Auswahl von Phänomenen präsentiert, die Abweichungen vom „klassischen" Bündelalgorithmus oder sonstige Auffälligkeiten zeigt.

Inhaltlicher Kern des Phänomens	T1	T2	T3	T4
Bündelung nur bis zur Zehnerstufe. Durch Multiplizieren von 12 (Bündel) mit 10 (Steine pro Bündel) erkennen die TP die Anzahl und beenden die Handlung.	5	3	0	1
Bezeichnung von drei Einern als „ein Päckchen" / „ein Dreier" oder von zwei Zehnern als „ein Zwanziger".	2	2	1	0

Hunderter, Zehner und Einer werden an den Steinen gezeigt, danach scheitert die Zuordnung von Steinchen-Bild zur Zifferndarstellung oder sie ist konfus.	2	0	1	0

9 der 43 Testpersonen beenden die Handlung nach der ersten Bündelstufe, indem Sie ausrechnen, dass es 123 Steine sind (obwohl nicht nach der Anzahl gefragt war). Nur 5 von Ihnen können auf Nachfrage den Hunderter bilden und einen Zusammenhang zwischen Steinen und Zifferndarstellung herstellen. Ebenfalls Schwierigkeiten beim „Zuordnen“ von Bündeln zu Ziffern haben drei Studierende. Insb. wenn die zehn Zehner nicht kompakt zu einem Hunderter zusammengelegt werden, sondern die einzelnen „inneren Zehner“ des Hunderters noch sichtbar sind, fällt es ihnen schwer, den *einen* Hunderter zu sehen. Fünf Testpersonen identifizieren den Stellenbetrag (3 bzw. 20) auf einer Stelle und können diesen nicht in Stellenwert (1 bzw. 10) und Stellenbelegung (3 bzw. 2) zerlegen.

Insgesamt zeigt sich, dass – schon im Dezimalsystem! –Lücken bei einigen Studierenden vorhanden sind, was die Bündelungshandlung an sich und vor allem den adäquaten Wechsel der Darstellung in die Ziffernschreibweise anbelangt, die offenbar durch die theoretische Fach- und Didaktik-Ausbildung in der Universität nicht vollständig ausgeräumt werden konnten. Den Erkenntnissen aus der Schuldidaktik folgend (z.B. Rödler, 2006, S.152), scheint es daher auch an der Universität notwendig zu sein, fachliche Zusammenhänge, Darstellungen und Darstellungswechsel tatsächlich explizit zu behandeln und bewusst zu machen, um bei den angehenden Lehrern adäquate Kompetenzen zum Thema Stellenwertsysteme zu erreichen.

Literatur

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht: Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Springer.

Rödler, K. (2006). *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln*. Seelze-Velber: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Schneider, M. & Kolter, J. (2014). *Kategorisierung mathematischer Bündelungsprozesse von Grundschullehramtsstudierenden*. http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2014012444809.

Strübing, J. (2008). *Grounded Theory - Zur sozialtheoretischen und epistemologischen Fundierung des Verfahrends der empirisch begründeten Theoriebildung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Wartha, S. & Schulz, A. *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. Kiel: IPN.

Jana KOLTER, Katja EILERTS, Potsdam

„Echtes" Modellieren – auch in der Grundschule!? Explorative Untersuchung mit Schülern der Klassen 1 bis 5

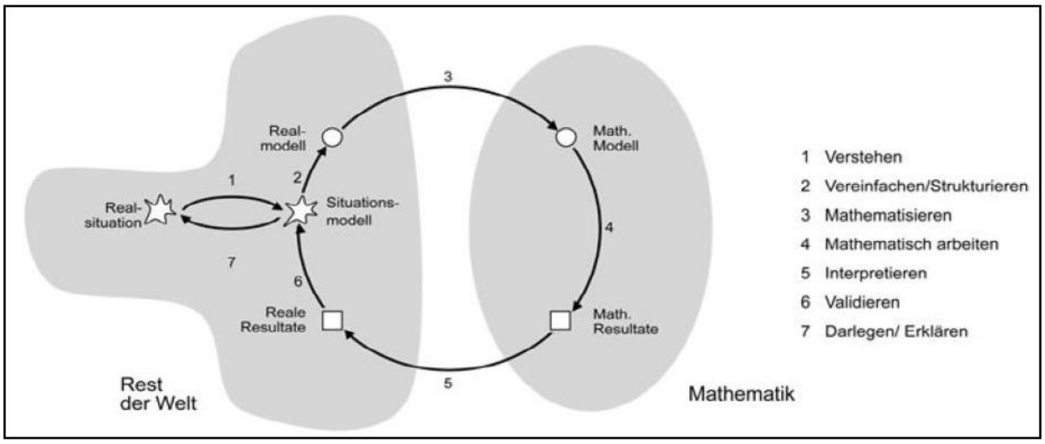
„Beim Modellieren geht es darum, eine realitätsbezogene Situation durch den Einsatz mathematischer Mittel zu verstehen, zu strukturieren und einer Lösung zuzuführen sowie Mathematik in der Realität zu erkennen und zu beurteilen." (Blum et al., 2007, S. 40 f.). Modellieren ist eine der allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die Schüler entsprechend der Bildungsstandards während ihrer Schullaufbahn erlangen sollen. Modellieren ist eine sehr komplexe Tätigkeit, dennoch – oder deshalb! – wird befürwortet, ab der ersten Klasse mit entsprechenden Aufgaben zu arbeiten und Modellierungskompetenz zu fördern: Kinder modellieren bereits vor der Einschulung in realen Situationen, gerade zu Schulbeginn gehen sie noch spontan, kreativ und unbefangen an Aufgaben heran. Hier können Sie sich im Argumentieren und Kommunizieren üben und durch die Anbindung an den Sachverhalt und durch enaktives Nachstellen der Situation in Zahlenräumen und mit Operationen agieren, die über den „normalen" Unterricht weit hinausgehen (Maaß, 2011).

Mit diesem Beitrag möchten wir konkrete Ansätze vorstellen, wie in der Primarstufe „echt" modelliert werden kann und diskutieren, welchem Aufbau ein Modellierungsunterricht für die Grundschüler folgen kann, um die verschiedenen Teilkompetenzen behutsam anzubahnen und auszubauen.

Modellierungsprozesse und Modellierungsaufgaben

In Beschreibungen von Modellierungsprozessen finden sich mehr oder weniger detailliert unterschiedliche Teilprozesse im ständigen Hin- und Herwechseln zwischen Realität und Mathematik, die die verschiedenen „Stationen" verbinden und die erst im Zusammenspiel einen vollständige Modellierungsprozess darstellen. Diese Teilprozesse können auch aufgefasst werden als unterschiedliche Teilkompetenzen, die ein Lernender erlangen muss, um seine (Gesamt-)Modellierungskompetenz auszubilden: *Verstehen* und *Vereinfachen* der gegebenen Realsituation, *Mathematisieren* der Situation, *Interpretieren* und *Validieren* der mathematischen Resultate sowie das *Vermitteln* oder Darlegen der Befunde in einer Antwort (Greefrath et al., 2013). Um eine Modellierungsaufgabe erfolgreich bearbeiten zu können, muss natürlich auch das innermathematische Arbeiten als weiterer Prozess beherrscht werden. Ein verbreiteter Modellierungskreislauf, der eine Schematisierung eines idealtypischen Modellierungsprozesses in sieben Schritten darstellt und der sowohl die Arbeitsvorgänge als auch die (Zwischen-) Produkte beinhaltet, wurde von Blum und Leiss (2005) vorgestellt:

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 643–646). Münster: WTM-Verlag



Um Schüler an Modellierungsprozesse heranzuführen, erscheint diese sehr detaillierte Aufschlüsselung in Schritte und Stationen sehr komplex und könnte die Kinder eher verwirren und überfordern als unterstützen. Deshalb wurden Schemata entwickelt, die (durch Zusammenlegung der Schritte 1 und 2 sowie der Schritte 5, 6 und7) in nur 4 Bearbeitungsschritten einen Überblick über den Arbeitsprozess geben und als Orientierung und „Fahrplan" dienen können – wobei weder der „große" noch der verkürzte Kreislauf als starrer linearer Prozess verstanden werden darf, sondern als idealtypische Schematisierung von Schritten, die im Echtfall mehrfach, in anderer Reihenfolge mit Sprüngen oder Schleifen durchlaufen werden. Damit alle Teilprozesse tatsächlich angesprochen werden können, braucht es Aufgaben, die diese einfordern und nicht durch einfaches „Entkleiden" alle notwendigen Zahlen und Rechnungen offenlegen. Bei solchen Aufgaben müssen das Einholen von Informationen und das Treffen verschiedener Annahmen eine Vielfalt erzeugen von Modellen mit den jeweiligen mathematischen Resultaten, die dann wiederum interpretiert, verglichen, validiert und ggf. durch Veränderungen oder Hinzunahme von Annahmen ausgefeilt werden, um zu mathematisch fundierten Aussagen über die gegebene Situation zu kommen. Maaß (2007) beschreibt Modellierungsaufgaben als „Eine komplexe Anforderung – komplex wie im täglichen Leben. (…) So präsentiert sich Mathematik im Leben und genau da sollen die Schülerinnen und Schüler sie erkennen und damit umgehen können" (ebd., S.11).

Realkontexte zum Modellieren in der Primarstufe

Mit dem Ziel, Kontexte „komplex wie im täglichen Leben" in die Schule zu tragen, wurde an der Universität Potsdam ein Set von Modellierungsaufgaben entwickelt und in einer explorativen Untersuchung in 10 Grundschulklassen aus dem Potsdamer Umland eingesetzt. Im vorliegenden Beitrag konzentrieren wir uns auf eine Aufgabe, die (nahezu) identisch in drei verschiedenen Klassenstufen (Jahrgang 1, 3 und 5, jeweils gegen Ende des ersten Halbjahres) eingesetzt wurde.

Der gewählte Realkontext ist die Planung eines Klassenausflugs in das Spaßbad „Tropical Islands“. Dieser Kern war für alle Lerngruppen gleich, ebenso die Information, dass eine gewisse Geldsumme zur Verfügung steht, mit der der Ausflug gestaltet werden kann. Für die verschiedenen Stufen gab es dazu verschiedene Angebotsflyer für Eintrittspakete und Zusatzaktionen, die extra zu bezahlen sind. Zusätzlich gab es für die verschiedenen Altersstufen verschiedene Hilfsmittel wie Rechengeld, Chips zum Tauschen, Hilfekarten etc.

Die nachfolgende Übersicht konkretisiert die je gegebenen Informationen:

	Klasse 1	Klasse 3	Klasse 5
Geld-summe	95€	625€	625€ zuz. 25€ je Teilnehmer
Angebote Eintritt	„Der Eintritt ist bereits bezahlt“	Diverse Pakete: Einzel-/ Gruppe Mit/ ohne ausgewählten Zusatzaktionen oder Übernachtung	Diverse Pakete: Einzel-/ Gruppe Mit/ ohne ausgewählten Zusatzaktionen oder Übernachtung
Angebote Zusatz-aktionen	Diverse Aktionen; Preis je Aktion je Person 1€	Diverse Aktionen mit verschiedenen Preisen (volle € / 50-Cent-Beträge)	Diverse Aktionen mit versch. Preisen (mit bis zu einer Nachkommastelle)
An-/ Abreise	„Um An-/Abreise kümmert sich die Lehrerin“	Ein DB-Angebot und ein Bus-Fix-Preis als Zusatz	DB-Angebote (Einzel- oder Gruppenreise), Busangebot

Erfahrungen und Diskussion

Schon aus der hier sehr kompakten Übersicht wird deutlich, wieviel Modellierungs-Potential in einer „Planungs-Gelegenheit“ wie dem *Ausflug ins Tropical Islands* steckt. Durch verschiedene Zusatzmaterialien können eine intensive Auseinandersetzung mit dem Kontext sowie die mathematische Bearbeitung unterstützt werden. Für die erste Klasse haben wir sehr positive Erfahrungen gemacht mit kleinen Chips („1€“), die auf die Teilnehmer verteilt und dann individuell gegen einzelne „Eintrittskarten“ für die Aktionen eingetauscht werden. Durch Aufkleben der Eintrittskarten pro Kind oder Gruppe entstehen erste Säulendiagramme, die zu inhaltlichen Diskussionen über die Annahmen (*„Viermal Eis? Willst du nicht lieber auch einmal Trampolin?“)* führen. Um die Gesamtzahl der jeweiligen Aktionen in der Klasse zu ermitteln, haben die Schüler Additionen und Zählungen durchgeführt, die den Arbeitsraum des ersten Schuljahres weit übersteigen. Die Kinder der Klassen 3 und 5 haben keine konkreten Repräsentanten für die Aktionen benötigt, nur einige nahmen (insb. bei Komma-Beträgen) Rechengeld zur Hilfe. Alle Kinder arbeiteten im Größenbereich Geld völlig selbstverständlich mit rationalen Zahlen und führten mit ihnen schriftlich oder halbschriftlich mehrstufige Operationen durch. Einige Fünftklässler erkannten sogar den linearen Zusammenhang zwischen Teilnehmern, Gesamtkapital und Auswirkungen auf die Ausgaben *(„Nicht so viele Betreuer! Die bringen nur 25€, kosten aber mehr beim Übernachtungspaket“*).

Durch den Planungs-Charakter nahmen es alle Kinder als völlig selbstverständlich hin, dass unterschiedliche Ergebnisse entstehen können, die alle richtig sind – eine wichtige Erkenntnis beim Modellieren!

Natürlich sind etliche weitere Variationen denkbar. Rückblickend würden wir empfehlen, die Preise für die Sonderaktionen in Klasse 1 zwischen 1€ und 2€ zu variieren und ab Klasse 3 noch zusätzliche Variation durch „Einzel- und Zehnerkarten“ zu eröffnen. Generell lässt sich festhalten, dass hier in einem einzigen Kontext Modellierungsaktivität für alle Altersstufen eröffnet werden. Mit einem einmal erstellten „Materialset“ aus Flyern, „Chips-und-Eintrittskarten-Set“ für Klasse 1 und Rechengeld entsteht ein Aufgabensetting, in dem man – neben der inneren Differenzierung die ohnehin durch die eigenen zu treffenden Annahmen enorm hoch ist – auch als Lehrperson gezielt differenzierend eingreifen kann.

Literatur

Blum, W. (2011). Can Modelling be taught and learned? Some Answers from Empirical Research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillmann (Eds.), *Trends in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)* (pp. 15–30). Dodrecht: Springer.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., & Köller, O. (Eds.). (2007). *Bildungsstandards Mathematik: konkret: Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der Tanken-Aufgabe. *Mathematik Lehren*, (128), 18–22.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren - Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule.*(pp. 11–37). Wiesbaden: Springer.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren: Aufgaben für die Sekundarstufe I* (1. Aufl). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Maaß, K. (2011). *Mathematisches Modellieren in der Grundschule*. Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen. Kiel: IPN.

Jörg KORTEMEYER, Rolf BIEHLER, Niclas SCHAPER, Paderborn

Hilft der sogenannte Modellierungskreislauf Lösungsprozesse bei ingenieurwissenschaftlichen Anwendungsaufgaben besser zu verstehen?

Im Rahmen des BMBF-Projektes KoM@ING analysieren wir implizite Kompetenzerwartungen in mathematikhaltigen Elektrotechnikaufgaben und reale Lösungsprozesse von Experten und Novizen aus der Elektrotechnik. Gängige Modellierungskreisläufe der Mathematikdidaktik erweisen sich für eine Beschreibung nur als bedingt geeignet.

1. Das Projekt KoM@ING und seine Zielsetzungen

Das Projekt KoM@ING ist ein Unterprojekt der BMBF-Förderlinie KoKoHs. Die sechs Teilprojekte von KoM@ING befassen sich mit der qualitativen und quantitativen Modellierung von mathematischen Kompetenzen, die Ingenieurstudierende in der Grundlagenphase (1. bis 3. Semester) und in höheren Veranstaltungen und Laboren (3. bis 6. Semester) benötigen.

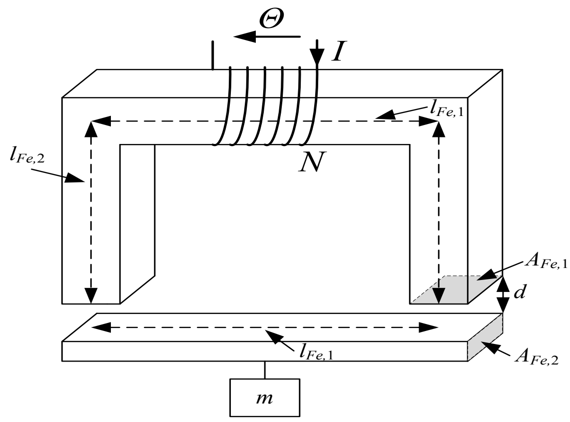
Das Paderborner Teilprojekt von KoM@ING beschäftigt sich mit der Grundlagenphase im Studiengang Elektrotechnik. Hierzu wurden die curricularen Inhalte der Veranstaltungen „Grundlagen der Elektrotechnik" und „Höhere Mathematik" universitätsübergreifend analysiert und typische Aufgaben ermittelt. Zu zwei solcher Aufgaben wurden Videostudien mit Studierenden durchgeführt und Klausurbearbeitungen eingescannt. Mittels eines dreiphasigen Experteninterviews wurden zu den Aufgaben normative Kompetenzerwartungen erfasst. In der ersten Phase wird eine Aufgabenbearbeitung durch den Experten aus der Sicht eines Zweitsemesters erstellt. Phase 2 besteht aus einem Durchgehen dieser Bearbeitung zur Klärung weiterer Fragen. Phase 3 beinhaltet eine didaktische Rekonstruktion, d. h. einerseits Erwartungen zum studentischen Lösungsverhalten und andererseits zu didaktischen Absichten des Aufgabenstellers.

2. Analyse einer Elektrotechnik-Aufgabe unter Verwendung des Modellierungskreislaufs

Aus den Experteninterviews wurde eine „Studi-Expert-Lösung" erstellt. Darunter verstehen wir die bestmögliche Lösung, die mit dem Wissen eines Elektrotechnik-Zweitsemesters erhalten werden kann. Im ersten Schritt orientieren wir uns am Modellierungskreislauf in einer angepassten Form an. Im Unterschied zum Modellierungskreislauf, bei dem die „subjektive Seite" nur im Situationsmodell aufscheint, identifizieren wir in allen Stufen nötige Wissensresourcen, die für die Bearbeitung der Schritte relevant sind.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 647–650). Münster: WTM-Verlag

Die vorliegende Aufgabe beschäftigt sich mit einem magnetischen Kreis, der aus zwei Eisenkernen besteht (siehe Skizze). Die unterschiedlichen Längen und Querschnittsflächen der Eisenkerne sind vorgegeben:

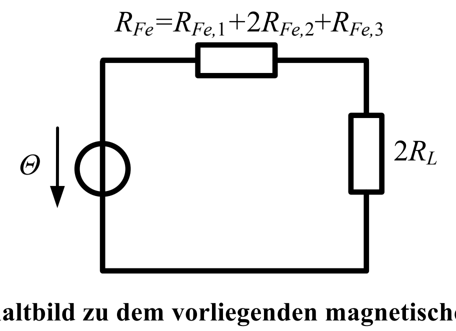


Skizze des magnetischen Kreises mit verschiedenen Längen und Querschnittsflächen

In den ersten beiden Aufgabenteilen sollen ein Ersatzschaltbild skizziert und die magnetische Gesamtreluktanz, also der magnetische Gesamtwiderstand, berechnet werden. Bei der Bearbeitung werden vier Phasen durchlaufen, die im Folgenden näher beschrieben werden.

Im Sinne des Modellierungskreislaufs liegt mit der Skizze bereits ein Realmodell vor, allerdings ist den Studierenden der „Modellcharakter“ in der Regel nicht bewusst: Sie werden in die Benutzung der Realmodelle mit impliziten Idealisierungen und Annahmen hinein sozialisiert. Die Skizzen müssen „gelesen“ werden können; das betrachten wir als typische Kompetenz. Die Skizzen sind konventionalisiert und sind Bestandteil der Darstellungsmittel des Faches. Zusätzlich müssen noch Fachtermini wie z. B. der magnetische Fluss Theta verstanden werden. Eine implizite Idealisierung ist hier das ausschließliche Betrachten des magnetischen Verhaltens in einer statischen Situation, wodurch dynamische Effekte wie u. a. der Energieänderung unberücksichtigt bleiben.

In Phase 2 muss die „Methode des Ersatzschaltsbilds“ als konventionalisierte Mathematisierungshilfe genutzt werden. Hier sieht dies wie folgt aus:



Ersatzschaltbild zu dem vorliegenden magnetischen Kreis

Im Unterschied zum Modellierungskreislauf wird von den Studierenden nicht erwartet, dass sie selber eine „Realität“ modellieren. Die Idealisierungen bleiben oft implizit. Das Anfertigen einer Skizze kann hier nicht als heuristisches Hilfsmittel interpretiert werden, sondern ist Bestandteil der „graphischen Sprache“ der Elektrotechnik.

In Phase 3 muss eine Reluktanzgleichung zum Ersatzschaltbild aufgestellt werden. Die benötigte Ressource ist hier das Aufstellen eines Sets von Gleichungen zwischen Größen. Insofern findet im Unterschied zum Modellierungskreislauf kein Eintreten in die „Welt der Mathematik“ statt, sondern ein Eintreten in eine „Mathematik der Größen“ mit elektrotechnischer Bedeutung. Dieses Set wird nicht in einem Schritt aufgestellt und dann mathematisch bearbeitet, sondern kontextbezogen ergänzt und verändert. Der Prozess des Aufstellens und des Weiterbearbeitens der Gleichungen ist untrennbar miteinander verwoben. Die Gleichungen als solche sind den Studierenden bekannt, müssen also nicht selber "entwickelt" werden.

In der folgenden Phase 4 wird die Gesamtreluktanz berechnet. Hierzu werden sowohl mathematische als auch elektrotechnische Ressourcen benötigt:

$$\begin{aligned} R_{Fe} &= R_{\text{oben}} + 2 \cdot R_{\text{links}} + R_{\text{unten}} \\ &= \frac{1}{\mu}\frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,1}} + \frac{2}{\mu}\frac{l_{Fe,2}}{A_{Fe,1}} + \frac{1}{\mu}\frac{l_{Fe,1}}{A_{Fe,2}} \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4}\frac{V\cdot s}{A\cdot m}}\frac{0,5m}{0,015m^2} + \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4}\frac{V\cdot s}{A\cdot m}}\frac{0,3m}{0,015m^2} + \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-4}\frac{V\cdot s}{A\cdot m}}\frac{0,5m}{0,006m^2} \end{aligned}$$

Bezüglich der Mathematik gibt es in dieser Phase zwei wesentliche Ressourcen: Einerseits wollen wir von einem „Einheitenmanagement“ sprechen, also dem Umgang mit dem SI-Einheitensystem und den Umgang mit Zehnerpotenzen beim Umrechnen von Einheiten. So treten hier Umformungen zwischen Metern und Quadratmetern auf und es müssen Zentimeter in Meter umgerechnet werden. Andererseits werden auch Umformtechniken und –strategien algebraisch-arithmetischen Bruchtermen genutzt; das bezeichnen wir als „Gleichungsmanagement“.

Aus der Elektrotechnik im engeren Sinne ergeben sich folgende Ressourcen: es muss die Formel zur Berechnung der Reluktanz bekannt sein und auf die Situation angewendet werden. Hierbei muss die Reihenschaltung berücksichtigt werden: die Einzelreluktanzen müssen addiert werden.

In einem weiteren Aufgabenteil soll die magnetische Flussdichte b_L berechnet werden. Als Ressource wird hier auch das „Gleichungsmanagement“ benötigt: Bei der Bestimmung dieser Größe müssen relevante Größen-Gleichungen herangezogen und zielgerichtet umgeformt werden, um unbekannte aus bekannten Größen zu ermitteln. Eine Ableitung der Gleichung aus theoretischen Zusammenhängen ist nicht nötig, was eine didaktische Reduktion der Übungsaufgabe gegenüber der Vorlesung ist.

$$b_L = \frac{N \cdot I}{R_M \cdot A_{Fe,1}} = \frac{100 \cdot 10A}{336,881\frac{kA}{Vs} \cdot 0,015m^2} = \frac{10^3 A}{336,881\frac{10^3 A}{Vs} \cdot 0,015m^2}$$
$$= \frac{Vs}{336,881 \cdot 0,015m^2} = \frac{1}{336,881 \cdot 0,015}\frac{Vs}{m^2} = 0,198\frac{kg}{A^2 \cdot s^2} = 0,198T$$

Nach der Beendigung der Rechnung können mehrere Validierungsstrategien angewendet werden, die auch in realen Lösungsprozessen von Experten und Studierenden beobachtet werden konnten: So ist eine Validierung über die Einheiten ($T=kg/(As)^2$) aber auch über die Größenordnungen des Ergebnisses ($0T \leq b_L \leq 2T$) möglich. Im Unterschied zum Modellierungskreislauf finden weitergehende Validierungen nicht statt, da den Studierenden die Annahmen nicht bewusst sind.

3. Weitere Schritte

In den nächsten Schritten soll die Studi-Expert-Lösung unter Verwendung weiterer Perspektiven vertieft kategorisiert werden. Zu diesen Perspektiven zählen Erkenntnistheoretische Spiele (nach Redish, Tuminaro, Bing), Problemlösen (nach Polya) sowie Wissensbestandteile (nach Andersson, Krathwohl). Die Rekonstruktionen des Problemlöseprozesses sollen anschließend mit Elektrotechnik-Experten und Mathematik-Didaktikern validiert werden. Auf dieser Basis werden wir die Problemlöseprozesse (aus Videostudien) und –produkte (aus Klausurbearbeitungen) analysieren.

Literatur

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., & Bloom, B. S. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Allyn & Bacon.

Bing, T. J. (2008). An epistemic framing analysis of upper level physics students' use of mathematics. ProQuest.

Kortemeyer, J., Biehler, R., & Schaper, N. Mathematikbezogene Kompetenzmodellierung in der Studieneingangsphase elektrot. Studiengänge im Projekt KoM@ING. Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr, 95.

Polya, G. (2008). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton university press.

Tuminaro, J., & Redish, E. F. (2007). Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 3(2), 020101.

Ulrich KORTENKAMP, Halle, Anselm LAMBERT, Saarbrücken

So rechnet Deutschland - Ergebnisse und Hypothesen einer Umfrage („Bürgerkompetenz Rechnen“ bzw. „ZEIT-Mathetest“)

1. Deutschlandrepräsentative Umfrage zu Rechenfähigkeiten im Alltag

Im April 2013 haben wir 1027 von forsa repräsentativ ausgewählten Befragten im Alter von 18-65 Jahren über forsa.omninet mathematische Fragestellungen aus dem Alltag vorgelegt: Rechenaufgaben, Sachaufgaben (z.B. Kühlschrankkosten, Renovierung Kellerraum, Fahrtzeit), Informationsentnahme aus Texten und Grafiken, Prozentrechnung (insb. Grundvorstellungen), Bruchrechnung und Stochastik und etwas Geometrie. Die elektronisch über Internet oder Set-Top-Box Teilnehmenden sind an Umfragen gewöhnt. Taschenrechner waren ausdrücklich erlaubt. Die Studie wurde in Kooperation mit der Stiftung Rechnen und dem Medienpartner DIE ZEIT geplant und durchgeführt. Die Aufgaben wurden bis auf wenige Anregungen (Prüfungen HSA (Hessen bzw. Saarland), VERA-8, Einstellungstest einer Tischlerei bzw. einer HWK) von uns speziell für den Test entwickelt. Die Auswahl ist mathematikdidaktisch motiviert. Die Anforderungen liegen weit unter denen des Hauptschulabschlusses und die Antwort erfolgte über multiple choice oder Angabe einer Zahl bzw. Größe. Alle Aufgaben finden sich auf der Internetseite http://www.zeit.de/wissen/2013-05/zeit-mathetest-aufgaben im Original, ausgewählte erste Ergebnisse in der „Studie Bürgerkompetenz Rechnen“ unter http://stiftungrechnen.de.

2. Erste Ergebnisse der Umfrage – ein kleiner Überblick

Rechenaufgaben und Sachaufgaben Schon bei einfachen Rechen- bzw. Sachaufgaben zeigen sich schnell Unterschiede zwischen den Antworterfolgen von Bürgern die mindestens Fachhochschulreife (im Folgenden kurz: *Abitur*) haben und denjenigen welche höchstens einen Hauptschulabschluss (im Folgenden kurz: *Hauptschulabschluss*) vorweisen können. Liegen diese Gruppen bei der Berechnung von Restgeld an der Kasse noch fast gleichauf (94% bzw. 88% erfolgreich), so divergieren sie schon deutlicher bei der Berechnung der Dauer einer Zugfahrt, die um 8:58 Uhr beginnt und um 15:28 Uhr endet (85% bzw. 71%).

Bei geometrischen Sachaufgaben bereiteten vor allem die Umrechnung von Einheiten Schwierigkeiten – z. B. beim Flächeninhalt einer Spanplatte oder dem Volumen eines Aquariums.

Insgesamt ist zu beobachten, dass die Teilnehmenden mit *Hauptschulabschluss* mit wachsendem Aufgabentextumfang wachsende Probleme mit

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 651–654). Münster: WTM-Verlag

einer Antwort bekommen. „Für ein Nusseckenrezept benötigt man 400 g Nüsse. Das Rezept ist für 32 Nussecken gedacht. Wie viele solcher Nussecken kann man backen, wenn man nur 300 g Nüsse hat?“ und „400 g Rinderfilet (Bio) kosten 32 €. Wie viel kosten 300 g“ sind zwei unterschiedliche Einkleidungen zu einem identischen mathematischen Modell, aber die Lösungshäufigkeiten fallen drastisch auseinander: Die zweite Aufgabe lösten noch 80% der Befragten mit *Hauptschulabschluss*, die erste nur 70%.

Dass eine Diskussion über ein Tempolimit in Deutschland kaum rational zu führen ist, demonstriert leicht die folgende Aufgabe: „Wie viel Zeit dauert es länger, wenn man 240 km statt mit 120 km/h nur mit 100 km/h fährt?“. Diese konnten nur 28% aller Befragten korrekt beantworten und selbst bei vorhandenem *Abitur* sind es nur 42%.

Nur etwa zwei Drittel aller Befragten konnten auf Basis authentischer Prozentangaben berechnen, wie viel Gramm Nüsse (4% von 500 g) in einem Müsli enthalten sind. Dies zeigt, dass wir unbedingt klarere Darstellungen von relevanten Informationen im Nahrungsmittelbereich brauchen, etwa in Form einer Lebensmittelampel. Diese sollte aber grafisch schlicht sein.

Informationsentnahme aus Texten bzw. Grafiken Schon Textlesen ist nicht so einfach: Jeder zehnte Befragte war nicht in der Lage einem mehrzeiligen Text die Information zu entnehmen, dass der *Hammering Man* vor der Frankfurter Messe 32 t schwer ist – eine Aufgabe aus dem HSA Hessen – obwohl dies explizit darin steht. Aber Grafiken lesen ist noch sehr viel schwieriger: Nur 31% aller Befragten waren in der Lage aus einem zeitungsüblichen Funktionsgraphen das Jahr zu entnehmen, in dem der Goldpreis 750 € je Feinunze betrug. Die komplexere Frage nach der Zeit des Verdreifachen des Goldwertes vom Wert 500 € je Feinunze aus, konnten dagegen 41% richtig beantworten – wir vermuten, dass dies an der notwendig intensiveren Beschäftigung mit der Grafik liegt. Selbst Befragte mit *Abitur* waren nur zu 43% bzw. 53% erfolgreich. Dies legt die Frage nahe, ob es überhaupt Infografiken gibt, die diesen Namen verdienen; zumindest ist es jedoch nicht einfach, solche zu erstellen. Aus einem Säulendiagramm sollte eine Strompreissteigerung über 10 Jahre entnommen werden. Dies gelang 47% aller Befragten insgesamt, 54% derer mit *Abitur* und 41% derer mit *Hauptschulabschluss*. Auch ein West-Ost-Unterschied ist hier, wie oft bei Aufgaben, bei denen es um Geld geht, mit 49% vs. 39% leicht sichtbar. Bei der Frage danach, wann sich ein teurerer aber sparsamerer Kühlschrank amortisiert haben wird – eine recht textreiche Aufgabe aus dem HSA Saarland – fällt er mit 45% vs. 32% noch deutlicher aus. Die letzte Mathematiknote ist ein guter Prädiktor, für die Fähigkeit mathematische Probleme im Alltag zu lösen. Insgesamt haben 43% aller Befragten die Kühlschrankaufgabe lösen können; nach Noten gestaffelt sieht es so aus: „sehr gut“ 59%, „gut“ 52%, „befriedigend“ 42% und höchstens „ausreichend“ 28%. Um es möglichst vielen Bürgern zu ermöglichen, hier zu vernünftigen Entscheidungen zu kommen, sind neben der schlichten Angabe des Stromverbrauchs zusätzliche Beispielrechnungen empfehlenswert.

Prozentrechnung Dass eine Aktie, die zunächst um 10% im Wert steigt und dann um 10 % fällt, schließlich weniger wert ist als zu Beginn, konnten zwei Drittel aller Befragten richtig beantworten (*Abitur* 78%, *Hauptschulabschluss* 55%; West 68%, Ost 52%). Nur etwa die Hälfte aller Befragten war sich klar darüber, dass bei doppelten Zinsen der Ertrag nach 10 Jahren <u>mehr</u> als doppelt so hoch ist.

Bruchrechnung und Stochastik Die Frage was ein halb plus ein Viertel ist – gefragt wurde in der schulüblichen Bruchschreibweise – konnten 70% aller Befragten beantworten (*Abitur* 88%, *Hauptschulabschluss* 59%; letzte Mathematiknote „sehr gut“ 91%, höchstens „ausreichend“ 53%; bei den Altersgruppen schnitt die mittlere „30- bis 49-jährige“ mit 64% am schlechtesten ab). Wird die Bruchrechung konkret, kann es besser werden: „Zur Herstellung einer Apfelsaftschorle mischt man vier Fünftel Liter Apfelsaft mit einem halben Liter Mineralwasser. Passt die Apfelsaftschorle dann in eine Flasche mit einem Fassungsvermögen von maximal 1,5 Liter?“ (VERA-8). Hier schrumpfen die Erfolgsdifferenzen (88% vs. 78%; 85% vs. 73%) und das Alter spielt gar keine Rolle mehr. Ist der Kontext aber stochastischer Natur (Zugwahrscheinlichkeit bei einer Bonbontüte bestimmen), bleibt es schwer – und dort sind die Älteren am schwächsten.

Geometrie Die Anzahl der für das Streichen eines Kellerraumes notwendigen Farbeimer konnten nur gut die Hälfte aller Befragten richtig beantworten unabhängig vom Alter, stark abhängig von der letzen Mathematiknote und vom Geschlecht. Dass sich ein Würfelvolumen verachtfacht, wenn die Kantenlänge verdoppelt wird, wusste nur ein Drittel aller Befragten.

3. Erste Details – ein kleiner Anfang

Die folgenden Detailanalysen basieren auf einer Auswertung der Rohdaten. Die Autoren sind gerne bereit, auf Wunsch weitere Hypothesen zu überprüfen. Hierbei ist zu beachten, dass die Repräsentativität der Umfrage bei zu speziellen Fragestellungen natürlich verloren geht.

West vs. Ost Bei fast allen Aufgaben ist der Anteil richtiger Antworten für Ostdeutschland kleiner. In wenigen Fällen ist er größer – bei Maßeinheiten, geometrischen Fragestellungen und Wahrscheinlichkeiten. Hierfür können teilweise inhaltliche Begründungen gefunden werden, z. B. spielt Stochastik in der Lehrerbildung im Osten traditionell eine größere Rolle. Ein

Braindrain ist sichtbar. Wer in Mathematik in der Schule gut war hat Arbeit – im Westen. Über die gesamte Stichprobe gilt, dass zwei Drittel aller, die eine „sehr gut“ als letzte Mathematiknote hatten, voll erwerbstätig sind, aber weniger als die Hälfte derer mit höchstens „ausreichend“.

Männer vs. Frauen Um eine Antwort im Vergleich von Männern und Frauen zu geben, ist es sinnvoll zumindest deren Bildungshintergrund mit zu betrachten; dazu unterscheiden wir „hohes Bildungsniveau“ (mindestens Fachhochschulreife) und „niedrigeres Bildungsniveau“.

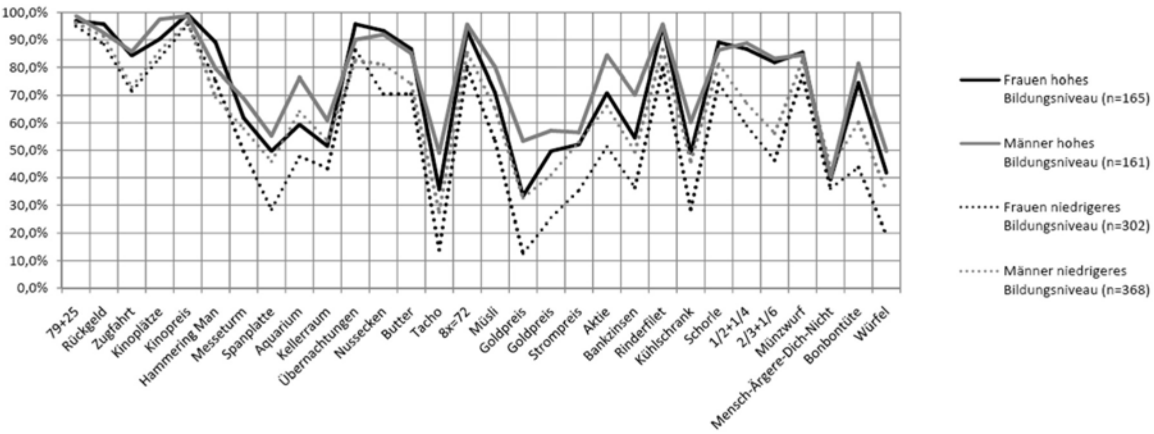


Abbildung: Vergleich Männer und Frauen nach Bildungsniveaus geordnet nach Testaufgaben

Diese doppelte Unterscheidung lässt einige interessante Beobachtungen zu. Einerseits gibt es Aufgaben, bei denen der Lösungserfolg eher vom Bildungshintergrund abhängt (z. B. Dauer einer Zugfahrt, $8x = 72$, formale Bruchrechnung, Bonbontüte), andererseits gibt es aber auch Aufgaben, bei denen das Geschlecht eine größere Rolle spielt (z. B. Spanplatte, Kellerraum, Tacho, Goldpreis und nicht zuletzt Aquarium, bei dem Raumgeometrie und Maßeinheiten zusammen kommen – dort liegen die Männer mit niedrigerem Bildungsniveau sogar knapp vor den Frauen mit hohem Bildungsniveau).

Jung vs. Alt Eine deutliche Abhängigkeit vom Alter findet sich u.a. in den Aufgaben Zugfahrt, Aquarium, Tacho, Gold- bzw. Strompreis und zur formalen Bruchrechung. In der Regel sind ist dort die Leistung von jung nach alt nach Alter gestaffelt – die Ausnahme bildet die Bruchrechung (s.o.).

Geschwister Befragte mit Geschwistern schnitten in der Bruchrechung besser ab, als jene ohne – teilen will gelernt sein!

Fernsehpräferenz Auch ob man als letzten Sender auf Erden einen öffentlich-rechtlichen oder einen privaten Sender bevorzugen würde, steht in einem statistischen Zusammenhang zum Erfolg (z. B. bei Zeitberechung, Grafiken lesen, Bruchrechnung) – nicht nur dazu an anderer Stelle mehr.

Nils Manuel KRAUSE, Halle (Saale)

Wissenschaftspropädeutik in der Sekundarstufe II – Fallstudie zu mathematischen Facharbeiten

1. Ausgangslage

Seit der Jahrtausendwende haben die Abiturientinnen und Abiturienten in allen Bundesländern die Möglichkeit, eine eigenständige längere wissenschaftspropädeutische Arbeit zu verfassen. Für die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler ist das Schreiben einer solchen Arbeit in der Sekundarstufe II sogar obligatorisch (Schenk 2005, S. 16). Die einzelnen Bundesländer haben für diese Arbeiten unterschiedliche Formate und Bezeichnungen (*Facharbeit* wird im Folgenden als Oberbegriff verwendet) entwickelt. So können die Gymnasien in Sachsen-Anhalt die konkreten Vorgaben zur Facharbeit recht autonom gestalten, während in Nordrhein-Westfalen auf Länderebene festgelegt ist, dass alle Schülerinnen und Schüler eine Facharbeit in einem selbst gewählten Fach schreiben müssen. In manchen Bundesländern wie Niedersachsen oder Thüringen wurde in den letzten Jahren ein eigenständiges wissenschaftspropädeutisches Schulfach eingeführt (oft als Seminarfach bezeichnet). Zentrales Element dieses Fachs ist die Vorbereitung auf das Verfassen der Facharbeit.

Mathematikdidaktische Veröffentlichungen rund um das Thema *Facharbeit* sind recht selten. Die ausführlichsten Informationen hierzu sind in der Dissertation von Meiringer (2010) zu finden. Klar scheint zu sein, dass es überall Schülerinnen und Schüler gibt, die Mathematikfacharbeiten schreiben, diese Gymnasiastinnen und Gymnasiasten aber stets nur eine kleine Minderheit sind (Dettmers u.a., 2012, S. 257; Klembalski 2008, S. 522).

2. Untersuchungsdesign

Zu den bisher kaum untersuchten Aspekten im Kontext von Mathematikfacharbeiten zählen unter anderem folgende Fragen:

- Welche Motive haben Schülerinnen und Schüler, wenn sie sich entscheiden, eine mathematische Facharbeit zu schreiben?
- Wie verläuft der Arbeitsprozess?
- Welche thematischen Zugänge für Mathematikfacharbeiten gibt es?

Um diese Fragen zu beantworten, wurde eine Fallstudie (vgl. Borchardt & Göthlich 2006) mit 17 Gymnasiastinnen und Gymnasiasten, welche eine mathematische Facharbeit schrieben, durchgeführt. Damit Erkenntnisse

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 655–658). Münster: WTM-Verlag

über unterschiedliche Varianten des Zuschnitts von Facharbeiten gewonnen werden können, wurden die Studienteilnehmer aus verschiedenen Bundesländern ausgewählt (Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Sachsen-Anhalt und Thüringen). Der Ablauf der Studie erfolgte im Sinne einer Methodentriangulation (vgl. Flick 2011): Noch vor dem Beginn der Beschäftigung mit dem Facharbeitsthema füllten die Probanden einen Fragebogen aus. Während des Arbeitsprozesses wurden sie interviewt. Nach Abgabe der Facharbeiten erfolgte eine zweite Fragebogenerhebung sowie die Inhaltsanalyse der Facharbeiten. Ziel dieses explorativen Designs ist es, den Untersuchungsgegenstand möglichst detailliert zu beschreiben und vielfältige Ergebnisse zu gewinnen. Aufgrund der geringen Fallzahl ist zu beachten, dass eine Verallgemeinerung der Studienergebnisse nur bedingt möglich ist.

3. Untersuchungsergebnisse

Die Motive der Probanden, eine Mathematikfacharbeit zu schreiben, können in fünf verschiedene Kategorien eingeteilt werden. Die Rubrik *Interesse/Freude an Mathematik* war in der Fallstudie am häufigsten vertreten. Ein weiterer häufig vorkommender Grund für die Wahl einer Mathematikfacharbeit waren Vorgaben an den jeweiligen Schulen. Mehrere Probanden wollten zunächst ihre wissenschaftspropädeutische Arbeit in einem anderen Fach schreiben. Da jedoch der gewünschte Fachlehrer sie aus verschiedenen Gründen nicht betreuen konnte, mussten sie ein weniger beliebtes Alternativfach mit noch nicht ausgeschöpftem Betreuungskontingent wählen. Andere Schülerstatements fallen unter die Kategorie *Nutzen für das spätere Leben*. Hierzu zählt zum Beispiel die Antwort eines Schülers, der sich in seiner Arbeit mit Betriebsabläufen auseinander setzte: „*weil ich finde, dafür kann ich am besten was später fürs Leben lernen, wenn ich auch mal Betriebsleiter oder so was werden will.*“ Ein weiterer Grund, den die Probanden als Motiv für die Wahl einer mathematischen Facharbeit angaben, ist die Nutzung der eigenen Stärken. Die fünfte und von den Fallstudienteilnehmern am seltensten genannte Kategorie ist die Verbesserung der Abiturnote durch die Facharbeit. Dieser Beweggrund fand sich nur bei Probanden aus Nordrhein-Westfalen und Sachsen-Anhalt, wo die Facharbeitszensur in die Mathematiknote eingeht und nicht wie in den anderen beiden Ländern im Seminarfach verrechnet wird.

An den obigen Ergebnissen wird vor allem deutlich, dass es ganz unterschiedliche Motive gibt, eine Mathematikfacharbeit zu schreiben. In Abhängigkeit dieser Beweggründe sind die Bedingungen für das Verfassen der einzelnen mathematischen Facharbeiten sehr ungleich.

Im Kontext des Arbeitsprozesses können hier nur die beiden Teilaspekte *Vorbereitung auf die Facharbeit*, sowie *Schwierigkeiten beim Arbeitsprozess* beleuchtet werden. Alle Probanden erhielten im Vorfeld der Facharbeit Informationen zu formellen Aspekten (Fußnoten, Literaturverzeichnis etc.), sowie zum Aufbau einer wissenschaftlichen Arbeit. Die Fallstudienteilnehmer, die ein Seminarfach belegten, übten zudem vor dem Verfassen der Facharbeit verschiedene Schritte des wissenschaftlichen Arbeitens, wie etwa die Literaturrecherche, ein. Eine mathematikspezifische Vorbereitung erfolgte jedoch auch für diese Schülerinnen und Schüler meist nicht. Einzige Ausnahme war hierbei ein themengebundener Seminarkurs in Niedersachsen zur Finanzmathematik. Als Vorbereitung auf die Facharbeit schrieben die Abiturientinnen und Abiturienten beispielsweise eine vierseitige Hausarbeit über Rentenrechnung. Bei den Schülerantworten zur Frage, ob es im Rahmen des Arbeitsprozesses Schwierigkeiten gab, fiel auf, dass die meisten Probanden, die angaben, keine Probleme gehabt zu haben, diesen niedersächsischen Seminarkurs belegten. Die Vorbereitung scheint hier also gelungen zu sein. Die am häufigsten genannten Probleme der Fallstudienteilnehmer beziehen sich auf inhaltliche Schwierigkeiten rund um das Verstehen und Verschriftlichen. Wie stark Probleme des Verstehens und des Schreibens zusammenhängen, wird in folgendem Zitat deutlich: „*Am Anfang hatte ich halt das Problem, dass ich gar nichts verstanden habe. Ich dachte immer, wie soll ich denn das schreiben.*“

Die thematischen Zugänge der Facharbeiten sind ebenfalls sehr unterschiedlich. Die 17 wissenschaftspropädeutischen Arbeiten können hierbei in vier Kategorien eingeteilt werden. Der innermathematische Anspruch der beiden Typen *mathematikdidaktische Untersuchung* und *Mathematik als Handwerkszeug* ist eher gering. Zu erstgenannter Rubrik zählt nur eine Facharbeit über das Papierfalten als Lerninstrument im Bereich Geometrie. Drei andere Probanden verwenden Mathematik lediglich als Handwerkszeug, um damit Erkenntnisse in anderen Disziplinen zu erwerben und darzustellen. Es handelt sich hierbei um fächerübergreifende Arbeiten über Finanzmathematik. Aus innermathematischer Sicht anspruchsvoller sind jene Facharbeiten, in denen die Probanden für sie vorher unbekannte mathematische Inhalte darstellen. Ein Beispiel für diesen Zuschnitt ist die Untersuchung „*Komplexe Zahlen – Anwendung und Bemerkungen zur Geschichte*“. Dieser Typ von Mathematikfacharbeiten ist besonders häufig. Im Rahmen der Studie seltener und mathematisch noch anspruchsvoller sind die vier Arbeiten, die unter die Kategorie *Problemlösen* fallen. Zu diesem Typ zählt etwa eine Facharbeit, im Rahmen derer sich ein Schüler Kenntnisse zur Poissonverteilung aneignete, um Verkehrstatistiken auszuwerten und schließlich auf dieser Basis Handlungsempfehlungen für die örtliche Polizei zu formulieren.

An dieser Stelle ist zu beachten, dass diejenigen Arbeiten, deren innermathematischer Anspruch höher ist, nicht zwangsläufig besser sein müssen als die anderen Facharbeiten. Die einzelnen Probanden haben lediglich unterschiedliche Zugänge gewählt und damit verschiedene Schwerpunkte gesetzt. Zudem sagt der Anspruch der Arbeit wenig darüber aus, ob er auch erfüllt wurde.

4 Ausblick

Es konnten hier nur einzelne Teilaspekte der Fallstudie dargestellt werden. Weitere Themen der Untersuchung sind etwa die Analyse der Wissenschaftlichkeit der Facharbeiten und die Erforschung von Veränderungen des Mathematikbilds durch den Arbeitsprozess. Eingebettet ist die Fallstudie in ein Promotionsprojekt (Titel: Wissenschaftspropädeutik im Kontext vom Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe), im Rahmen dessen auch eine Fragebogenerhebung mit rund 1000 Schülerinnen und Schülern durchgeführt wurde. Durch die Verbindung der beiden Studienteile konnten bedeutsame Aspekt zur Wissenschafpropädeutik herausgearbeitet werden.

Literatur

Borchardt, A. & Göthlich, S.E. (2006). Erkenntnisgewinnung durch Fallstudien. In: S. Albers, D. Klapper, U. Konradt, A. Walter, J. Wolf (Hrsg.), *Methodik der empirischen Forschung* (S. 37-54). Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag

Dettmers, S., Lüdtke, O., Neumann, M. & Trautwein, M. (2010). Aspekte von Wissenschaftspropädeutik. In: G. Nagy, M. Neumann, O. Lüdtke & K. Maaz (Hrsg.), *Schulleistungen von Abiturienten: Die neu geordnete Oberstufe auf dem Prüfstand* (S. 243-266). Wiesbaden: VS

Flick, U. (2011). Zum Stand der Diskussion: Aktualität, Ansätze und Umsetzungen der Triangulation. In: J. Ecarius, I. Miethe (Hrsg.), *Methodentriangulation in der qualitativen Bildungsforschung* (S. 19-39). Opladen: Budrich

Klembalski, K. (2008). Seminarkurs Kryptografie – Zahlentheorie. In: E. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008: Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik von 13.3.2008. bis 18.3.2008 in Budapest* (S. 519-522). Münster: WTM

Meiringer, M. (2010): *Das W-Seminar „Codierungstheorie“ als Chance für einen kompetenzorientierten, allgemeinbildenden Mathematikunterricht am Gymnasium*. Hildesheim: Franzbecker

Schenk, R. (2005). Das Seminarfach in Thüringen: Die Entwicklung und der Anspruch des Seminarfachs in Thüringen im Kontext der Diskussion um die gymnasiale Oberstufe. Erfurt: Dissertation an der Erziehungswissenschaftlichen Fakultät der Universität Erfurt

Janina KRAWITZ, Kay ACHMETLI, Kassel, Jana KOLTER, Potsdam, Werner BLUM, Kassel, Peter BENDER, Rolf BIEHLER, Jürgen HAASE, Paderborn, Reinhard HOCHMUTH, Hannover, Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

Verbesserte Lehre für Grundschullehramtsstudierende – Ergebnisse aus dem KLIMAGS-Projekt

In diesem Beitrag berichten wir von einem Versuch an der Universität Kassel im Rahmen des KLIMAGS-Projekt (**K**ompetenzorientierte **L**ehr**I**nnovation im **MA**thematikstudium für die **G**rund**S**chule, im Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik, www.khdm.de) mit dem Ziel, die universitäre Lehre das Fachs Mathematik im Grundschulstudium zu verbessern.

1. Das Projekt KLIMAGS

Ziel des Projektes ist es, die Leistungsentwicklung bzgl. des mathematischen Fachwissens angehender Mathematik-Grundschullehrer in den ersten Studiensemestern zu erforschen (zur genaueren Beschreibung von KLIMAGS siehe Haase et al., in Druck). Zur Realisierung dieses Vorhabens gehört (neben Zusammenhangs- sowie Wirkungsanalysen zum Lernverhalten und diversen Einstellungsmerkmalen der Lernenden) die Analyse stofflicher Schwierigkeiten auf inhalts- und prozessbezogener Ebene zu Beginn und im Verlauf des Studiums. Erste Konsequenzen aus den Untersuchungen sollten direkt in eine Intervention im Lehrbetrieb münden und wissenschaftlich evaluiert werden. Das Projekt läuft an den Standorten Paderborn und Kassel; in diesem Beitrag wird über den Kasseler Projekt-Part berichtet.

Das Forschungsdesign umfasst eine Kontrollgruppe (KG; N=69) in dem Studierendenjahrgang des WiSe 2011/12 und eine Experimentalgruppe (EG; N=62) im darauffolgenden Jahrgang mit Studienstart im WiSe 2012/13. Beide Kohorten haben in ihrem ersten Semester die Fachveranstaltung „Arithmetik für die Grundschule" gehört und sind zu Beginn und zum Ende des Semesters mit eigens entwickelten Leistungstests getestet worden. Die Leistungstests sind breit gefächert bzgl. der Inhalte und prozessbezogenen Kompetenzen und beziehen sich konkret auf das Vorlesungskonzept.

Die Analyse der Tests der KG offenbarte trotz ausgiebiger Behandlung in Vorlesung, Übungsbetrieb und Hausaufgaben deutliche Lücken im Inhaltsbereich der Teilbarkeitsregeln und im eng verwandten Bereich der Stellenwertsystematik.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 659–662). Münster: WTM-Verlag

Um die Lernenden besser bei ihrer Wissenskonstruktion zu unterstützen, wurde in KLIMAGS eine Intervention für die Experimentalgruppe entwickelt, die im Rahmen der Vorlesung und der zugehörigen Übungsblätter die Behandlung, Vernetzung und metakognitive Reflexion verschiedener Darstellungsebenen im E-I-S- Prinzip beinhaltet (zurückgehend auf Bruner; zum Einsatz und zur Vernetzung verschiedener Darstellungen vgl. z. B. Wittmann, 1981). Des Weiteren umfasst die Intervention verschiedene Abstraktionsniveaus zwischen beispielbezogener Anschaulichkeit, Präformalität und formalen Beweisen zu den „problematischen" Inhaltsbereichen der Teilbarkeitsregeln und der Stellenwertsysteme.

Auf diese Weise sollten elaboriertes Lernen und eine tiefere Auseinandersetzung angeregt und Zusammenhänge zwischen den Themengebieten Teilbarkeitsregeln und Stellenwertsystemen (noch) expliziter aufgezeigt werden. In der Vorlesung wurde enaktiv (mit Nudeln der Form „Penne Rigate" am Overheadprojektor), ikonisch und symbolisch gezeigt, wie die „Aufteilung" der auf Teilbarkeit zu prüfenden Zahl in zwei Summanden erfolgt und auf präformaler (z. B. anhand der Stellenwerttafel, paradigmatische Argumentationen) und formaler (Arbeiten mit der allgemeinen Zahldarstellung in Potenzschreibweise) Ebene bewiesen. In den Hausaufgaben (verpflichtend) sollten die Studierenden selbst die Teilbarkeitsregeln anwenden, Regeln aufstellen und sowohl formal beweisen als auch anhand der Stellentafel sowie mit „echt gebündelten" und dann abfotografierten Anordnungen von Elementen begründen. In Vorlesung und Hausaufgaben wurden dabei zunächst Teilbarkeitsregeln im vertrauten Dezimalsystem und dann zur Vertiefung und zum Erreichen von echtem Strukturverständnis auch Stellenwertsysteme mit fremden Basen behandelt (zu den Vorteilen der Thematisierung fremder Stellenwertsysteme siehe z. B. Padberg & Benz, 2011).

2. Untersuchungsdesign

Die *Hypothesen* waren:

- Die Leistungsentwicklung vom Vor- zum Nachtest der EG sind signifikant höher als die der KG.
- Die Entwicklung der Leistung der EG ist im interventionsbezogenen Testteil signifikant höher als die der KG. Innerhalb des nicht-interventionsbezogenen Testteils gibt es keine signifikanten Unterschiede.

Zur *Methode*:

Zunächst wurden die Test-Items in zwei Dimension (1: direkter Interventionsbezug, 2: kein direkter Bezug) unterteilt, um gezielt Interventionseffekte messen zu können. Aus einer zweidimensionalen Raschskalierung geht hervor, dass zwei reliable Dimensionen gebildet wurden (EAP/PV =.69 bzw. =.81). Aufbauend auf dieser Skalierung wird mit Hilfe von Varianzanalysen mit Messwiederholung über die latenten Schülerfähigkeiten analysiert, ob es signifikante Unterschiede in der Leistungsentwicklung beider Gruppen gibt.

Ferner werden DIF-Analysen für den Vor- und Nachtest durchgeführt, um Items zu identifizieren, die Stärken und Schwächen der EG bzw. KG veranschaulichen und zu denen Studentenlösungen inhaltlich analysiert werden.

3. Ergebnisse

Die zweidimensionale Raschskalierung und die Varianzanalyse mit Messwiederholung zeigen, dass es auf Ebene des Gesamttests keine signifikanten Unterschiede zwischen beiden Gruppen über die Zeit gibt. Betrachtet man allerdings die einzelnen Dimensionen, lässt sich feststellen, dass es eine signifikant höhere Leistungsentwicklung der EG im interventionsbezogenen Testteil und keine signifikanten Unterschiede in der Leistungsentwicklung im nicht-interventionsbezogenen Testteil gibt.

Die DIF-Analysen für den Nachtest zeigen, dass zwei (drei) interventionsbezogene Items einen (leicht-) signifikanten und substanziellen DIF (Methode und Kriterien nach Draba, 1977) aufweisen und leichter für die EG sind. Alle weiteren interventionsbezogenen Items weisen keinen signifikanten DIF auf. Ferner gibt es kein Item, dass für die KG signifikant leichter ist als für die EG. Die DIF-Analyse des Vortests zeigt keine DIFs für die interventionsbezogenen Items, die demnach für beide Gruppen gleich schwierig sind.

Um ein differenzierteres Bild über die Stärken und Schwächen der EG im Vergleich zur KG zu erhalten, wurden die Items, die im Nachtest einen signifikanten und substanziellen DIF aufweisen, inhaltlich analysiert. Im Folgenden werden exemplarische Ergebnisse eines Items vorgestellt.

Kreuzen Sie an, ob die folgende Aussage korrekt ist oder nicht, und begründen Sie ihre Entscheidung mit Hilfe einer Teilbarkeitsregel.

743930 ist teilbar durch 4

Abb. 1: Testitem (Lösungshäufigkeiten im Nachtest: KG ca. 45 %, EG ca. 65%)

Bei der EG ist (neben der absolut höheren Lösungsquote) der Anteil der Studierenden, die das Item im Nachtest lösen konnten, obwohl sie es im Vortest falsch hatten, wesentlich größer als bei der KG. Beim Vergleich der häufigsten Fehler (z. B. explizites Ausrechnen des Quotienten oder Bezugnahme auf die Quersummenregel) fällt auf, dass es nur einen Fehler gibt, der im Nachtest häufiger auftrat als im Vortest. Während die Anzahl der Fehler der EG im Nachtest in allen Fehlerkategorien geringer wurde, hat die KG häufiger bei der Begründung angegeben, dass die letzten drei Ziffern der Zahl betrachtet werden müssen, um zu entscheiden, ob die Zahl durch 4 teilbar ist. Zwar lässt sich die Teilbarkeit durch 4 auch an den letzten drei Ziffern prüfen, vermutlich ist der Grund für diese Angabe eher eine Verwechslung der Teilbarkeitsregeln für 4 und für 8. Dies deutet darauf hin, dass die Teilbarkeitsregeln in diesem Fall nur erinnert und nicht verstanden wurden.

4. Zusammenfassung und Fazit

Die Varianzanalysen mit Messwiederholung haben gezeigt, dass es eine signifikant höhere Leistungsentwicklung der EG im interventionsbezogenen Testteil über die Zeit gibt. Im übrigen Testteil gibt es keine signifikanten Unterschiede, das heißt, dem positiven Effekt der Leistungsentwicklung im interventionsbezogenen Testteil steht kein Nachteil gegenüber.

Mit Hilfe der DIF-Analysen konnten auffällige Items identifiziert werden. Die signifikanten Unterschiede in den Itemschwierigkeiten der interventions-bezogenen Items im Nachtest sprechen für einen positiven Effekt der Intervention auf die studentischen Leistungen.

Die inhaltlichen Analysen für das vorgestellte Item zeigen, dass fast alle Fehler, die im Vortest gemacht wurden, im Nachtest deutlich seltener oder gar nicht mehr auftreten.

Literatur

Draba, R. E. (1977). *The Identification and Interpretation of Item Bias* (Memorandum No. 25). Chicago, IL, USA.

Haase, J., Kolter, J., Bender, P., Biehler, R., Blum, W., Hochmuth, R., & Schukajlow, S. (in Druck). *Mathematikausbildung von Grundschulstudierenden im Projekt KLIMAGS: Forschungsdesign und erste Ergebnisse bzgl. Weltbildern, Lernstrategien und Leistungen*. In: Tagungsband zur 2. khdm-Arbeitstagung.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4., erw., stark überarb. Aufl.). *Mathematik Primar- und Sekundarstufe I + II*. Heidelberg, Deutschland: Spektrum Akademischer Verlag.

Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6., neubearb. Aufl.). *Didaktik der Mathematik*. Braunschweig, Deutschland: Vieweg.

Jana KRECKLER, Kaiserslautern

Modellierung im Regelunterricht – Ein neues Konzept

1. Ziele der Studie

In den aktuellen Bildungsstandards und Lehrplänen wird als eine der zu erwerbenden mathematischen Kompetenzen *K3: Mathematisch modellieren* genannt. Viele Lehrerinnen und Lehrer fühlen sich jedoch unsicher und haben Schwierigkeiten in der Umsetzung, da ihnen die nötige Erfahrung und Klarheit fehlt, wie Modellierung im Regelunterricht eingesetzt werden kann. Ziel der hier beschriebenen Studie ist es, eine Unterrichtseinheit zu entwickeln, welche die Modellierungskompetenz der Schülerinnen und Schüler unabhängig von dem gewählten Thema, dem Geschlecht und der Zeugnisnote erhöht und den Lehrerinnen und Lehrern somit eine Vorlage liefert, wie Modellierung erfolgreich unterrichtet werden kann. Da laut der Lehrpersonen ein großes Problem der Einsetzbarkeit von Modellierungsproblemen im Unterricht oft die mangelnde Zeit ist, soll eine kurze Unterrichtseinheit entwickelt werden, welche trotz geringem Zeitrahmen die globale Modellierungskompetenz optimal fördert. Gleichzeitig soll diese Unterrichtseinheit dazu genutzt werden, anwendungsnahe und realitätsbezogene Problemstellungen in den Mathematikunterricht zu integrieren und den Schülerinnen und Schülern die Anwendung und Einsetzbarkeit von Mathematik in Alltag und Wirtschaft zu verdeutlichen. Im Rahmen der hier beschriebenen Studie wurden Themen der geometrischen Optimierung verwendet und untersucht.

2. Unterrichtskonzept

Das hier entwickelte Unterrichtskonzept zur Verwirklichung der oben genannten Ziele besteht aus vier Unterrichtsstunden, kann jedoch auch auf sechs Stunden erweitert werden, falls mehr Zeit zur Verfügung steht und eine intensivere Behandlung der Thematik gewünscht ist. Um die globale Modellierungskompetenz der Schülerinnen und Schüler zu fördern, wurde ein holistischer und selbstständigkeitsorientierter Ansatz gewählt, welcher unter anderem bei den Ergebnissen der Projekte DISUM (Blum, 2011) und ERMO (Grünewald, 2012) ansetzt. Im Rahmen des Projekts DISUM wurde eine leichte Überlegenheit eines selbstständigkeitsorientierten Unterrichts gegenüber einem direktiven festgestellt. Im Projekt ERMO konnten Vorteile des holistischen Ansatzes gegenüber einem atomistischen Ansatz in Bezug auf den Erwerb metakognitiver Modellierungskompetenzen und dem Lösen vollständiger Modellierungsaufgaben ermittelt werden. Auch Blømhoj et al. (2003) schreiben zum Grundsatz des holistischen Ansatzes, dass

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 663–666). Münster: WTM-Verlag

Modellierungskompetenzen vor allem durch die Bearbeitung vollständiger Modellierungsaufgaben erworben werden können. Der Aufbau und das Konzept der hier vorgestellten 4-stündigen Unterrichtseinheit wird in Abb. 1 schematisch dargestellt.

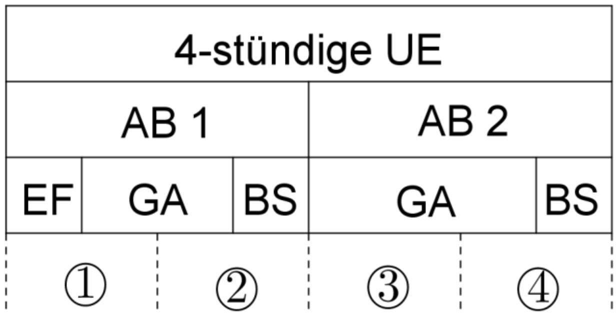


Abb. 1: Unterrichtskonzept zur Modellierung im Regelunterricht (UE: Unterrichtseinheit, AB: Arbeitsblatt, EF: Einführung, GA: Gruppenarbeit, BS: Besprechung)

Die vierstündige Unterrichtseinheit wird in zwei Blöcke von je zwei Unterrichtsstunden aufgeteilt. Pro zweistündigem Block wird ein Arbeitsblatt mit je einer Modellierungsaufgabe zu einem angewandten mathematischen Thema bearbeitet. Dies geschieht in Gruppenarbeit von drei bis maximal fünf Schülerinnen und Schülern und fördert somit Diskussionen, mathematisches Argumentieren und das selbstständige Finden einer Lösung.

Die Besonderheit der Arbeitsblätter liegt darin, dass das erste Arbeitsblatt eine Anleitung bezüglich der zu unternehmenden Schritte in Anlehnung an einen Modellierungskreislauf enthält, wobei Arbeitsblatt 2 eine offen formulierte Modellierungsaufgabe ist. Bei der Bearbeitung von Arbeitsblatt 2 sollen sich die Schülerinnen und Schüler an das in Arbeitsblatt 1 erlernte strukturierte Vorgehen zum Lösen einer Modellierungsaufgabe erinnern und dieses Schema gezielt anwenden.

Der Ablauf der Unterrichtseinheit gliedert sich wie folgt auf. Zu Beginn wird eine kurze Einführung gegeben, was Modellierung ist und wie man anhand eines Modellierungskreislaufes eine realitätsbezogene Problemstellung systematisch löst. Es folgt eine Gruppenarbeitsphase zu Arbeitsblatt 1, welche mit einer Besprechung im Plenum abgeschlossen wird. Bei dieser Besprechung ist es sehr wichtig, dass noch einmal intensiv die verschiedenen Schritte des Kreislaufes, insbesondere das Vereinfachen und Strukturieren, sowie das Reflektieren und Validieren thematisiert werden. Ebenfalls wichtig ist die Erkenntnis, dass unterschiedliche Annahmen zu unterschiedlichen Lösungswegen führen können. Der zweite Teil der Unterrichtseinheit beinhaltet die Gruppenarbeitsphase zu Arbeitsblatt 2 sowie eine Abschlussbesprechung dieser Aufgabe und der Modellierung allgemein.

3. Studiendesign und Ablauf

Bezüglich des oben vorgestellten Unterrichtskonzepts wurden einige Hypothesen aufgestellt, welche die Verwirklichung der genannten Ziele formulieren und im Rahmen der Studie überprüft werden sollen. Wir wollen uns hier zunächst auf den Zuwachs der Modellierungskompetenz und ihre Unabhängigkeit von Geschlecht, Zeugnisnote, Thema und Lehrer konzentrieren. Es wird die Hypothese aufgestellt, dass die Modellierungskompetenz der Schülerinnen und Schüler durch die beschriebene vierstündige Unterrichtseinheit (nachhaltig) erhöht wird.

An der Studie haben 10 Schulen aus Rheinland-Pfalz mit 14 Lehrerinnen und Lehrern, sowie 332 Schülerinnen und Schülern der 10. Jahrgangsstufe teilgenommen. Die Lehrerinnen und Lehrer wurden im Rahmen einer ganztägigen Lehrerfortbildung auf die Studie vorbereitet und auf denselben Wissensstand gebracht. Nach Durchführung der Unterrichtseinheit fand ein Nachbereitungstreffen statt, welches als Diskussionsforum, Ergebnisvorstellung und der Überprüfung des Ablaufes diente. Die Lehrerinnen und Lehrer mussten einige Fragebögen ausfüllen, welche darauf abzielten die jeweilige Umsetzung des Konzepts im Unterricht zu überprüfen und Erfahrungsberichte und Meinungen zu sammeln.

Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler mussten vor und nach der Durchführung der Unterrichtseinheit einen Test bestreiten. Dieser bestand aus einem Motivationsfragebogen (Kuhn, 2008) sowie einer Modellierungsaufgabe. Die Motivation und Modellierungskompetenz der Schülerinnen und Schüler kann somit verglichen und eine Veränderung untersucht werden. Die Modellierungskompetenz wird nach dem Stufenmodell von Siller et al. (2013) bewertet und eingeordnet und konzentriert sich auf das systematische Vorgehen zum Finden einer Lösung. Des Weiteren wurden das Alter, Geschlecht und die letzte Zeugnisnote im Fach Mathematik aller Schüler erhoben. Um die Nachhaltigkeit des Kompetenzzuwachses zu untersuchen, bestreiten die Schülerinnen und Schüler drei Monate nach Durchführung der Unterrichtseinheit erneut einen Test, in welchem sie eine Modellierungsaufgabe bearbeiten müssen.

4. Erste Ergebnisse

Erste Ergebnisse der Studie zeigen, dass ein signifikanter Zuwachs der Modellierungskompetenz zu verzeichnen ist. Die Auswertung ergibt, dass sich 73,4% der Schülerinnen und Schüler um mindestens eine Kompetenzstufe verbessert haben, lediglich 24,6% im Nachtest die gleiche Stufe erreicht haben wie im Vortest und sich 2,1% verschlechtert haben. Im Vortest erreichten die Schülerinnen und Schüler im Mittel Kompetenzstufe 1,13 mit einer Varianz von 0,263. Im Nachtest haben sie sich im Mittel um eine Stufe verbessert, 2,06 mit einer Varianz von 0,512. Der T-Test zur Überprüfung der Signifikanz mit einem Signifikanzniveau von $\alpha=1\%$ und $n=289$ ergibt einen empirischen T-Wert von 21,14. Dieser ist deutlich größer als der kritische T-Wert von 2,326 und erlaubt somit das Verwerfen der Nullhypothese und die Aussage, dass ein sehr signifikantes Ergebnis vorliegt. Bezüglich der Unabhängigkeit von Geschlecht, Zeugnisnote, Lehrer und Thema sind ebenfalls bereits erste Erkenntnisse vorhanden. So sind bezüglich der Geschlechter leichte Unterschiede zu erkennen (81,3% der Mädchen und 64,7% der Jungs haben sich verbessert), in Bezug auf die Zeugnisnote oder das gewählte Thema der Unterrichtseinheit können jedoch keine Unterschiede festgestellt werden. Der Motivationstest hat unter anderem ergeben, dass 63,5% der Schülerinnen und Schüler dafür sind, dass solche Aufgaben und Themen Teil des regulären Unterrichts werden. Lediglich 31,7% sind dagegen, 4,8% unentschlossen. Auch hier kann bezüglich Geschlecht oder Thema kein Unterschied festgestellt werden. Die Thematik der geometrischen Optimierungsthemen wurde von den Schülerinnen und Schülern außerdem als interessant und realistisch eingestuft, welches das Fazit erlaubt, dass sich Aufgaben aus diesem Themengebiet hervorragend für den Einsatz im Unterricht eignen. Das hier vorgestellte Unterrichtskonzept erreicht die gesetzten Ziele und erhöht die Modellierungskompetenz der Schülerinnen und Schüler im Schnitt um eine Stufe.

Literatur

Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning), *Teaching Mathematics and its applications 22 (3)*, 123-139.

Blum, W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri & G. Stillman (Hrsg.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (S. 15-30). New York: Springer.

Grünewald, S. (2012). Acquirement of modelling competencies – First results of an empirical comparison of the effectiveness of a holistic respectively an atomistic approach to the development of (metacognitive) modelling competencies of students. *ICME 12, Seoul, Korea.*

Kuhn, J. (2008). Authentische Aufgaben im theoretischen Rahmen von Instruktions- und Lehr-Lern-Forschung: Effektivität und Optimierung von Ankermedien für eine neue Aufgabenkultur im Physikunterricht. *Habilitationsschrift, Universität Koblenz-Landau.*

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Linnemann, T., Steinfeld, J. & Schodl, M. (2013). Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013.*

Stephan KREUZKAM, Heidi SCHULZE, Hildesheim

Digitale Feedbacksysteme und Mitarbeit von Schülern im Unterricht

Eine der größten Herausforderungen für Lehrpersonen ist die Beurteilung mündlicher Mitarbeit im Unterricht. So sagt bspw. Männel, dass sich „viele Lehrer beim Beurteilen mündlicher Leistungen unsicher oder sogar sehr unsicher fühlen“ (Männel, 2008). Um dieser Unsicherheit entgegen zu wirken, soll in diesem Rahmen „SMART ResponseTM“ als ein Beispiel für digitale Feedbacksysteme vorgestellt und dessen möglicher Beitrag für die Beurteilung der Mitarbeit im Unterricht diskutiert werden.

Leistungsmessung und -beurteilung

Leistungsmessung soll in Anlehnung an Walther et al. im weitesten Sinne verstanden werden. Somit werden alle Prozesse betrachtet, „in denen die Antworten der Schüler auf gezielte oder spontan entstehende Stimuli genutzt werden, um Schlüsse über deren Kenntnisse und Fähigkeiten zu ziehen.“ (Walther et al, 2010, S.194) Bei dieser Definition der Leistungsmessung sind somit alle Formen der Leitungserfassung, so auch die digitale Möglichkeit eingeschlossen.

Die Leistungsbeurteilung unterteilt sich in die folgenden drei Aspekte: Leistungsfeststellung, -bewertung und -rückmeldung. Für die Leistungsfeststellung wird im Kerncurriculum für Mathematik (u.a. Gym.) eine kontinuierliche Beobachtung der Schüler im Lernprozess sowie individuelle Lernfortschritte und die Ergebnisse in Lernkontrollen verlangt (vgl. u.a. Niedersächsisches Kultusministerium, 2006, S. 39). Bei der Bewertung von Leistungen werden die drei Bezugs- bzw. Bewertungsnormen individuell, normativ und kriterial unterschieden (vgl. u.a. Helmke, 2006; Sacher, 2006; Käpnick, 2014). Bei erstgenannter Bezugsnorm werden die Leistungen eines Schülers im zeitlichen Verlauf betrachtet; somit ist der individuelle Lernfortschritt ausschlaggebend für die Leistungsbewertung. Die normative Bezugsnorm orientiert sich an einem sozialen Maßstab: Einzelergebnisse werden in Bezug zu einer Gruppe (z.B. der Schulklasse) gesetzt. Die Beurteilung anhand fachlicher Anforderungen wird als kriteriale Bezugsnorm bezeichnet. In Abbildung 1 wird die Beziehung zwischen den Normen dargestellt. Welche dieser Normen bei der Notengebung berücksichtigt wird, hängt hauptsächlich von dem Beurteilenden ab, um professionell zu sein muss aber mindestens angegeben werden, auf welche Bezugsnorm sich bezogen wird (vgl. Sacher, 2006). Aufgrund der Existenz dreier Bezugsnor-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 667–670). Münster: WTM-Verlag

men kann es jedoch keine absolut gerechte Beurteilung geben (vgl. Käpnick, 2014).

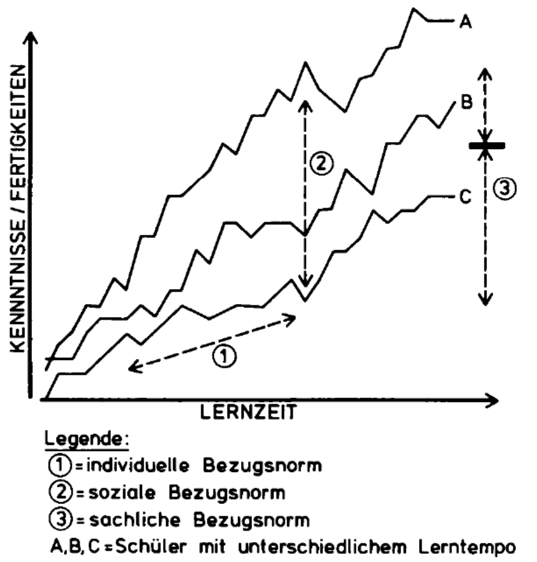


Abb. 1: Darstellung der Bezugsnormen (Rheinberg, 1998)

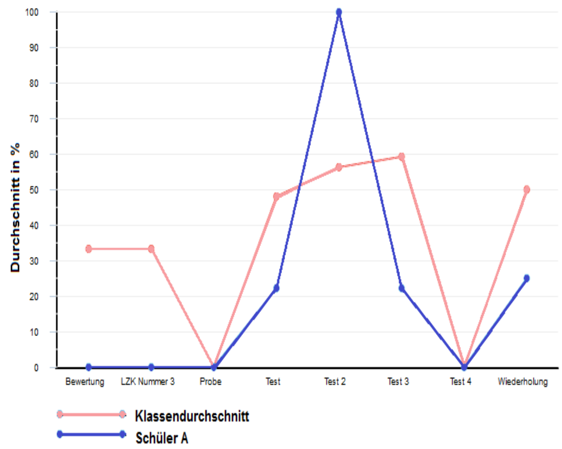


Abb. 2: Automatische Auswertung bei SMART Response

Unter Leistungsrückmeldung wird die Reflexion der Leistungsmessung anhand der angelegten Bezugsnormen zwischen Lehrer und Schüler verstanden.

Nachfolgend wird das SMART Response System und seine Umsetzung an der Schule vorgestellt und anschließend die ersten Erfahrungen dargestellt.

Das digitale Feedbacksystem Smart Response

Das Smart Response-System besteht aus Soft- (SMART Notebook und SMART Desktopmenü) sowie Hardwarekomponenten (Klicker, Empfänger), zusätzlich wird ein Computer benötigt.

Das System bietet zum einen eine anonyme und schnelle Wiedergabe des Meinungsbildes der Klasse und ermöglicht Umfragen mit verschiedenen Fragevarianten inklusive zugehöriger Auswertung in kürzester Zeit. Zum anderen lassen sich mithilfe des nicht-anonymisierten Modus die individuellen Lernstände aller Schüler gleichzeitig erheben und speichern. Bei kontinuierlichem Einsatz des Systems im personalisierten Betriebsmodus (zugeordnetes Passwort als Identifizierung der einzelnen Schüler) hat die Lehrperson einen Überblick sowohl über den Klassendurchschnitt, die Lernentwicklungen aller Schüler als auch über die Leistungsunterschiede innerhalb der Lerngruppe. Diese Informationen sind oftmals gute „Indikatoren für die mündliche Beurteilung“ (Kreuzkam, Janotta, 2013, S. 2).

Ausgehend von den oben beschriebenen Möglichkeiten des Feedbacksystems und der Schwierigkeit der Beurteilung der Mitarbeit im Unterricht wird die Forschungshypothese folgendermaßen formuliert:

Mit digitalen Feedbacksystemen lässt sich die Beurteilung der mündlichen Mitarbeit objektivieren und damit unabhängiger von der eigenen Wahrnehmung gestalten.

Erprobung in der Schule

Zur Überprüfung der Forschungshypothese wurde das System am Ratsgymnasium Wolfsburg in mehreren Klassen der Sekundarstufe I kontinuierlich im Mathematikunterricht eingesetzt. Grundlegend für den sinnvollen Einsatz war eine vorausgehende Einführungs- und Übungsphase für die Schüler, in denen die Schüler zunächst mit dem System vertraut gemacht wurden und anschließend die Fragenbeantwortung übten, damit in der Forschungsphase keine Schwierigkeiten und somit Verfälschungen auftreten. In den anschließenden Unterrichtsstunden wurde das digitale Feedbacksystem sowohl während des Unterrichts für Meinungsumfragen als auch zum Stundenabschluss zur Erfassung des Lernstandes sowie am Ende der Unterrichtseinheit zur Lernstandserhebung verwendet. Eine fortlaufende Dokumentation der Mitarbeit aller Schüler sollte dadurch erreicht werden, dass der Lehrer den Fragenkatalog für den jeweiligen Lerninhalt selbst erstellt und dementsprechend für seinen Unterricht optimal anpassen kann.

Erste Ergebnisse

Zunächst war auffällig, dass die Schüler eine durchweg hohe Akzeptanz dem System gegenüber zeigten. Kritik wurde hingegen von Lehrerseite zur Aufbauzeit und Abhängigkeit von der Technik geäußert. Die Möglichkeiten des Systems wurden hingegen als positiv aufgenommen, sodass ein durchgängiger Einsatz in der Testphase stattfinden konnte.

Die fortlaufende Dokumentation der Schülerantworten bietet - auch durch die automatische Auswertung des Feedbacksystems - die Chance einer objektiveren Bewertung der Mitarbeit, sowie die Transparenz der Lernentwicklung jedes Schülers mittels einer grafischen Übersicht des Leistungsverlaufs (beispielhaft in Abb. 2), ähnlich des in Abb. 1 dargestellten Diagramms der Leistungsbewertung. Im Rückbezug auf die Leistungsbeurteilung bietet das System somit die Möglichkeit, alle drei Bezugsnormen für die Bewertung zugrunde zu legen. Das Instrument scheint daher nicht nur „das Potenzial zu haben, mit Hilfe von Veränderungsmessungen die Leistungsstände von Schülerinnen und Schülern zu vergleichen“ (Heinrichs, 2012, S. 3), sondern auch einen externen Maßstab anlegen sowie den Leistungsverlauf aller Schüler individuell nachvollziehen zu können.

Zwar kann mithilfe des Feedbacksystems primär nicht differenziert werden, es bietet jedoch die Möglichkeit zur individuellen Diagnose der Leistungsstände aller Schüler. Durch das veränderte Antwortverhalten (regelmäßige Rückmeldung aller Schüler) können ebenfalls die Antworten der stilleren Schüler erhoben und dokumentiert werden. Somit kann zumindest mithilfe einer Interpretation der Antworten durch die Lehrkraft ein erhöhtes Maß an Differenzierung erreicht werden.

Literatur

Arnold, Karl-Heinz; Sandfuchs, Uwe; Wiechmann, Jürgen (2006): *Handbuch Unterricht*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Heinrichs, J., Di Fuccia, D.-S. "Bewertungskompetenz bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I - Möglichkeiten der Diagnose und Förderung". In S. Bernholt (Hrsg.). *Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht*. Berlin: LitVerlag, 503-505.

Helmke, A. (2006): Unterrichtsforschung. In: K.-H Arnold, U. Sandfuchs und J. Wiechmann (Hg.): *Handbuch Unterricht*. Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt, S. 56–65.

Käpnick, Friedhelm (2014): *Mathematiklernen in der Grundschule*. [S.l.]: Springer.

Kreuzkam, S., Janotta, J. (2013): Smart-Response. Gleiche Chance für alle?!. In: Käpnick Fr., Stein M., Greefrath G. (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.–08.03.2013 in Münster, Bd. 1. 2 Bände. Münster: WTM-Verlag, S. 560–563.

Männel, Sophie (2008): *Möglichkeiten der Leistungsmessung im Mathematikunterricht*. 1. Aufl. s.l: GRIN Verlag.

Niedersächsisches Kultusministerium (2006): *Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5-10*. Mathematik

Rheinberg, F. (1998): Bezugsnormorientierung. In: Detlef H. Rost (Hg.): *Handwörterbuch pädagogische Psychologie*. 4. Aufl. Weinheim [u.a.]: Beltz (Programm PVU, Psychologie-Verlags-Union), S. 39–43.

Sacher, W. (2006): Lernstandsbeurteilung: Tests, Zensuren, Zeugnisse. In: K.-H Arnold, U. Sandfuchs und J. Wiechmann (Hg.): *Handbuch Unterricht*. Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt, S. 648–657.

Walther, Gerd (2010): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. [Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen] ; mit CD-ROM. 4. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor (Lehrer-Bücherei: Grundschule).

Thomas KROHN, Leipzig, Karin RICHTER, Halle

Historische astronomische Daten und moderne CAS-Rechner Überlegungen zur Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge im Mathematikunterricht der 11. Jahrgansstufe: Der Komet von 1618

Die Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge ist oft mit einer typischen Aufgabe verbunden: Aus Messdaten soll ein analytischer Ausdruck abgeleitet werden, der den gegebenen Daten „gut angepasst" ist. CAS-Rechner stellen hierfür ein leistungsfähiges Werkzeug dar.

Dieser Beitrag greift diese Situation für ein historisches Problem der Astronomie auf: Die Problemstellung der Funktionsergänzung und -anpassung für originale historische Messwerte zur Bahn eines Himmelskörpers, hier: eines Kometen des 17. Jahrhunderts, wird in den Mittelpunkt des vorgeschlagenen Projekts gestellt. Anliegen ist es, an Hand dieser realen, gut überschaubaren Datenbasis Notwendigkeit und Vorgehensweisen der Funktionsapproximation erleb- und nachvollziehbar werden zu lassen und dabei die Leistungsstärke des CAS-Rechners exemplarisch zu testen.

Die wichtigsten Lernziele für die Auseinandersetzung mit dieser Problemstellung sind:

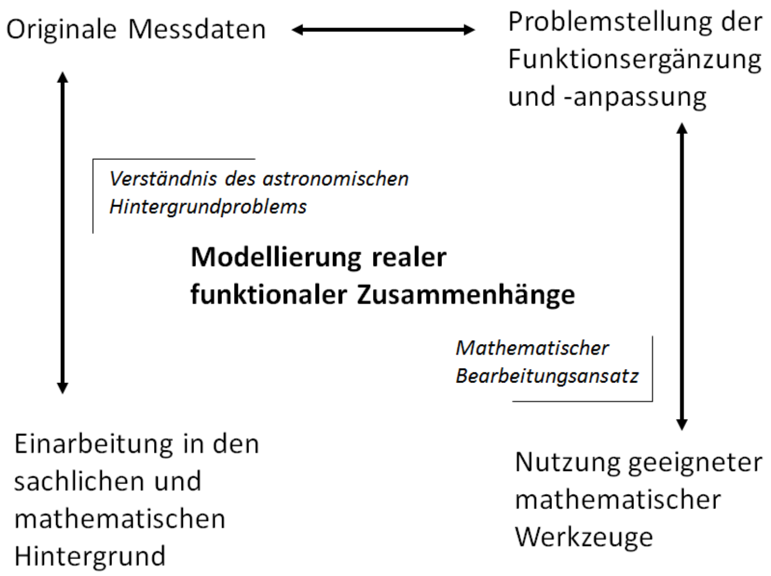
- Umgang mit realen Roh-Daten in überschaubarem Inhaltskontext
- Mathematische Modellierung (Werkzeug: sphärische Trigonometrie)
- Grafische Veranschaulichung des dreidimensionalen Realmodells Himmelskugel
- Statistische Aspekte der Datenaufbereitung
- Funktionsanpassung, -ergänzung, -auswertung zum gewählten Modell

Das im Folgenden kurz beschriebene Projekt ist dreistufig aufgebaut, wobei auch eine arbeitsteilige parallele Bearbeitung durch Expertengruppen mit anschließendem Austausch der Experten denkbar und möglich ist. Je Problemkreis und Abschlussdiskussion: ca. 45 Minuten Zeitbedarf.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 671–674). Münster: WTM-Verlag

Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge

Die Modellierung der funktionalen Zusammenhänge mit dem Ziel der Rekonstruktion der scheinbaren Bahn des Kometen an der Sphäre steht dabei im Spannungsfeld zwischen verschiedenen interessanten und für die Lernenden gewinnbringend bearbeitbaren Themenfeldern – inhaltlich und methodisch (vgl. Abbildung).



Daraus leiten sich folgende drei Problemkreise ab, als „Bausteine“ des Projekts, die gemeinsam eine umfassende Bearbeitung der Problemstellung zum Kometen von 1618 ermöglichen, aber jeweils auch so autark und für sich Erkenntnis und Gewinn bringend sind, dass je nach Schwerpunktsetzung einzelne Teile stärker oder weniger stark betont werden können.

Problemkreis 1 – Astronomischer Hintergrund und originale Daten

Vermutlich nur wenige Lernende werden bereits Erfahrungen im Umgang mit astronomischen Grundbegriffen und Zusammenhängen besitzen. Daher ist es sinnvoll, auf die prinzipiellen Eigenarten von astronomischen Koordinatensystemen an der Sphäre (ähnlich den aus der Geographie bekannten irdischen) und der Positionsbestimmung von Himmelsobjekten in Länge und Breite einzugehen.

Eine gute Hilfe beim Entwickeln des Verständnisses kann das Einbeziehen von 3D-Geometriesoftware sein. Hier lassen sich wahlweise auf dem analytischen Weg oder einfacher durch Probieren und Erleben wichtige Charakteristiken der sphärischen Astronomie nacherleben.

Die Grundlage für die Modellierung der Kometenbahn an der Sphäre bilden dabei originale Daten des Wittenberger Mathematikers Erasmus

Schmidt, publiziert 1619. Diese Daten sind in einer deutschsprachigen Schrift in verbaler Form angegeben (Datum, Länge und Breite), lassen sich durch die Lernenden mit, falls nötig, geringen Hinweisen selbst herausarbeiten und gewähren ein mathematik-historisches Eintauchen in die Art des Experimentierens und der Datengüte im frühen 17. Jahrhundert.

Problemkreis 2 – Kartenentwürfe zum Modell der Himmelskugel

Eine Orientierung auf der Himmelskugel mit Hilfe eines Gradnetzes, das für jeden Punkt der Sphäre eine Charakterisierung durch den zugehörigen Breiten- und Längenkreis ermöglicht, stellt ein leistungsfähiges Denkmodell dar. Eine konkrete graphische Veranschaulichung ist dagegen anspruchsvoll, ja schwierig. Die Beschäftigung mit unterschiedlichen Ansätzen für ebene Bilder (Karten) zur Himmelskugel ist durch die Lernenden mit geringen mathematischen und mathematikgeschichtlichen Hinweisen und Hilfen selbsttätig leistbar und führt auf die auch für sich interessante Frage nach sinnvollen mathematischen Anforderungen an Karten.

Aus dieser Beschäftigung mit leistungsfähigen Kartenvorschlägen entwickelt sich die Frage nach einem geeigneten Entwurf für das vorliegende Datenmaterial zum Kometen von 1618 und, damit verbunden, nach der Eintragung und Ergänzung der vorliegenden Daten in der oder auch in den zur weiteren Untersuchung ausgewählten Kartenvorschlägen. Damit leitet dieser Untersuchungsbereich direkt zum Problemkreis 3 über.

Wird in der Beschäftigung mit unterschiedlichen Kartenentwürfen ein Schwerpunkt gesetzt, so bietet sich eine arbeitsteilige Auseinandersetzung mit anschließendem Expertenaustausch an.

Problemkreis 3 – CAS-Funktionsanpassung für die gegebenen Daten

CAS-Rechner bieten in der Regel verschiedene Menüs, die gut geeignet sind, dieses Projekt zu bearbeiten. Mit wenigen einführenden Hinweisen und knappen Übungen zu den grundlegenden Arbeitstechniken wie Eingabe von Daten, Eingabe von Formeln, Anpassung von Funktionen und grafischen Darstellungen wahlweise in den Menüs Tabellenkalkulation, Statistik oder Geometrie können die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Lösungswege erarbeiten. Dabei kann der Schwerpunkt je nach Intention und Vorwissen der Lernenden verschoben werden.

In der Tabellenkalkulation lässt sich nach der Dateneingabe mittels Sinusregression die Kometenbahn modellieren. Zwischenpunkte ohne gegebene experimentelle Daten lassen sich bestimmen, ebenso die vorherige und weitere Kometenbahn. Dies geschieht „auf Knopfdruck“, die Parameter der Sinusfunktion werden sichtbar.

Alternativ bieten sich das Statistik- oder Geometriemenü an. Hier werden zwar ebenso die Punkte eingetragen, jedoch geht es hier vor allem um das systematische Ausprobieren, um über geeignete Diskussion der Parameter der allgemeinen Sinusfunktion eine sich harmonisch an die experimentellen Daten anschmiegende Funktion zu ermitteln.

Ist eine erste eigenständige Beschäftigung mit sphärischer Trigonometrie im Kontext astronomischer Beobachtungen sinnvoll?

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass der Übergang von der 3-dimensionalen Anschauung (der Himmelskugel) zur 2-dimensionalen Wiedergabe in einem ebenen Koordinatensystem (des gewählten Kartenentwurfs) ganz besondere Anforderungen an die Lernenden stellt: Zugleich anspruchsvoll, aber durch die Teilung in Problemfelder und deren schrittweiser Erarbeitung zugleich auch überschaubar und zugänglich, gelangen die Bearbeitenden mit einfachen trigonometrischen Überlegungen zu ganz grundlegenden Einsichten. Sie setzen sich kritisch mit der Aufbereitung historisch astronomischer Beobachtungsdaten auseinander und beziehen Neue Medien zielführend in die Untersuchungen ein. Die einzelnen Bausteine bilden dabei in ihrer Gesamtheit einen abgeschlossenen Rahmen des Projekts, können aber auch einzeln ihre Wirkungsfähigkeit entfalten.

Die Thematik der Beschäftigung mit Kometen, zumal im geschichtsträchtigen Jahr 1618 zu Beginn des 30jährigen Krieges, bietet über diese Ansätze hinaus weiteres großes Potenzial, um die mathematischen Untersuchungen interdisziplinär mit geisteswissenschaftlichen Komponenten aus anderen Fächern des Unterrichtskanons abzurunden.

Literatur

Krohn, T., Malitte, E., Richter, K. (2014). Historische astronomische Daten und moderne CAS-Rechner: Der Komet von 1618. In: Weigand, H. G., Behrens, R. (Hrsg.): *CAS-Rechner im Mathematikunterricht*. CASIO Edu. Projects 2014. In Vorbereitung.

Schmidt, E. (1619). *Prodromus Conjunctionis Magnae, anno 1623. futurae. Das ist: Kurtzes und Einfeltiges* […] *Bedencken,* Wittenberg: Rhöner.

Bigalke, H. G. (1984). *Kugelgeometrie*. Frankfurt am Main: Salle.

Hammer: E. (1916). *Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*. Stuttgart: Metzler.

Herget, W., Malitte, E., Richter, K. (2002). *Neue Materialien für den Mathematikunterricht. Sinusfunktionen*. Hannover: Schroedel.

André KRUG, Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

Metakognitive Lehrerinterventionen bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben mit multiplen Lösungen

1. Theoretischer Hintergrund

In der mathedidaktischen Forschung spielt die Förderung von mathematischem Denken eine wichtige Rolle. Gerade in der letzten Zeit ist auch die Förderung von metakognitiven Aktivitäten stärker in den Fokus gerückt. Dabei spielt Metakognition u.a. im Zusammenhang mit der Lernleistung eine wichtige Rolle (Schneider & Artelt, 2010).

Der Begriff der Metakognition ist nicht immer klar von anderen Konzepten abgrenzbar und ist u.a. ein Bestandteil des Konstrukts „Selbstregulation". Unter Metakognition versteht man das Denken über das Denken bzw. Kognition 2ter Ordnung. Der Unterschied zwischen Kognition und Metakognition kann wie folgt beschrieben werden: "… cognition is involved in doing, whereas metacognition is involved in choosing and planning what to do and monitoring what is being done (Garofalo & Lester, 1985, S.164)". Nach Brown (1984) lassen sich (1) Wissen über Kognition und (2) Regulation von Kognition als Aspekte der Metakognition unterscheiden. Regulation von Kognition oder prozedurale Metakognition umfasst u.a. Komponenten der (1) Planung und der (2) Kontrolle. Aus instruktionaler Sicht kann man zwei Merkmale unterschieden, die Metakognition aktivieren: Zum einen könnte es einen Einfluss von speziellen Fragetechniken, die metakognitive Prozesse bei Lernenden anstoßen, und somit einen positiven Einfluss auf die Förderung der Metakognition haben (für einen Überblick siehe Rosenshine, Meister, & Chapman, 1996). Es kann allerdings vermutet werden, dass sich diese Fragetechniken bei einer Lehrperson stabile, personenbezogene Merkmale darstellen. Denn „weniger Schülerfehler oder akute Probleme im Lösungsprozess sind Auslöser von Interventionen, sondern vielmehr der eigene Anspruch der Lehrpersonen." (Leiss, 2010, S.221). Zum anderen kann eine Aktivierung der Metakognition über das eingesetzte Lernmaterial stattfinden. Als Beispiel kann hier die Variation des Aufgabenmaterials angeführt werden (Glaser, Schauble, Raghavan, & Zeitz, 1992). Eine mögliche Variation im Aufgabenmaterial kann die Einforderung von multiplen Lösungen zu einer gegebenen Aufgabe sein. Dabei gibt es aus theoretischer Sicht Gründe, die für die Behandlung von multiplen Lösungen sprechen (Zusammenfassung bei Schukajlow & Blum, 2011). Beispielsweise liefert jede „neue" Lösung eine Vertiefung der Einsicht in die Struktur des Lerngegenstandes (Wittmann, 1995). Durch die Erstellung multipler Lösungen kommt es ebenfalls zur kognitiven Vernetzung, die bei der Förderung des Aufbaus eines

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 675–678). Münster: WTM-Verlag

intelligenten, verstehenden Wissens und selbstregulativer Fähigkeiten der Schüler helfen (Fennema & Romberg, 1999).

Empirische Befunde zur Einforderung von multiplen Lösungen zeigen, dass Schüler häufiger über prozedurale Metakognition (Planung und Kontrolle) bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben unter Kontrolle des Vorwissens berichten, als Lernende die eine Lösung entwickeln (Schukajlow & Krug, 2013). Es ist jedoch nicht geklärt, ob die Behandlung von multiplen Lösungen über die metakognitiven Lehrerinterventionen oder direkt über das Aufgabenmaterial und daraus resultierende Diskussionen und Reflexionen die Metakognition der Schüler aktivieren. Durch weitere Analysen sollen hier entsprechen Lehrerinterventionen berücksichtigt werden.

2. Forschungsfragen und Methode der Studie

Für unsere Untersuchung ergeben sich somit die folgenden Fragestellungen:

1. Lassen sich Lehrerintervention zu Aspekten prozeduraler Metakognition, Planung und Kontrolle im Modellierungskreislauf reliabel erfassen?

2. Wie verteilen sich die Lehrerinterventionen auf den Unterricht mit und ohne multiple Lösungsmöglichkeit?

Für die Analyse der Lehrerinterventionen wurden zwei Lehrpersonen untersucht. Beide Lehrpersonen unterrichteten 5 Schulstunden lang zwei Gruppen von Schülern, die Parallelaufgaben mit (multiple Lösungsmöglichkeiten) und ohne multiplen Lösungsmöglichkeiten (eine Lösungsmöglichkeit) bearbeiteten. Die Lehrpersonen wurden vor der Studie in einer 3-stündigen Fortbildung über die Inhalte der Unterrichtseinheit informiert.

Für die Erhebung der Lehrerinterventionen wurde ein Kategoriensystem, in Anlehnung an Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) und Leiss (2007) entwickelt und validiert. Im Kategoriensystem wurden die folgenden Aspekte erfasst: (1) Prozedurale Metakognition und (2) Verortung im Modellierungskreislauf.

3. Ergebnisse und Diskussion

Es zeigt sich, dass sich beide Aspekte reliabel erfassen lassen. Das Übereinstimmungsmaß, Cohens Kappa, ist im guten Bereich. Die Analysen zweier Klassen aus den Experimentalgruppen die zu gleichen Teilen von zwei Lehrpersonen unterrichtet wurden, zeigt, dass jede Lehrperson in den Experimentalgruppen in etwa die gleiche Anzahl an Lehrerinterventionen bezüglich der beiden Aspekte der prozeduralen Metakognition gegeben hat:

	LP 1	**LP 2**
eine Lösungsmöglichkeit	42	60
multiple Lösungsmöglichkeit	43	61

Tab. 1: Lehrerintervention bezüglich prozeduraler Metakognition beim Unterricht mit und ohne multiple Lösungsmöglichkeit

Differenziert man die prozedurale Metakognition nach den Aspekten Planung und Kontrolle, so zeigt sich das folgende Bild:

Planung	**LP 1**	**LP 2**
eine Lösungsmöglichkeit	14	21
multiple Lösungsmöglichkeit	15	32
Kontrolle		
eine Lösungsmöglichkeit	27	39
multiple Lösungsmöglichkeit	29	29

Tab. 2: Lehrerintervention bezüglich Planung und Kontrolle beim Unterricht mit und ohne multiple Lösungsmöglichkeit

Hier zeigt sich, dass sich die Anzahl der Lehrerintervention bei Lehrperson 1 und Lehrperson 2 unterscheiden. Allerdings scheint die Forderung der Entwicklung von multiplen Lösungen auf Schülerseite keinen bedeutenden Einfluss auf die Anzahl der Lehrerinterventionen bezüglich prozeduraler Metakognition zu haben. Dies steht in Einklang zu anderen Publikationen (Leiss, 2010). Die bisherigen Ergebnisse zeigen, dass die Behandlung von multiplen Lösungen im Unterricht zu einem Anstieg von Planung und Kontrolle auf Schülerseite führt (Schukajlow & Krug, 2013). Durch die gewonnen Erkenntnisse scheint der Erwerb der prozeduralen Metakognition durch die Behandlung von multiplen Lösungen eher auf das Aufgabenmaterial und weniger auf die entsprechenden Lehrerinterventionen zurückzuführen zu sein.

Es bleibt zu prüfen, ob es auf anderen Ebenen der Lehrerinterventionen einen Einfluss auf weitere Aspekte z.B. Interesse gibt. Zudem stellt sich die Frage, ob andere Arten von multiplen Lösungen – wie z.B. die Behandlung von multiplen mathematischen Lösungswegen (Achmetli, Schukajlow & Krug, 2014) – einen Einfluss auf die Anzahl der Lehrerinterventionen bezüglich prozeduraler Metakognition hat.

Literaturverzeichnis

Achmetli, K., Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Wirkungen der Behandlung von multiplen mathematischen Lösungswegen auf Leistungen und Selbstregulation von Lernenden. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*

Brown, A. L. (1984). Metakognition, Handlungskontrolle, Selbststeuerung und andere, noch geheimnisvollere Mechanismen. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), *Metakognition, Motivation und Lernen,* 60–108. Kohlhammer: Stuttgart.

Cohors-Fresenborg, E., & Kaune, C. (2007). Kategorisierung von Diskursen im Mathe-Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile. In A. Peter-Koop & A. Bikner-Ahsbahs (Eds.), *Mathematische Bildung, mathematische Leistung. Festschrift für Michael Neubrand zum 60. Geburtstag,* 233–248. Hildesheim: Franzbecker.

Fennema, E., & Romberg, T. A. (1999). *Mathematics classrooms that promote understanding*: Lawrence Erlbaum Associates Mahwah, NJ.

Garofalo, J., & Lester, F. K., JR. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(3), 163–176.

Glaser, R., Schauble, L., Raghavan, K., & Zeitz, C. (1992). Scientific Reasoning Across Different Domains. In E. Corte, M. Linn, H. Mandl, & L. Verschaffel (Hrsg.), *NATO ASI Series. Computer-Based Learning Environments and Problem Solving,* 345-371. Springer Berlin Heidelberg.

Leiss, D. (2007). *"Hilf mir es selbst zu tun".* Hildesheim: Franzbecker.

Leiss, D. (2010). Adaptive Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren – empirische Befunde einer vergleichenden Labor- und Unterrichtsstudie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 197-226.

Rosenshine, B., Meister, C., & Chapman, S. (1996). Teaching Students to Generate Questions: A Review of the Intervention Studies. *Review of Educational Research*, *66*(2), 181–221.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM*, *42*(2), 149–161.

Schukajlow, S., & Blum, W. (2011). Zur Rolle von multiplen Lösungen in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser & P. Bender (Hrsg.), *Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung–Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der empirischen Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens*, 249–267.

Schukajlow, S., & Krug, A. (2013). Planung, Kontrolle und multiple Lösungen beim Modellieren. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, 910-913, Münster: WTM.

Wittmann, E. C. (1995). Aktiv - entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht - Aktiv - Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht vom Kind und vom Fach aus. In G. N. Müller (Ed.), *Beiträge zur Reform der Grundschule: Vol. 96. Mit Kindern rechnen,* 10–41. Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Jenny KUROW, Halle (Saale)

Mathematik und Musik: Schülerinnen und Schüler entdecken das Monochord – zur Vernetzung von Schule und Universität

Seit dem letzten Jahrzehnt wird die Vernetzung von Schule und Universität im Bereich der Mathematik als ein neuer Weg der Förderung von Schülerinnen und Schülern besonders vorangetrieben (vgl. Vogt, S. 53). Es haben sich an den Hochschulen verschiedene Ansätze zur Realisierung entwickelt. Der Fokus liegt dabei vorrangig auf mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern. Dagegen werden für allgemein mathematisch Interessierte bisher nur vereinzelte Angebote für eigenständiges, offenes und kreatives Arbeiten gemacht. Außerdem ist bei aktuellen Vernetzungsansätzen der Aspekt zu inspirierender Zusammenarbeit oft noch ausbaufähig.

Forschungsfragen

Im Folgenden wird ein Forschungsprojekt zur Vernetzung von Schule und Hochschule im Bereich der Mathematik mit dem Schwerpunkt der Förderung von mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern vorgestellt. Das Projekt besteht aus drei Teilschritten: es beginnt mit von der Hochschule gestalteten Arbeitsgemeinschaften, wird fortgeführt mit der Durchführung der AGs im Tandem Schule-Hochschule (inklusive begleitender Lehrerfortbildung) und endet mit der auf den Unterricht orientierten Phase, wobei hier die Gestaltung durch die Schulen autark, aber weiterhin im Forschungsaustausch mit der Hochschule erfolgt. Die im Folgenden vorgestellte Fallstudie, die in den ersten Schritt eingebettet war, soll Aufschluss zu folgenden Forschungsfragen geben:

- Gelingt es, eine gegenseitig inspirierende Anregung von Schule und Hochschule zu erreichen? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Schule bzw. Hochschule?
- Erreicht man mit dem neuen Vernetzungsansatz eine Änderung des subjektiven Verständnisses von Mathematik der Beteiligten?
- Was sind geeignete Ansätze zur Förderung von mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern?
- Kann eine wissenschaftlich orientierte Arbeitsweise so faszinierend sein, dass sie Lernende nachhaltig für Mathematik motiviert?

Untersuchungsdesign

Die Untersuchung dieser Forschungsfragen mit Hilfe einer Fallstudie erstreckt sich über die Schuljahre 2012/13 und 2013/14. Zunächst wurden

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 679–682). Münster: WTM-Verlag

drei Mathematik - Arbeitsgemeinschaften an verschiedenen Schulen ohne mathematisch-naturwissenschaftlichem Schwerpunkt von einer Vertreterin der Hochschule durchgeführt. Die Teilnahme an den Arbeitsgemeinschaften war freiwillig, nicht beschränkt und richtete sich bewusst an alle Schülerinnen und Schüler der Klassen sieben bis neun. Ziel der Arbeitsgemeinschaft war es, ihnen eine langfristige Möglichkeit zu geben, Mathematik *authentisch* zu erleben und sich eigenständig und kreativ mit Mathematik auseinanderzusetzen (vgl. Vollrath & Roth 2012, S. 24-25). Die Grundlage der Arbeitsgemeinschaft bildete das Konzept des forschenden Lernens (vgl. Bönsch 1991, S. 199-202). Dies ermöglichte zudem, dass die Schülerinnen und Schüler den Verlauf der Arbeitsgemeinschaft mitbestimmten. Ein weiterer Teil der Untersuchung findet derzeit im zweiten Halbjahr des Schuljahres 2013/2014 statt. Ziel ist es, die gegenseitig beratende, unterstützende, einander anregende und gemeinsam forschende Zusammenarbeit zwischen Lehrerinnen und Lehrern und Dozentin verstärkt in den Mittelpunkt zu rücken. Dazu wird eine Mathematik-Arbeitsgemeinschaft gemeinsam, gleichberechtigt als Tandem vorbereitet, durchgeführt und reflektiert.

Zu Beginn der Arbeitsgemeinschaft wurden alle Jugendlichen mit Hilfe eines Leitfadens interviewt und Zeichnungen zu ihrem Verständnis von Mathematik angefertigt. Eine weitere Befragung der Teilnehmerinnen und Teilnehmer erfolgte am Ende des Schuljahres 2012/2013 und des Schulhalbjahres 2013/2014. Weitere Auswertungsinstrumente sind das Lerntagebuch, das die Schülerinnen und Schüler während der gesamten Zeit führten, und die teilnehmende Beobachtung. Am Ende des ersten Halbjahres des Schuljahres 2013/2014 wurden außerdem Interviews mit den Mathematiklehrerinnen und –lehrern durchgeführt.

Alles Zahl oder was? - Schülerinnen und Schüler entdecken das Monochord

Exemplarisch wird im Folgenden eine der AGs der Fallstudie vorgestellt – um den Kern der Untersuchung und erste Ergebnisse vorzustellen. Sie macht deutlich, dass der Forschungsansatz erfolgreich ist und das Aufdecken wichtiger Kernfragen im Kontext ermöglicht.

Ausgangs- und Mittelpunkt der Arbeitsgemeinschaft mit Schülerinnen und Schülern der achten Klasse eines Gymnasiums im Umland von Halle (Saale) war das Monochord, ein antikes Versuchsinstrument, das mit Saiten bespannt ist. Das Monochord übernimmt als Instrument die Funktion der Visualisierung und der Vermittlung eines akustischen Höreindrucks (vgl. Näf 1999, S.11). Es trägt folglich zum Erleben des Sachverhalts mit allen Sinnen bei.

Nach einem ersten Impuls durch die AG-Leiterin warfen die Schülerinnen und Schüler der Arbeitsgemeinschaft erste Fragen, das Instrument und dessen Erfinder betreffend, auf. Sie untersuchten das Monochord auf dessen Bestandteile und deren Funktion und recherchierten das Leben und Lebenswerk von Pythagoras und den Pythagoreern. Ein Resultat dieser Recherche war der Leitsatz: Alles ist Zahl! Diese These war dann Ausgangspunkt der Frage: Wie viel und welche Mathematik steckt im Monochord? Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Arbeitsgemeinschaft versuchten gemeinsam nach Antworten zu suchen. Ausgangspunkt ihrer Experimente am Monochord war ihr musiktheoretisches Wissen aus dem Schulunterricht. So entdeckten sie die Mathematik in Intervallen, Stimmungen und Obertönen auf dem Monochord. Fazit der Untersuchungen war: Musik ist vertonte Mathematik! Fasziniert von der Arbeitsweise und den Ergebnissen, planten die Schülerinnen und Schüler abschließend einen Workshop für andere Schülerinnen und Schüler, die die Experimente-Werkstatt Mathematik in Halle (Saale) besuchten.

Erste Ergebnisse

Die Fallstudie ist noch nicht abgeschlossen. Trotzdem ergeben sich bereits interessante Forschungsansätze.

Als Anlass für den Besuch der Arbeitsgemeinschaft gaben die Schülerinnen und Schüler vordergründig an, Mathematik von einer anderen Seite kennen lernen zu wollen und dabei Spaß zu haben. Andere Motive waren das Themeninteresse und die Verbesserung im Fach Mathematik.

Es lassen sich auch Rückschlüsse auf die Nachhaltigkeit der Motivation ziehen. Zum Schuljahreswechsel gaben alle Schülerinnen und Schüler an, die Arbeitsgemeinschaft weiter besuchen zu wollen. Die Interviews machen deutlich, dass dabei die Arbeitsweise, Thematik und Weitergabe an andere Schülerinnen und Schüler wichtige Kriterien waren.

Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Interesse an Mathematik und den Emotionen zum Fach? Es zeigt sich, dass die Schülerinnen und Schüler an Mathematik interessiert sind. Eine Schülerin äußerte sich so: „So kann man erstmal verschiedene Wege finden und man auch mal von allein auf den richtigen Weg kommen, auf die richtige Idee, anstatt einfach nur alles gesagt zu bekommen!“

Empfinden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Arbeitsgemeinschaft Mathematik zu Beginn als kompliziert und anstrengend, zeigen die Adjektive am Ende der Arbeitsgemeinschaft ein deutlich anderes Bild auf. Hier beschrieben die Schülerinnen und Schüler Mathematik als logisch, lustig, abstrakt, nützlich, kreativ, spannend und interessant. Zudem hat sich auch ihr Bedeutungsverständnis von Mathematik durch eine Beispielsituation verändert. Anfangs bestand Mathematik nur aus Zahlen. In den Abschlussinterviews sagte ein Schüler: „Mathematik ist eine Naturwissenschaft. Bei einer Naturwissenschaft erforscht man ja irgendwas und wir haben das Verhältnis zwischen Mathe und Musik erforscht.“ Diese Äußerung zeigt auch, dass Mathematik als ein kreatives Werkzeug verstanden wird.

Ist die Motivation an das spezielle Thema gebunden? Gibt es eine Beziehung zwischen Thema und Arbeitsweise? Zu Beginn der Arbeitsgemeinschaft stand das Monochord verstärkt im Mittelpunkt. Im Verlauf des Schuljahres nahm die Faszination des Instruments ab, das eigenständige Experimentieren begeisterte zunehmend. Die Faszination von Wissenschaft als Beschaffen von Wissen wurde zum zentralen Aspekt der Arbeitsgemeinschaft.

Ein weiterer zentraler Punkt der Arbeitsgemeinschaft war die Eigentätigkeit. Anfangs waren die Schülerinnen und Schüler irritiert darüber, *selbst* kreativ zu arbeiten. Diese Rollenverteilung war ihnen bisher ungewohnt. Im Verlauf der Arbeitsgemeinschaft nahmen sie ganz selbstverständlich eine aktive Rolle ein: sie recherchierten eigenständig, planten ihre Untersuchungen und brauchten nur noch einen kleinen Grad fachlicher Unterstützung bei der Bewältigung mathematischer Aufgaben.

Fazit und Ausblick

Im Rahmen der Fallstudie zeigte sich, dass forschendes Lernen einen Beitrag zur Förderung von mathematisch interessierten Schülerinnen und Schülern leistet und eine gegenseitig anregende Beziehung zwischen Schule und Hochschule ermöglicht. Aus den Befragungen der Lehrerinnen und Lehrer ergaben sich weitere Anregungen für die Vernetzung von Schule und Hochschule im Bereich der Mathematik. Ein Ansatz kann das Tandem sein, der eine aktive Beziehung zwischen Lehrerinnen und Lehrer, Dozentinnen und Dozenten und Schule ermöglicht. Im Rahmen des Tandemkonzeptes sollen zukünftig auch Lehrerfortbildungen stattfinden.

Literatur

Bönsch, M. (1991). Forschendes Lernen. In M. Bönsch (Hrsg.), *Variable Lernwege – Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden* (S. 197-211). Paderborn: Schöningh.

Näf, F. (1999). *Das Monochord*. Bern: Lang.

Vogt, T. (2010). Schule + Hochschule = Netzwerkprojekt – Die Vernetzung von Schule und Hochschule im Bereich Mathematik. *Mitteilungen der Deutschen Mathematik-Vereinigung* , *18*, S. 53-54.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Grit KURTZMANN, Rostock

Analyse stochastisches Wissen von Grundschullehrkräften und Konsequenzen für die Lehrerfortbildung

Im Schuljahr 2012/13 wurde erstmals eine einjährige internetgestützte, überwiegend fachlich orientierte Fortbildung für Lehrkräfte der Primarstufe zur Stochastik in einer Erprobung durchgeführt. Die Entwicklung, Durchführung und Evaluation der Fortbildung beruht auf der Methode der konstruktiven Entwicklungsforschung. (Wellenreuther 2000) Vornehmliches Ziel der Fortbildung war es, den Lehrkräften ein fachliches Wissen entsprechend der Empfehlungen für die Stochastikausbildung von Lehrkräften an Grundschulen des Arbeitskreises Stochastik (2012) zu vermitteln. Es musste nach der Erprobung der Fortbildung festgestellt werden, dass dieses Ziel nicht zu verwirklichen war. Im Folgenden werden Gründe für das Scheitern, verbunden mit ersten Ergebnissen aus einer inhaltlich veränderten Fortbildung im laufenden Schuljahr dargestellt.

1. Relevanz der Notwendigkeit von Stochastik-Lehrerfortbildungen

Aus Sicht der Pläne ist klar die Notwendigkeit der Lehrerfortbildung in diesem Bereich der Mathematik festzustellen. Mit dem Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15. 10. 2004 sollte durch die Bildungsstandards Mathematik der Primarstufe mit der Entwicklung der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen das Gebiet „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ (Kultusministerkonferenz 2004, S.22) Einzug in die Grundschulen der Bundesrepublik finden.

Für die Umsetzung der Bildungsstandards ist fachliches Wissen notwendig. 2011 unterrichteten an den öffentlichen allgemeinbildenden Grundschulen in Mecklenburg-Vorpommern rund 83 % Lehrkräfte, die über 45 Jahre alt waren. Das bedeutet, dass die Lehrkräfte aus diesem Altersbereich weder in ihrer eigenen Schulzeit noch in der Ausbildung als Unterstufenlehrer am Institut für Lehrerbildung in der DDR mit dem Gebiet der Stochastik in Berührung kamen. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit der Lehrerfortbildung denn "…offensichtlich haben nur Lehrer mit guten Fachkenntnissen ausreichendes Selbstvertrauen, um den Unterrichtsverlauf auch dann noch steuern zu können, wenn die Schüler neue Wege der Erarbeitung des Stoffes gehen." (Bromme 1992, S. 95)

2. Konzept der Lehrerfortbildung

Zunächst soll kurz das Konzept der Fortbildung vorgestellt werden. Innerhalt eines Schuljahres finden vier ganztägige Präsenztreffen mit drei dazwi-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 683–686). Münster: WTM-Verlag

schenliegenden Arbeitsphasen statt. In den Präsenzveranstaltungen werden die fachlichen Inhalte der Stochastik verbunden mit der didaktischen Umsetzung vermittelt und vorhergehende Arbeitsphasen ausgewertet. In den Arbeitsphasen erproben die Lehrkräfte in ihren Klassen die Praxistauglichkeit von Aufgaben zu Unterrichtsinhalten, die mit dem erlernten Fachwissen korrespondieren.

3. Wirksamkeit der Lehrerfortbildung

Ein Mittel zur Überprüfung der Wirksamkeit der Fortbildung ist ein Pre-Post-Test-Konstrukt, welches vornehmlich das Ziel hat, das Vorwissen der Lehrkräfte zu ermitteln und die Inhalte des Kurses entsprechend der Ergebnisse zu variieren. Dies entspricht der Stufe der formativen Evaluation des Kurses. (Wellenreuther 2000) Der Test besteht aus vier Teilen mit insgesamt 21 Fragen, aufgeteilt auf die zu vermittelnden Inhalte mit einem entsprechenden Anteil, der wie folgt repräsentiert wird: allgemeines Verständnis von stochastischen Situationen – 3 Fragen, Wahrscheinlichkeitsrechnung – 7 Fragen, Statistik – 9 Fragen und Kombinatorik – 2 Fragen. In der Erprobung zeigte sich bei der Pre-Post-Testung überwiegend eine Verschlechterung der Ergebnisse über dem Testzeitraum, welches ein Indikator für eine Wissensüberflutung sein kann. In der Haupterprobung in diesem Schuljahr bestätigte sich diese Vermutung bei näherer Betrachtung der Ergebnisse des Pretests. Dies soll an einigen Beispielen näher betrachtet werden. Dabei sei zu erwähnen, dass die Kursentwicklung und Durchführung in Zusammenarbeit mit dem Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik erfolgt und in Berlin ein fast identischer Kurs zur Stochastik in der Grundschule durchgeführt wurde. Dabei ist aber zu beachten, dass Berlin im Gegensatz zu Mecklenburg-Vorpommern eine sechsjährige Grundschule hat und somit auch fachliche Grundlagen für die Lerninhalte der Stochastik der Orientierungsstufe als Mindestwissen der Lehrkräfte vermittelt werden müssen. Da dieser Kurs nur über ein halbes Schuljahr andauert, können auch schon Ergebnisse des Posttestes dargestellt werden. Bei der Anzahl der getesteten Lehrkräfte zeigt sich folgende Verteilung:

- Mecklenburg-Vorpommern: n = 54
- Pre-Test Berlin: n = 31
- Post-Test Berlin: n = 20

Für den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden klassische Urnenaufgaben ausgesucht, wobei die erste Aufgabe eine einfache Berechnung einer Laplace-Wahrscheinlichkeit und die zweite Aufgabe dazu eine Berechnung eines Gegenereignisses beinhaltet.

Im Ergebnis zeigte sich, dass die Lehrkräfte schon mit der ersten Aufgabe große Schwierigkeiten hatten. Nur 39 % der Lehrkräfte in Mecklenburg-Vorpommern und 58 % der Lehrkräfte in Berlin konnten die Aufgabe lösen. Dabei ist anzumerken, dass diese Art der Aufgaben in Berlin durch die sechsjährige Grundschule einen Unterrichtsinhalt darstellt. Auffällig ist in den Ergebnissen auch, dass 24 % der Lehrkräfte in Mecklenburg-Vorpommern eine wörtliche Beschreibung des Ergebnisses angaben. Diese Angaben wie möglich, wenig wahrscheinlich etc. sind übliche inhaltliche Beschreibungen von Wahrscheinlichkeiten in der Primarstufe. Zu Vermuten ist, dass die Lehrer nicht den formalen Wahrscheinlichkeitsbegriff kennen. Gestützt wird diese Vermutung durch Aussagen von Lehrkräften wie: „Ist das wirklich so festgelegt, dass Wahrscheinlichkeiten mit Zahlen zwischen 0 und 1 angegeben werden?“.

Im Bereich der Statistik soll hier näher auf Aufgaben zum arithmetischen Mittel eingegangen werden. Der Test erhielt insgesamt 3 Aufgaben zum arithmetischen Mittel, in der ersten Aufgabe musste ein Durschschnittsalter aus 5 Werten ermittelt werden und in der zweiten Aufgabe sollten zu einem vorhandenen Durchschnittsalter 3 mögliche Werte angegeben werden, ohne dass sich der Durschnitt ändert. Erwartungsgemäß erfüllte der Großteil der Lehrkräfte (MV 87 % und Berlin 84 %) der Lehrkräfte die erste Aufgabe. Einige Schwierigkeiten stellte schon die Umkehraufgabe dar, die nur noch 57 % (MV) und 45 % (Berlin) lösen konnte. Erstaunlich ist das Ergebnis zumindestens für Berlin, da diese Art der Aufgaben hier wieder Unterrichtsinhalt laut Rahmenplan ist.

Aussagekräftiger dagegen ist die dritte Aufgabe zur Interpretation des arithmetischen Mittels, die primarstufenreleant ist, denn hier sollten die inhaltlichen Vorstellungen zum arithmetischen Mittel überprüft werden. Hierzu konnten die Befragten in der Pre-Testung keine bzw. nur falsche Angaben machen. Auch in Berlin wurde die Vermittlung der inhaltlichen Vorstellungen in das Kurskonzept aufgenommen. 45% der Lehrkräfte konnten in der Post-Testung die Idee nennen, also eine deutliche Steigerung der Ausgangssituation.

Einen weiteren Teil der formativen Evaluation stellten die Befragungen der Lehrkräfte und das Anfertigen der Erfahrungsberichte dar. Mit dem letzteren wurde eine Festigung der Fortbildungsinhalte und die Umsetzung im Unterricht angestrebt. Hierbei zeigte sich, dass die Lehrkräfte viele Ideen zur Umsetzung im Unterricht entwicklen, aber teilweise auch fachliche Fehler machten. In den Befragungen der Voruntersuchung wurde häufig als Mangel fehlendes Material für den

Einsatz im Unterricht und die Vermittlung von zu viel Theorie angegeben. In der Hauptuntersuchung war als einzige Kritik die wenige Zeit in der Vermittlung des Umganges mit der Online-Plattform angemerkt worden. Als positiv wurde vor allem die Kursstruktur, die Gestaltung der Kurse und das nun zur Verfügung gestellte Material genannt.

4. Konsequenzen für künftige Lehrerfortbildungen

Insgesamt lässt sich aus den Ergebnissen der Pre-Post-Testung, aus den Erfahrungsberichten der Lehrkräfte zu den Unterrichtsstunden und den Befragungen und subjektiven Einschätzungen der Lehrkräfte zu ihrem eigenen Wissenszuwachs feststellen, dass das Vorwissen der Lehrkräfte bezüglich der Stochastik sich als weitaus geringer darstellt, als erwartet.

Zusammenfassend lässt sich formulieren, dass Lehrkräfte in MV

- fachliche Fortbildung nur gekoppelt mit einer didaktischen Umsetzung für den eigenen Unterricht akzeptieren,
- konkrete Anregungen für den eigenen Unterricht in Form von Aufgabenbeispielen, die dann modifiziert werden können, benötigen,
- sich ablehnend gegenüber fachlichen Inhalten verhalten, die nicht mit ihrem Unterricht in Verbindung gebracht werden können und
- im Bereich der Stochastik als fachfremd zu bezeichnen sind.

Dadurch ergibt sich für künftige Fortbildungen eine stakte Reduktion der fachlichen Inhalte, verbunden mit einer intensiven Festigung des Wissen und Könnens und Angabe von Hinweisen zum Einsatz im Unterricht mit Aufgabenbeispielen.

5. Konsequenzen für einen effektiven Stochastikunterricht

Es ergibt sich, dass die Lehrkräfte wie auch bei anderen Unterrichtsinhalten der Primarstufe Hinweise für eine stufenweise Entwicklung der entsprechenden Lerninhalte benötigen. So kann zum Beispiel die Kompetenz im Erstellen von Diagrammen stufenweise über die Entwicklung von Teilhandlungen aufgebaut werden. Hier besteht großer Handlungsbedarf.

Literatur

Bromme, Rainer (1992): Der Lehrer als Experte. Zur Psychologie des professionellen Wissens. 1. Auflage. Bern: H. Huber.

Kultusministerkonferenz (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. In: *Neuwied: Luchterhand*.

Wellenreuther, Martin (2000): Quantitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft: eine Einführung: Beltz Juventa.

Ana KUZLE, Rolf BIEHLER, Paderborn

Wie „multiplizieren“ Mathematikmultiplikatoren in ihren selbst gestalteten Lehrerfortbildungsmaßnahmen?

Im Schuljahr 2012/13 führte das DZLM eine halbjährige Qualifikation zur Datenanalyse in der Sekundarstufe I für Mathematikmoderatoren aus NRW durch. Am Ende der Maßnahme veranstalteten die Mathematikmoderatoren selber einen Impulskurs zum Thema, in dem sich eigene Kompetenzen mit den neu gelernten Inhalten verknüpften. Im Beitrag werden Analysen zur Qualität der durch die Mathematikmoderatoren gestalteten Stochastiklehrerfortbildungsmaßnahmen vorgestellt.

1. Design der Multiplikatorenfortbildung NRW 2012/13 im DZLM

Im Rahmen der Weiterqualifizierungsangebote des DZLM wurde im Schuljahr 2012/13 erstmals ein 10-monatiger Qualifizierungskurs „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I“ für Mathematikmoderatorinnen und –moderatoren aus NRW durchgeführt. Im ersten Modul haben sich für 5 Monate die Fortbilder der Mathematikmoderatorinnen und –moderatoren, dies waren Rolf Biehler, Ana Kuzle, Janina Oesterhaus und Thomas Wassong, exemplarisch auf die Verknüpfung von inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen in der Stochastik konzentriert. Zusätzlich wurde die Förderung von fortbildungsdidaktischem und –methodischem Wissen angestrebt, um die Mathematikmoderatorinnen und –moderatoren in ihrer Rolle als Fortbilder zu unterstützen. Dies ist eine wichtige Facette professioneller Kompetenz, die speziell auf die Arbeit der Teilnehmer als Moderatoren eingeht. Die Moderatoren vertieften ihr fortbildungsdidaktisches und -methodisches Wissen zunächst mit Hilfe theoretischer Inputs. Durch die theoretischen Inputs der Dozenten wurden solche Teilaspekte und deren Umsetzungsmöglichkeiten erarbeitet, die in Fortbildungen bedeutend sind und die in der Fortbildungspraxis für Lehrende die größten Herausforderungen darstellen (Lipowsky, 2004).

Um das theoretisch erworbene Wissen in praktischen Fortbildungsmaßnahmen umsetzen zu können, planten die 12 Mathematikmoderatorinnen und –moderatoren (MuM) in einem Team von zwei bis vier MuM im Rahmen der Qualifizierung eine vierstündige Stochastikfortbildung zum Thema „Datenanalyse in der Sekundarstufe I“ für Mathematiklehrkräfte als halbtägigem Impulskurs. Am Ende der Maßnahmen wurden fünf dieser schulinternen oder schulexternen Lehrerfortbildung aus fachlicher und fachdidaktischer Perspektive konzipiert und durchgeführt. Darüber hinaus wurde von den DZLM-Fortbildern ein Ablaufplan vorgegeben, der die fol-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 687–690). Münster: WTM-Verlag

gende Komponenten vorsah: (1) Einführung, bestehend aus Kennenlernen und Impulsreferat (ca. 1 Stunde), (2) Block 1 (ca.1.5 Stunde), (3) Block 2 (ca. 1.5 Stunde) und (4) Reflexion und Abschluss (ca. halbe Stunde). Der Einsatz von Stochastiksoftware Fathom war erwünscht, über Art und Intensität konnten die MuM selber entscheiden. Während des Prozesses der Planung, Durchführung und Reflexion wurden die MuM vom DZLM begleitet und unterstützt mit anschließender Beratung durch DZLM-Mitarbeiter.

2. Untersuchungsdesign der Evaluation der die durch Mathematikmoderatoren gestalteten Stochastikfortbildungen

Zu den durchgeführten Fortbildungen liegen folgende Daten und Materialien vor: (1) die durch die Moderatoren vorgenommene Dokumentation der Fortbildungen, (2) der Reflexionsbogen, (3) die Videoaufzeichnungen und (4) die Befragung zu den durchgeführten Fortbildungen. Die Mathematikmoderatorinnen und –moderatoren haben die durchgeführte Fortbildungen anhand des Formulars zur Dokumentation der Fortbildung dokumentiert, das gemeinsam vom DZLM entwickelt wurde. Es enthielt sechs verschiedene Kategorien: Inhaltliche und organisatorische Rahmenbedingung der Fortbildung, Situations- und Bedarfsanalyse, Ziele und Kompetenzen, Gestaltungsprinzipien, Ablaufplanung der Fortbildung und Umsetzung des Fortbildungskonzeptes. Im Anschluss an die Durchführung wurde die Fortbildung durch einen Reflexionsbogen reflektiert. Hier wurde insbesondere auf die Auswahl der Methoden, die Gestaltung der Fortbildung, die geförderten Kompetenzen und gemachte Erfahrungen eingegangen. Darüber hinaus wurden alle Fortbildungen auch auf Video aufgezeichnet. Diese von DZLM entwickelten Befragung umfassten die folgenden fünf Kategorien: Umsetzung und Gestaltung der Fortbildung, Lehr-Lern-Formate – Umgang und Anforderungen und Reflektion, Umsetzung im Unterricht, subjektiver Lernerfolg und drei offene Fragen zur Fortbildung. An jeder Fortbildung haben 8-14 Mathematiklehrkräfte teilgenommen, insgesamt also 52 Mathematiklehrkräfte. Ziel der Befragung war die Erforschung der Evaluation der Akzeptanz, des subjektiven Lernerfolges und des Transfers (Kirkpatrick & Kirkpatrick, 2006). Die Analyse aller vorliegenden Daten erfolgte in mehreren Schritten und umfasste sowohl induktive als auch deduktive Kategorisierung.

3. Theoretischer Rahmen und Forschungsfragen

Es existieren praktisch keine Studien, die sie sich mit der Qualität von durch Mathematikmoderatoren gestalteten Lehrerfortbildungsmaßnahmen beschäftigen. Ziel dieser Studie war es, die Qualität von durch Mathematikmoderatoren gestalteten Stochastiklehrerfortbildungsmaßnahmen zu untersuchen. Deren Qualität wurde anhand von Merkmalen wirksamer Fortbildungsangeboten analysiert, die aus der Literatur identifiziert wurden: die Praxis der MuM (Blömeke, 2013), die Qualität der eingesetzten Materialien, die Fortbilder-Rolle (Timperley, 2011) und die Art und der Umfang der Fortbildungskompetenzen (Timperley, 2011), wie sie sich in der selbst durchgeführten Fortbildungen zeigen, befasst. Für die vorliegende Studie waren die folgenden Fragen von Interesse:

- Wie gestalten die fünf Moderatoren-Teams einen Impulskurz zur Datenanalyse in der Sekundarstufe I, basierend auf den in der Moderatorenfortbildung erworbenen Kenntnissen und fortbildungsspezifischen Kompetenzen?
- Was sind die zusätzlich benötigten Kompetenzen für Mathematikmoderatoren im Vergleich zu Lehrerkompetenzen?
- Wie kann eine Moderatorenqualifizierung neuentwickelt werden, um Qualität und Wirksamkeit der die durch Mathematikmoderatoren gestalteten Fortbildungen zu fördern?

4. Ergebnisse und Schlussfolgerungen

Die fünf Impulskurse wurden teilnehmerorientiert, fallbezogen, kompetenzorientiert, vielfältig und reflexionsanregend gestaltet. Es wurde aber der Bezug zur eigenen Schulpraxis von den Lehrkräften und der direkten Umsetzbarkeit im Mathematikunterricht oft nicht berücksichtigt. Das Prinzip „Kooperationsförderung" war nicht zentral bei der Planung und Durchführung der Impulskurse. Die Inhalte der Impulskurse entsprachen dem Lehrplan, aber die Lehrkräfte fanden die Inhalte bzw. Methoden zu zeitaufwendig und fühlten sich noch nicht kompetent genug, die selbst umzusetzen. Die Lehrkräfte wurden zur gemeinsamen Reflexion und Selbstreflexion über behandelte Themen sowie über die eigene Unterrichts- und Fortbildungspraxis wenig, falls überhaupt, angeregt. Da die Mathematikmoderatoren noch wenig eigene Unterrichtserfahrungen mit digitalen Medien in der Stochastik hatten, führte dies zu einem Konflikt in Bezug auf ihr Verständnis von Fortbildungskompetenz auf Basis ihrer Unterrichtskompetenz. Aus diesem Grund - vermuten wir - hatten die Moderatoren beim Ausfüllen des Reflexionsbogens auch Schwierigkeiten bei der Thematisierung kritischer Stellen bezüglich einer Wiederholung ihrer Fortbildung. Die fünf Impulskurse unterschieden sich auch bezüglich retrospektiven Einschätzung des Lernzuwachses durch die Teilnehmenden. Dies wirft die Frage auf, warum einige Lehrkräfte keinen oder nur einen minimalen Wachstum ihrer Kompetenz sehen. Einerseits wurden die Fortbildungen inhaltlich und methodisch partizipativ gestaltet und gut strukturiert: praktische Ideen über neue Strategien / Programme standen im Mittelpunkt. Allerdings wurden spezifische Unterrichtsbestandteile (Bewertung, Lehrplan, Umsetzung im MU) in der Regel nicht integriert und diskutiert („entwickelte Fortbildnerrolle“, Timperley, 2011). Damit ist Transferleistung und Wirksamkeit fragwürdig. Revision von konkreten Fortbildungsbausteinen in Sinne eines Kompetenztrainings, nämlich Kopplung von fachlichen bzw. fachdidaktischen Inhalten mit Fortbildungsdidaktik ist notwendig, um die verschiedenen Fortbildner-Facetten zu entwickeln bzw. fördern.

Hinsichtlich der zweiten Forschungsfrage vermuten wir, dass die Mathematikmoderatorinnen und –moderatoren mehrere Paare von Themen und Wissenskompetenzen auf einem höheren Niveau besitzen als Mathematiklehrer. Darüberhinaus verfügen sie über Wissensbestände aus der Erwachsenenbildung, aus der Organisationsentwicklung sowie den Bereichen Beratung und Coaching. Bezüglich der dritten Forschungsfrage ist uns klar geworden, dass das Sammeln von Unterrichtserfahrungen zwischendurch notwendig ist, um die „integrierte Fortbildner Rolle“ (Timperley, 2011) zu erreichen. Da das ergänzende Sammeln von Unterrichtserfahrungen zentral ist, um das Selbstvertrauen der Moderatoren zu stärken, sind zusätzliche Unterstützungsangebote geplant. Das Erproben der Materialien im eigenen Mathematikunterricht und die Betreuung der Mathematikmoderatorinnen und –moderatoren durch die Fortbilder könnte die professionelle Unterstützung bei der Unterrichtsentwicklung vorantreiben. Auf Grundlage dieser Erfahrungen könnten die Mathematikmoderatorinnen und –moderatoren durch die Durchführung einer schulpraxisorientieren Fortbildung die Ideen des innovativen Unterrichts an Lehrkräfte vermitteln. Durch die angestrebte langfristige Zusammenarbeit der Teilnehmenden in professionellen Lerngemeinschaften (mini PLGs) zur kollegialen fachbezogenen Unterrichtsentwicklung, sollen die Kooperations- und (Selbst-)Reflexionsfähigkeiten von Mathematiklehrkräften und -moderatoren gefördert werden, um nachhaltig eine Weiterentwicklung ihres Unterrichts und ihrer Fortbildungen zu erreichen.

Literatur

Blömeke, S. (2013). *Mathe. Lehren. Lernen. Theoretischer Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik.* Online verfügbar: http://www.dzlm.de/media/Theoretischer-Rahmen_v2.pdf

Lipowsky, F. (2004). Was macht Fortbildungen für Lehrkräfte erfolgreich? *Die Deutsche Schule, 96*(4), 462–479.

Timperley, H. S. (2011). Realizing the power of professional learning. London: Open University Press.

Ana KUZLE, Paderborn

Was hat Schreiben mit Mathematik zu tun? Erfahrungen und Einstellungen zum Schreiben von Lehramtsstudierenden

Das Schreiben spielt im MU eine geringe Rolle - wenn überhaupt, dann in der Sekundärstufe und im Tertiärbereich. Um dieses Bild verändern zu können, müssen erst Erfahrungen zum Schreiben in der Mathematik und dessen Wirksamkeit auf die mathematische Leistung während der Lehrerausbildung ermittelt werden. Im diesen Beitrag stelle ich Ergebnisse über diesbezüglich von Lehramtsstudierenden gesammelte Erfahrungen vor und deren Einstellungen zum Einbeziehung von Schreiben in den eigenen MU.

1. Einleitung

„Was hat das Schreiben mit der Mathematik zu tun? Man schreibt in Englisch, Geschichte, ... Nä, in Mathe nicht. Mathe sind reine Zahlen.“ (Schülerzitat). Lernende sind gegenüber der Idee des Schreibens in der Mathematik nicht offen und sehen das Schreiben nur als ein der Element im Sprach- und Sozialkundeunterricht an. Anderseits fördern Bildungseinrichtungen den Einsatz von Schreiben in der Mathematik. Nach NCTM, kann „das Schreiben, als ein Prozess angesehen werden, [der] den Wert auf Brainstorming, Klärung und Revidieren legt ... auf die Lösung eines mathematischen Problems angewandt werden kann” (1980, S.142). In seinen späteren Berichten hat der NCTM auch behauptet, dass „das Schreiben in der Mathematik Studierenden auch dabei helfen kann, ihr Denken zusammenzulegen, weil es des Nachdenkens über ihr Werk und der Klärung ihrer Überlegungen bedarf” (2000, S. 61). Daher hat der NCTM aber auch KMK (2004) das Schreiben als eine Methode oder ein Mittel dazu angesehen, Mathematik sowohl zu lernen als auch zu kommunizieren (z. B. Erläuterung von Verfahren in eigenen Worten, Untersuchungsbericht, Wissensspeicher, Rechengeschichte zum Schreiben, Lerntagebuch, Themenstudienarbeit). Ebenso vielfältig wie die Schreibanlässe für den Mathematikunterricht sind die mit ihnen verfolgten didaktischen Anliegen: (1) Vertiefung der Auseinandersetzung, (2) Anregung zur Reflexion, (3) Rückschau und Prozesskatalysator, (4) Bedeutung der eigenen Sprache und (5) Diagnostisches Potential (z.B. Kuntze & Prediger, 2005; Kuzle, 2013; Pugalee, 2001). Trotzdem findet das Schreiben im Mathematikunterricht wenig Einsatz, insbesondere nicht im sekundären Bildungsbereich.

Für die Schaffung eines im Hinblick auf das Schreiben positiveren Klimas in der Schule ist dessen Ausbreitung auf die Tertiärstufe und/oder direkt in Schulen von großer Bedeutung. Um dieser mathematischen Vision in der

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 691–694). Münster: WTM-Verlag

Lehrerausbildung zu begegnen und dabei die Einstellungen hin zu einer eher prozesshaften Sicht auf Mathematik zu beeinflussen, wurden ein Seminarkonzept und dazugehörige Instrumente entwickelt, welche von allem die prozessualen Aspekten von Mathematik erleben lassen.

2. Kontext – Seminarkonzept

Das Seminar fand einmal pro Woche statt und wurde seitens der Autorin dieses Aufsatzes und den Studierenden organisiert. Im Schwerpunkt des Seminars lag das Lernen über das Problemlösen (z.B. Problemlösemodelle, Heuristik, selbstreguliertes Problemlösen, Problemlösen lernen mit digitalen Medien), unterstützt durch Präsentationen und praktische Beispiele der Studierenden. Zudem konzentrierte sich das Seminar zugleich auf die Lösung mathematischer Probleme sowie auf Möglichkeiten zur Umsetzung von Problemlösungsaktivitäten in den von einem Unterrichtenden geführten Mathematikunterricht. Das Ziel des Seminars war, den Teilnehmern durch selbstständiges Lernen, Untersuchung und Erforschung ein tieferes Verständnis für das Problemlösen zu vermitteln. Eine Gruppe von 24 Lehramtsstudierenden im dritten bis sechsten Semester haben an der Studie teilgenommen, wobei 13 von ihnen Grundschullehramtsstudierenden und 11 Lehramtsstudierenden im sekundären Bildungsbereich waren, die eingeschränkte praktische Erfahrungen sowohl mit den theoretischen wie auch praktischen Aspekten des Problemlösens hatten.

Im Laufe des Semesters wurden verschiedene schriftliche Mittel verwendet. Alle 3-4 Wochen hat der Aufsatzsautor den Studierenden Hausaufgaben mit 1 bis 3 mathematischen Problemen erteilt. Um die aktive Beteiligung an der Wissenskonstruktion zu ermöglichen, wurden die Studierenden dazu aufgefordert, ein Forschungsheft zu führen, in dem sie ihr Protokoll des Problemlösens und ein Nachreflexionsprotokoll über das Problemlösen vermerkten. Das Protokoll zum Problemlösen wurde als Hilfsmittel verwendet, um den Studierenden zu erleichtern, ihre eigenen Prozesse beim Problemlösen zu strukturieren und zu steuern. In dem Protokoll sollten die Studierenden all ihre Ideen und Fragen notieren, die während des Problemlösungsprozesses auftraten. Nachdem das Problem gelöst wurde, reflektierten sie über Schreiberfahrungen, wobei sie durch mehrere Fragen im Nachreflexionsprotokoll gesteuert wurden. Am Semesterende reichten die Studierenden neun Forschungshefte in Portfolioform ein. Darüber hinaus wurden ein- bis zweiseitige Reflexionsberichte geschrieben, um die Verbindung des im Unterricht gelernten mit den eigenen Praktiken und Erfahrungen zu fördern. Dazu gehörte insbesondere das Reflektieren über die ein Semester lange Erfahrung beim Schreiben in der Mathematik, sowohl vom Gesichtspunkt des Studierenden wie auch des zukünftigen Praktikers, und das Berichten über das eigene Interesse an der Umsetzung von Schreiben beim Problemlösen in ihren eigenen Mathematikunterricht. Für die vorliegende Studie waren die folgenden Fragen von Interesse:

1. Wie reagieren Mathematik-Lehramtsstudierende in der sekundären Bildung auf das Mathematikschreiben im Prozess des Problemlösens und auf reflektierendes Schreiben nach dem Problemlösen?
2. Welche Einstellungen weisen Mathematik-Lehramtsstudierende in der sekundären Bildung im Hinblick auf den Einsatz von Schreiben beim Problemlösen in ihrem Mathematikunterricht auf?

3. Ergebnisse

Die Teilnehmer hatten interessanterweise eine große Bandbreite individueller Geschichten, Antriebe, Erfahrungen und Einstellungen zum Einsatz des Schreibens beim Problemlösen in den eigenen MU. Diese waren immer wieder mit deren subjektiven Theorien zur Mathematik verkoppelt. Daher wurde der Chi-Quadrat-Test mit Nullhypothese „Überzeugungen zum Wesen der Mathematik und Einstellungen zum Schreiben sind zusammenhanglos“ verwendet. Aus dem Chi-Quadrat-Test ergab sich, dass diese signifikant korrelieren ($X^2(4) = 10.109$, $p = .039$, $\alpha < .05$). Demgemäß hängen Überzeugungen zum Wesen der Mathematik und Einstellungen zum Einsatz des Schreibens beim Problemlösen zusammen.

Individuell erlebte und kontinuierliche Auseinandersetzung mit verschiedenen Schreibanlässen bewirkt Beliefsänderung im Bereich Mathematik und Mathematikunterricht. Wie die Teilnehmer auf das Schreiben beim Problemlösen reagiert haben, war abhängig von der Art des Schreibens, deren Zielgruppe und Überzeugungen, die sie zum Wesen der Mathematik gehalten haben. Diejenigen, die das Schreiben als eine Methode zur Unterstützung metakognitiver Prozesse bei der Mathematikerforschung verwendet haben, haben meistens von beiden Perspektiven, als Lernender und zukünftige Praktiker, auf den Schreibprozess angesprochen. Dies war leider nicht der Fall bei denjenigen, die das Schreiben und Mathematik betreiben als zwei separate Prozesse angesehen haben. Sie haben das Schreiben nur als ein Mittel zur Aufstellung eines formellen Dokumentes zwecks seiner Bewertung seitens des Unterrichtenden verwendet. Der Einsatz und die Art und Weise wie das Schreiben angewendet wurde, war nicht nur abhängig von den Überzeugungen über die Mathematik sondern auch von den Überzeugungen über das Schreiben.

4. Schlussfolgerungen und abschließende Gedanken

Das Schreiben ist ein anspruchsvoller kognitiver Prozess, der einer sorgfältigen Überprüfung des Denkens, das man zur Sprache bringen will, fordert (Bereiter & Scardamalia, 1987). Allerdings können die Mathematik-Didaktiker nicht davon ausgehen, dass Lehramtsstudierende über die Erfahrung und Wissen verfügen, wie man effektive mathematische Erklärungen schreibt. Um zum Bewusstsein über Vorteile des Schreibens in Hinsicht auf die Förderung von mathematischem Verständnis zu kommen, brauchen Lehramtsstudierende Erfahrung beim Schreiben. Des Weiteren sollen sie direkt darin unterrichtet werden, was es bedeutet, sich ein bestimmtes Publikum zur Zielgruppe zu nehmen, das Ziel innerhalb einer wohldefinierten Einführung festzulegen, unterschiedliche Darstellungen zu verbinden und erklären, sowie mathematische Notation und Zahlen mit Worten passend zusammenzuschließen. Soll das Schreiben zu einer anerkannten Methode für sowohl das Lehren wie auch das Lernen von Mathematik werden, so müssen Lehrer selbst hochwertiges Schreiben erfahren, das Bewusstsein für den Nutzen des Schreibens schärfen und in den Möglichkeiten zum Einsatz vom Schreiben in den Unterricht geschult werden. Dies ist im Rahmen dieser Studie bei vielen Teilnehmern zum Ausdruck gekommen. Allerdings bleibt die Nachhaltigkeit einer solchen Intervention auf die Einstellungen von Lehramtsstudierenden offen. Deshalb ist es unerlässlich, dass auch andere Veranstaltungen in ein kohärentes Gesamtkonzept der Lehrerausbildung eingebettet sind.

Literatur

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (1987). *The psychology of written composition*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss.* Bonn: KMK.

Kuntze, S., & Prediger, S. (2005). Ich schreibe, also denk ich – Über Mathematik schreiben. *Praxis in der Schule, 47*(5), 1–8.

Kuzle, A. (2013). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 8*(1), 20–40.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Pugalee, D. K. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics, 101*(5), 236–245.

Ladislav KVASZ, Derek PILOUS, Prag

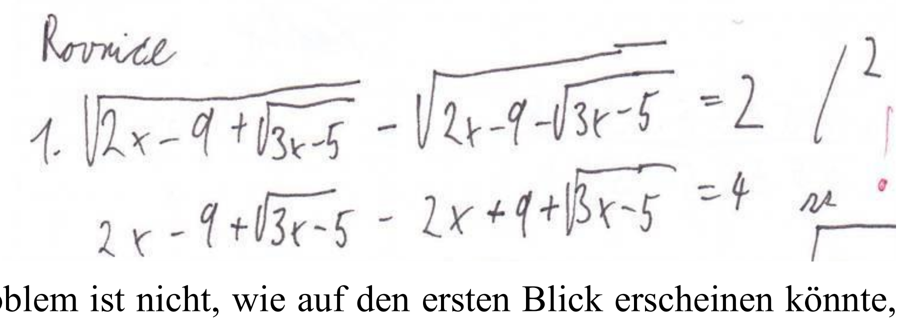
Schülerfehler in der Mathematik

Das Problem der Fehler beim Lösen von mathematischen Aufgaben ist in der Didaktik der Mathematik ein wichtiges Thema. Trotzdem kann man in der Literatur nicht viele der Analyse von Fehlern gewidmete Arbeiten vorfinden. In unserem Beitrag möchten wir uns mit einer Klasse von Fehlern beschäftigen, die ziemlich häufig bei unseren Studenten vorkommen. Es sind Fehler, die eine große Resistenz aufweisen. Es ist fraglich ob man diese Fehler als Miskonzepte auffassen kann, da in anderen Kontexten machen denselben Studenten diese Fehler nicht, und wenn befragt, geben sie meistens eine korrekte Antwort. Es geht um das Anwenden von vereinfachten Regeln, welche in einem komplexen Ausdrucke einfach mit den Komponenten arbeiten, ohne auf das Ganze Bezug zu nehmen.

1. Beispiele

Der Fehler, den wir verstehen wollen, kommt in mehreren, auf den ersten Blick unverwandten Kontexten vor. Wir werden drei von diesen Kontexten anführen, aber es existieren sicher weitere ähnliche Situationen, wo die Studenten analog vorgehen.

Der erste Kontext, den wir besprechen möchten ist der Kontext des Potenzierens und damit verwandten Wurzelziehens. In unserem ersten Beispiel kommt der Fehler klar hervor, aber dieselbe Denkweise kann man auch in vielen anderen Beispielen erkennen.



Das Problem ist nicht, wie auf den ersten Blick erscheinen könnte, mit der zweiten Potenz eines Binoms. Die Studenten kennen die korrekte Regel und derselbe Student, der diesen Fehler gemacht hat, verwenden die Regel für die Zweite Potenz eines Binoms ohne Fehler. Aber im Kontext der mathematischen Analysis, wo die Aufmerksamkeit anderswo gerichtet ist, machen sie solche Fehler.

Unsere Hypothese ist es, dass in solchen Fällen der Student das Problem nicht als eine Umformung des zusammengesetzten algebraischen Ausdruckes sieht, sondern das er ein ***Schema des zweckgerichtetes Loswerden***

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 695–698). Münster: WTM-Verlag

von Quadratwurzeln einsetzt. Was uns auf diesem Phänomen interessant vorkommt ist, dass es sich nicht auf das Potenzieren beschränkt. Auch in der anderen Richtung verfahren die Studenten ähnlich.

$$\sqrt{2x-9+\sqrt{3x-5}} - \left(\sqrt{2x-9-\sqrt{3x-5}}\right) = 2$$

$$2x^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}} = 2$$

$$6x^{\frac{1}{4}} - 10^{\frac{1}{4}} = 2$$

$$\sqrt[4]{6x-10} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt{6x-10}} = 2 \qquad /^{4}$$

Das Ziel ist es der Quadratwurzel loszuwerden, egal ob durch das Potenzieren, oder wie hier, durch das verteilen des Wurzelziehens auf die einzelne Terme. Was da merkwürdig ist, ist dass die Anzeichen mit den Quadratwurzeln sich irgendwie sich distributiv verhalten. Das Minus vor der Quadratwurzel wirkt an die innere Terme. Und weiter, die Wurzeln addieren sich irgendwie, aber nur bezüglich der Variablen. Die Koeffizienten kommen ‘unbeschadet’ heraus.

2. Versuch einer Deutung

Wir möchten diese Verfahrensweise bei den Studenten nicht einfach als einen Fehler deuten. Es scheint uns, dass sie eine ***innere Logik*** oder ***kognitive Kohärenz*** haben. Es ist schwierig die Studenten von dieser Verfahrensweise zu befreien. Wenn sie auf das Problem aufmerksam gemacht werden, sehen sie den Fehler klar, aber trotzdem machen sie ihm wieder. Deswegen möchten wir eine allgemeinere Deutung versuchen.

Eine Möglichkeit ist die ***kognitive Psychologie***, im besonderem die Theorie von Jean Piaget. In dem Buch *Psychogenesis and the history of science* (Piaget und Garcia 1983) haben die Autoren für verschiedene Theorien (Geometrie, Algebra, Mechanik) ein dreistufiges Entwicklungsmodel vorgeschlagen. Nach diesem Model kann man in der Entwicklung einer Theorie die INTRA-, die INTER- und die TRANS- Phase unterscheiden. Die Autoren haben Beispiele in der Entwicklung des Zeichens bei Kindern gegeben. Ein typisches Phänomen, welches die INTRA-Phase kennzeichnet ist, dass das Kind den Dach und den Schornstein eines Hauses korrekt zeichnen kann, aber es zeichnet den Schornstein orthogonal zum Dach. Das heißt, das Kind ist fähig die einzelne Elemente zeichnen, aber es ist noch unfähig die Beziehungen zwischen ihnen korrekt darzustellen. Dies scheint analog zu dem oben angeführten Phänomen zu sein. Der Student ist fähig die Potenz oder die Quadratwurzel vom einzelnen Term zu bilden, aber er ist nicht in der Lage die Potenzen oder die Quadratwurzeln der verschiedenen Terme miteinander zu koordinieren, die Beziehungen zwischen ihnen korrekt darzustellen. Der Vorteil dieser Deutung liegt darin, dass sie das untersuchte Phänomen in den Kontext der kognitiven Entwicklung des Studenten einbettet. Was aber dieser Deutung widerspricht ist das die Studenten fähig sind die Regeln (zum Beispiel für die zweite Potenz eines Binoms) korrekt anzuwenden, und der Fehler kommt nur im Kontext von komplexeren Aufgaben vor. So scheint es nicht ganz plausibel das Denken der Studenten als die INTRA-Phase der Entwicklung des symbolischen Denkens zu deuten.

Der bekannte Deutsche Physiker und Physikdidaktiker hat in einem berühmt gewordenen Test mehrere hunderte Abiturienten die Frage gestellt, welche Kraft wirkt auf ein, von links oben nach rechts unten auf einer Parabelbahn fliegenden, Ball. Die meisten glaubten, dass außer der Gravitationskraft noch eine weitere 'Schwungkraft' wirkt. Dieses Ergebnis hat mit unseren Beispielen mehrere gemeinsame Züge. Vor allem, die Abiturienten beherrschten die Mechanik in genügender Masse um das Abitur erfolgreich abzulegen (so wie unsere Studenten die Regel für die zweite Potenz eines Binoms beherrschen). Nur in dem Falle des fliegendes Balles haben sie aber spontan reagiert, das heißt, Nachtigall ist es gelungen ihr angeeignetes Fachwissen abzuschalten und eine viel tiefer gelagerte Schicht des physikalischen Denkens zu berühren. Es ist ja nicht schwer in der Antwort der Studenten die Stimme der aristotelischen Physik zu erkennen. So konnten wir die uns interessierenden Fehler auch als ein Auftauchen einer archaischen Form des Denkens interpretieren. Aber auch diese Interpretation scheint nicht plausibel. Im Unterschied zur aristotelischen Physik kann man in dem *zweckgerichtetem Loswerden von Quadratwurzeln* einfach keine logische Konsistenz vorfinden. Die aristotelische Physik ist kohärent und konzeptuell konsistent, nur falsch. Das Denken das auf das Loswerden von Quadratwurzeln gerichtet ist hat keine Kohärenz und konzeptuelle Konsistenz. Es ist nicht plausibel vorauszusetzen, dass irgendwann Mathematik auf diese Weise gemacht werden konnte. Es konnte keine archaische Form des symbolischen Denkens existieren, die so operieren würde, wie unsere Studenten, weil es einfach mit der Wirklichkeit nicht im Einklang wäre. Die Erfahrung die wir mit der Geschichte der Algebra haben (sehe z. B. Kvasz 2008) macht eine Interpretation der angeführten Phänomene als ein Auftauchen einer archaischen Denkweise unwahrscheinlich.

Viel natürlicher als eine psychologische oder eine historische Deutung sollte eine ***semiotische Deutung*** des oben angeführten Phänomens sein. Es geht doch um Arbeit mit Zeichen, und so sollte es möglich sein die Semiotik zur Hilfe zu nehmen. In der Literatur zur Semiotik in der Mathematikdidaktik, wie (Hoffman Hrsg. 2006, oder Kadunz Hrsg. 2010) konnten wir keine Antwort auf unsere Fragen finden, und so formulieren wir das Problem die oben angeführte Beispiele des Umgehens mit Zeichen zu deuten als ein offenes Problem.

Dank

Die Autoren sind Bernhard Brockmann, Gert Kadunz, Rainer Kaenders und Ysette Weiss-Pidstrygach für nützliche Diskussion und freundliche Unterstützung zu Dank verpflichtet. Schließlich gilt Ihr Dank auch der Grantagentur der Tschechischen Republik für die Unterstützung durch den Grant GA ČR P407/11/1740.

Literatur

Hoffmann, M. (Hrsg. 2006): *Themenheft: Semiotik in der Mathematikdidaktik – Lernen anhand von Zeichen und Repräsentationen, Journal für Mathematik-Didaktik* **27**, Heft 3/4.

Kadunz, G. (Hrsg. 2010): *Sprache und Zeichen, Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik*. Franzbecker, Hildesheim.

Kaenders, R. und Kvasz, L. (2011). Mathematisches Bewusstsein. In: Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G. & Rathgeb, M. (Hrsg.): *Mathematik verstehen*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Kaenders, R., Kvasz, L. und Weiss-Pidstrygach, Y (2011): Recovering mathematical awareness by linguistic analysis of variable substitution. In: M. Pytlak, T. Rowland und E. Swoboda (Hrsg.), *Proceedings of CERME 7*. University of Rzeszow, Rzeszow.

Kvasz, L. (2008): Sprache und Zeichen in der Geschichte der Algebra – ein Beitrag zur Theorie der Vergegenständlichung. *Journal für Mathematik-Didaktik* **29**, S. 108-123.

Nachtigall, D. K. (1993): Krise des Physikunterrichts, Fünf Thesen zu einem aktuellen Thema. *Plus Lucis* 1/93, S. 5-9.

Piaget, J. und Garcia, R. (1983): *Psychogenesis and the history of science*. Columbia University Press, New York 1989.

Weiss-Pidstrygach, Y., Kvasz, L. und Kaendsers, R. (2013): Geschichte der Mathematik als Inspiration zur Unterrichtsgestaltung. In: M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Kroemer, K. Legnink und G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess*. Springer, Wiesbaden.