

Stefan GÖTZ, Wien

## Was kann Stoffdidaktik heutzutage (noch) leisten?

### Einleitung

In der modernen mathematikdidaktischen Literatur sind „reine“ stoffdidaktische Beiträge immer seltener zu finden. Die Zeitschrift „Didaktik der Mathematik“, in der vor allem stoffdidaktische Artikel veröffentlicht wurden, gibt es beispielsweise schon lange nicht mehr. Bereits 1985 wurde bei der Lektüre von „Mensch und Mathematik“ klar, dass „didaktisches Denken und Handeln“ immer auch die Reflexion des Verhältnisses zur Mathematik mit einschließt.

Zehn Jahre später fragte dann Hans-Christian Reichel auf der 29. Tagung für Didaktik der Mathematik in Kassel: „Hat die Stoffdidaktik Zukunft?“

Fast zwanzig Jahre danach sollen aktuelle Indikationen – Vernetzungen (im Mathematikunterricht), die Schnittstellenproblematik und der Kompetenzaufbau beim Begründen im Mathematikunterricht – für stoffdidaktische Überlegungen aufgezeigt werden. Dabei sind „didaktisch orientierte Sachanalysen“ (Heinz Griesel) gefragt, um eine Beschreibung und Bewertung der Unterrichtstauglichkeit a priori zu ermöglichen. Erich C. Wittmann erweitert den Ansatz der traditionellen Stoffdidaktik zur „strukturge-netischen didaktischen Analyse“, die ausdrücklich auch Prozesse mit einbezieht (Wittmann 2014). Das Konzept der „mathematischen Miniatur“ bildet mathematisches Tun möglichst unverzerrt ab („vereinfachen, ohne zu verfälschen“) und ist ein Grundsatz für die Darstellung der folgenden Themen aus Stochastik, Analysis und Geometrie.

### Vernetzungen am Beispiel Stochastik – Analysis

Das Paradoxon des Schenkens (vgl. Székely 1990, S. 30 ff.): Eine Gesellschaft bestehe aus  $n$  Personen, von denen jede ein Geschenk mitbringt. Diese  $n$  Geschenke werden eingesammelt und zufällig wieder verteilt, so dass jede Person genau ein Geschenk bekommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $p_n$ , dass niemand sein Geschenk zurückerhält?

Mit Hilfe der Ein-Ausschaltformel erhält man  $p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$  für  $n > 2$ . Aus der Analysis ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{e}$  bekannt. „Diese faszinierende Verbindung von Stochastik und Analysis“ (Kratz 2005, S. 15) kann auf für die Mathematik typische Weise verallgemeinert werden.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 29–36).  
Münster: WTM-Verlag

Jetzt ist die Wahrscheinlichkeit  $p_n^k$  gefragt, dass genau  $k$  Personen ihr Geschenk zurückbekommen. Durch Zurückführen auf das vorige Problem (auch eine typische mathematische Herangehensweise) ergibt sich  $p_n^k = \frac{1}{k!} \cdot \left[ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right]$ . Nun lehrt die Analysis, dass  $p_\infty^k := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{e}$  gilt. Der inhaltliche stochastische Kontext führt zu  $\sum_{k=0}^n p_n^k = 1$ , denn entweder bekommt niemand sein Geschenk zurück, oder eine Person, oder zwei, oder ..., oder alle  $n$  Personen. Da diese Beziehung für alle  $n$  gilt, ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} p_\infty^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot e^{-1} = 1$  einzusehen, oder  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$  ( $>1!$ ).

Ein veränderter Verteilungsvorgang sieht vor, dass jedes der  $n$  Geschenke unter den  $n$  Personen fair verlost wird. Es kann also passieren, dass eine Person mehrere Geschenke erhält, eine andere dafür gar keines. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $q_n$ , dass eine bestimmte Person kein Geschenk bekommt? Nun ergibt sich  $q_n = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ . Bekanntlich ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{e}$ . Schulrelevante Begründungen dieser beiden „populären“ Darstellungen von  $\frac{1}{e}$  fußen einerseits auf der Eigenschaft  $(e^x)' = e^x$  (damit gelingt eine Abschätzung von  $e^x$  mittels Summen der Gestalt  $\sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$  durch Bildung von Ober- und Untersummen) und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , andererseits auf  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . In einer Analysis-Vorlesung (vgl. Steinbauer 2012, S. 98) wurde aber die Exponentialfunktion als  $\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$  definiert mit  $e := \exp(1)$ . Hier ist also ein „lokales Ordnen“ der Begründungsstruktur (Argumentationsbasis) der Lehrenden gefragt, was schon eine Andeutung auf die Schnittstellenproblematik darstellt.

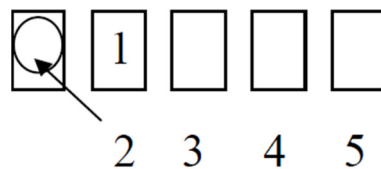
In Götz 1993 finden sich weitere Verallgemeinerungen wie z. B. eine Veränderung der Ausgangssituation:  $n$  Personen bringen  $m$  Geschenke mit und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \lambda > 0$ . Dann führt die eben gestellte Frage auf die Poisson-Verteilung.

In der Reihe „Mathe vernetzt“ findet sich im Band 1 auf S. 14 (Brinkmann, Maaß, Ossimitz & Siller 2011) in der Kategorie „Innermathematische Vernetzungen“ die hierzu passende Beschreibung „Anbindung von Sätzen [...] an Probleme [...], die mit ihrer Hilfe gelöst werden können [...]“. Im Problemlösen sieht auch Kießwetter (1993, S. 5) einen Wert des Vernetzens:

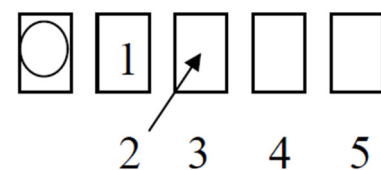
„Unverzichtbar sind Vernetzungen der Wissens Elemente [...] in der Mathematik, wenn man diese primär als produktiven Prozeß versteht, bei dem es ja u. a. um die Lösung von Problemen geht.“

In Kratz 2005 finden SchülerInnen der Jahrgangsstufe 12 eine rekursive Darstellung der Anzahl der Möglichkeiten  $A_n$ ,  $n$  Briefe so in  $n$  dazugehörige Kuverts zu stecken, dass kein Brief in einem richtigen Kuvert landet:  $A_n = (n - 1) \cdot (A_{n-1} + A_{n-2})$  und  $A_1 = 0$  und  $A_2 = 1$ . Die Abbildung rechts zeigt eine mögliche Begründung dafür. Kiesl (2013) zeigt, dass dieses Problem auch bei der Berechnung der Anzahl der möglichen Achtfinalpaarungen in der Champions-League eine Rolle spielt.

Fall I a):



Fall I b):



In Rasfeld (2001) wird bei der Behandlung dieses Rencontre-Problems der Bogen von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe 2 gespannt. Zu Beginn wird unter einen Satz von sieben paarweise verschiedenen Kärtchen ein zweiter identer (zufällig) gelegt und gezählt, wie oft wenigstens eine Übereinstimmung passiert (enaktiver Zugang). In der Sekundarstufe 2 schließlich wird die Verteilung  $p_n^k$  ( $k = 0, \dots, n$ ) der Anzahl der Fixpunkte  $S_n$  in einer Permutation analysiert. Mit Hilfe der zweipunktverteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit  $X_i = 1$ , falls die Stelle  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ein Fixpunkt ist und 0 sonst, können Erwartungswert und Varianz von  $S_n$  ausgerechnet werden: beide Male ergibt sich der Wert 1 unabhängig von  $n$  (Engel 1973, S. 151 f.)! So „wird aus kleinen Bächen ein Fluß“ (Székely 1990, S. 31): es ist zwar  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_i = 1) = 0 \forall i$ , aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq 1) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$ .

### Die Schnittstellenproblematik in der Analysis

Das im vorigen Abschnitt präsentierte Problemfeld erfordert die Formulierung mehrerer analytischer Grenzwertsätze, wie z. B. dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$  für zwei konvergente Folgen  $a_n$  und  $b_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  unter gehörigen Voraussetzungen gilt. Damit wird eine Transferproblematik angesprochen: können analytische Konzepte von Lehramtsstudierenden selbstständig angewendet werden? Eine eventuelle positive Antwort ist aus empirischen Gründen in Zweifel zu ziehen. Lehramtsstudierende reihen die Fachwissenschaft an vorletzte (vierte) Stelle in einer Relevanzbewertung der Wissensbereiche ihrer Ausbildung (Etzlstorfer 2010, S. 105). Und ein aktuelles Zitat eines/r Lehramtsstudierenden: „Besonders in Analysis konnte ich keine Parallelen zur Schule mehr sehen.“ (Nikodim 2013).

Für das Kapitel „Folgen und Reihen“ treffen wir eine gezielte Auswahl an (drei) „Grundkenntnissen“, die Schulrelevanz aufweisen: Konvergenz einer monotonen, beschränkten reellen Folge,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  für  $|q| < 1$  und die explizite Berechenbarkeit der geometrischen Reihe unter entsprechenden Voraussetzungen (Götz 2013, S. 365 f.). Ebenda findet sich auch eine innermathematische Anwendung für Grundkenntnis 1, die Approximation des Kreisumfanges durch regelmäßige Polygone nach Archimedes.

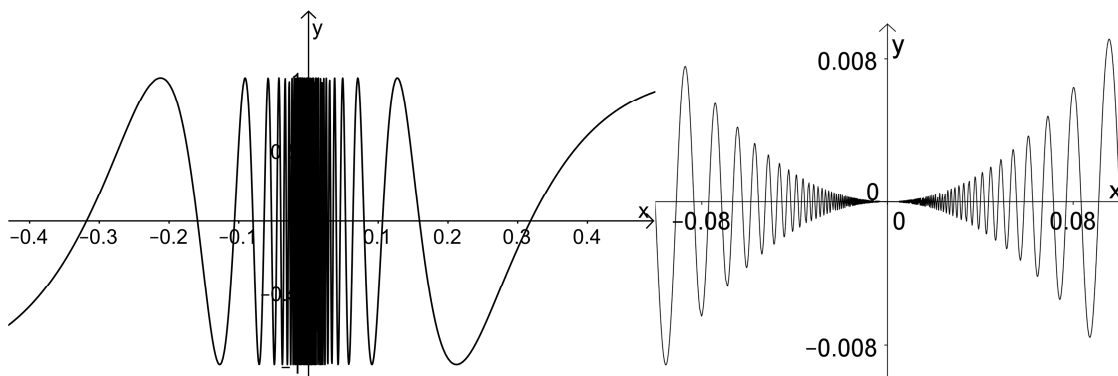
Das Auslosungsverfahren für den Palio, das traditionelle Pferderennen in Siena, wählt wegen der Enge der Rennbahn zehn aus den 17 startberechtigten Contraden (Bezirke) aus. Die sieben am  $n$ -ten Rennen nicht startenden Contraden sind beim nächsten Rennen sicher dabei, die restlichen drei werden durch Los aus den verbleibenden zehn bestimmt (Fruttero & Lucentini 1995, S. 18 f.). Wenn wir für eine bestimmte Contrade eine Zufallsvariable  $X_i$  definieren, die den Wert 1 annimmt, wenn die Contrade am  $i$ -ten Rennen teilnimmt, sonst 0 wird, dann sind die Anfangswahrscheinlichkeiten  $p_1 = P(X_1 = 1)$  und  $q_1 = 1 - p_1 = P(X_1 = 0)$  zwar unbekannt (der Palio in Siena wird seit dem Mittelalter veranstaltet), sehr wohl aber sind die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Rennen auf das nächste klar:  $p_{00} := P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 0 = 1 - P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) =: 1 - p_{01}$  und  $p_{10} := P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \frac{7}{10} = 1 - P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) =: 1 - p_{11}$ . Mit  $p_n := P(X_n = 1)$  und  $p := p_{11} = \frac{3}{10}$  ist  $p_{n+1} = p_{11} \cdot p_n + p_{01} \cdot (1 - p_n) = 1 + (p - 1) \cdot p_n$ . Das ist eine lineare Differenzgleichung erster Ordnung, die mit Hilfe der geometrischen Reihe (Grundkenntnis 3) gelöst werden kann (vgl. Götz & Reichel 2013, S. 8 f.). Die explizite Darstellung ist  $p_n = \frac{1 - (p-1)^{n-1}}{2-p} + (p-1)^{n-1} \cdot p_1$ . Grundkenntnis 2 führt zu  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2-p} = \frac{10}{17}$ . Das heißt die Teilnahmewahrscheinlichkeit für eine bestimmte Contrade konvergiert mit der Anzahl der Rennen gegen jene Teilnahmewahrscheinlichkeit, die bei Losentscheid bei jedem Rennen der Fall wäre. Auch der Erwartungswert des zufälligen Bruchteils an Teilnahmen  $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^n X_i$  konvergiert gegen diesen Wert  $\frac{10}{17}$ . Das und andere Beschreibungsmöglichkeiten für dieses Auslosungsverfahren (u. a. als Markoff-Kette) finden sich in Götz & Grosser 1999.

Es wird also hier der zweite Teil der von Felix Klein beschriebenen doppelten Diskontinuität angesprochen: „Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so muß er eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, [...]“ (Klein 1908, S. 1 f.).

Der schon angedeutete Gap zwischen Differential- und Integralrechnung in der Schule und Analysis an der Universität kann noch an vielen anderen Beispielen beobachtet werden: die Definition der Sinusfunktion etwa, einerseits als Verhältnis von Länge der Gegenkathete zu Länge der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck, andererseits als Imaginärteil der komplexen Exponentialreihe (z. B. Steinbauer 2012, S. 158). Die Überwindung dieser Kluft fordert neben universitärem Hintergrundwissen eine „didaktisch sensible Fachkompetenz“ (Leufer & Prediger 2007, S. 272). Dazu werden drei Bausteine vorgeschlagen:

- Grundvorstellung: analytische Eigenschaft ruft „passende“ Bilder hervor,
- Grundkenntnis: Fakten, Zusammenhänge bezogen auf ein bestimmtes (analytisches) Thema, die „hinreichend“ weit tragen,
- Grundeinsicht: Abruf „passender“ Methoden bei (analytischen) Tätigkeiten.

Als typische Unstetigkeitsstellen sollten neben den Sprungstellen auch Oszillationen wie sie z. B. bei der reellen Funktion  $f: f(x) = \sin \frac{1}{x}$  für  $x \neq 0$  und  $f(0) = 0$  vorkommen (Abbildung links), als Grundvorstellungen abrufbar sein.



Die reelle Funktion  $g: g(x) = x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x}$  für  $x \neq 0$  und wieder  $g(0) = 0$  dagegen ist überall stetig und sogar differenzierbar (Abbildung rechts). Um das einzusehen, genügt es nicht, die Ableitungsregeln auf den Funktionsterm anzuwenden. Die Differenzierbarkeit im Ursprung nachzuweisen bedarf es des Rückgriffes auf den Differenzen- bzw. Differentialquotienten, eine wichtige Grundeinsicht.

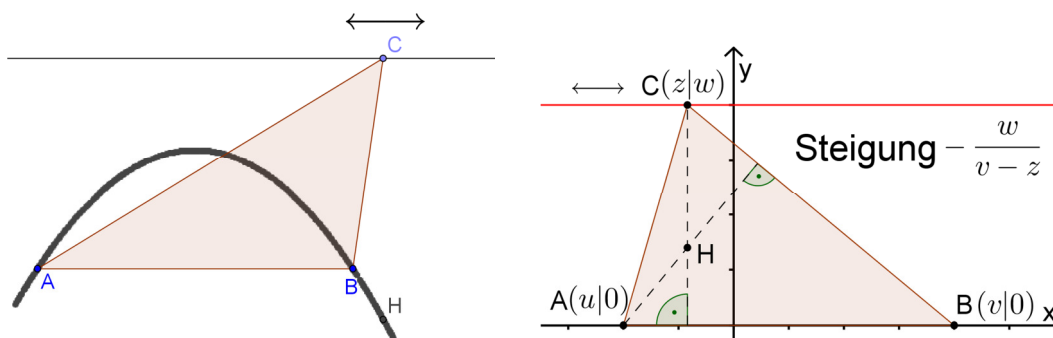
Diese drei Bausteine finden sich im Grundvorstellungskonzept vom Hofes wieder (vom Hofe 1995, S. 97 f.):

„Die Grundvorstellungs-idee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In

ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen, (Grundkenntnis)
- Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen‘, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, (Grundvorstellung im engeren Sinne)
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.“ (Grundeinsicht)

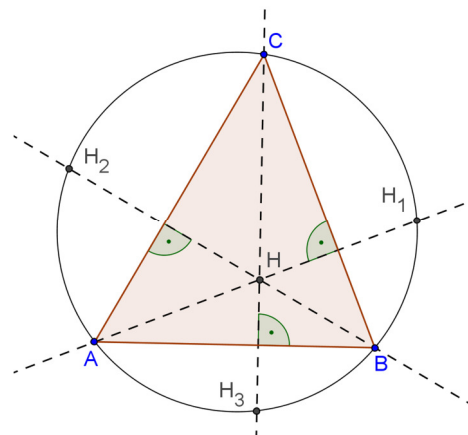
### Kompetenzaufbau beim Begründen in der Geometrie



Der Eckpunkt  $C$  eines Dreiecks bewegt sich parallel zur gegenüberliegenden Dreiecksseite  $AB$ . Welche Spur verfolgt dabei der Höhenschnittpunkt (vgl. Krauter 2005, S. 278)? Die Abbildung links zeigt die Spur, die an eine Parabel erinnert. Die Bereitschaft sich auf mathematische Aufgabenstellungen einzulassen, die eine (einfache) Begründung einfordern, ist die erste Stufe eines möglichen Kompetenzmodells (vgl. Bürger 1979 und Bruder & Pinkernell 2011, S. 5). Wenn das Dreieck  $ABC$  in ein Koordinatensystem gelegt wird (Abbildung rechts:  $A(u|0)$ ,  $B(v|0)$  und  $C(z|w)$ ), dann kann die geometrische Bewegung von  $C$  als numerische Veränderung der  $x$ -Koordinate  $z$  von  $C$  beschrieben werden: Stufe 3 des Kompetenzmodells sieht vor, mathematische Begründungen in Kommunikationssituationen darlegen und argumentieren zu können. Der Schnitt der Höhen durch  $A$  bzw.  $C$  ergibt  $y_H = \frac{v-x_H}{w} \cdot (x_H - u)$  als Zusammenhang der Koordinaten  $x_H$  und  $y_H$  des Höhenschnittpunktes  $H$ . Als Vorübung können für den Spezialfall  $z = 0$  die Koordinaten des Höhenschnittpunktes  $H$  als einfache Aufgabe (Schnitt zweier Geraden) ausgerechnet werden:  $H(0| -\frac{uv}{w})$  (Götz & Hofbauer 2012, S. 36). Die damit angesprochene Stufe 2 verlangt, vorgegebene

Begründungen zu verstehen, nachvollziehen und erklären zu können. Das Erkennen der Argumentationsbasis ist dabei wesentlich. Als letzte Stufe (4) ist das eigenständige Finden einer Begründung einer mathematischen Aussage definiert, inklusive Wahl der Argumentationsbasis. In Bürger 1979, S. 121, findet sich dazu: „Das selbständige Führen von Beweisen wird im allgemeinen aber nur dann möglich sein, wenn dem Schüler zumindest ein Beweis bekannt ist, der eine starke Ähnlichkeit mit dem zu führenden Beweis hat [...]“. In Krauter 2005, S. 75 findet man: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den drei Seiten des Dreiecks, dann liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis des Dreiecks.

Analoge Berechnungen am Dreieck im Koordinatensystem zeigen, dass der Umkreismittelpunkt von  $C$  genauso weit entfernt ist wie vom an  $AB$  gespiegelten Höhenschnittpunkt  $H_3(0|\frac{uv}{w})$ . Das genügt, denn jede Seite des Dreiecks kann zu jener werden, die auf der  $x$ -Achse liegt (Götz & Hofbauer 2012, S. 36).



## Literatur

- Brinkmann, A., Maaß, J., Ossimitz, G. & Siller, H.-St. (2011). Vernetzungen und vernetztes Denken im Mathematikunterricht. In: A. Brinkmann, J. Maaß & H.-St. Siller (Hrsg.): *Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht*. Band 1 (S. 7–21). München: Aulis.
- Bruder, R. & Pinkernell, G. (2011). Die richtigen Argumente finden. *mathematik lehren*, Heft 168, 2–7.
- Bürger, H. (1979). Beweisen im Mathematikunterricht – Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In: W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht*. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 2 (S. 103–134). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky und Stuttgart: B. G. Teubner.
- Engel, A. (1973). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Band 1. Stuttgart: Klett.
- Etzlstorfer, S. (2010).  $a^2 + b^2 = c^2$  – ¿Qué significa eso? Vergleich der Fachdidaktiken in Mathematik und Romanistik an der Universität Wien. Universität Wien: Diplomarbeit.
- Fischer, R. & Malle, G. (unter Mitarbeit von H. Bürger) (1985). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Mannheim u. a.: Bibliographisches Institut.
- Fruttero, C. & Lucentini, F. (1995<sup>2</sup>). *Der Palio der toten Reiter*. München: Piper.
- Götz, S. (1993). Eine mögliche Verbindung von Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht und ein alternativer Zugang zur Poisson-Verteilung mit Hilfe eines Paradoxons. *Didaktik der Mathematik* 21, 182–206. Erratum im PM Jahresverzeichnis 2001, 4.

- Götz, S. (2013). Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*. Für die GDM herausgegeben von G. Greefrath, F. Käpnick und M. Stein. Band 1 (S. 364–367). Münster: WTM.
- Götz, S. & Grosser, M. (1999). Über das Pferderennen in Siena. *Mathematische Semesterberichte* 46, 77–92.
- Götz, S. & Hofbauer, F. (2012). Immer geradeaus in Dreiecken! Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft. *Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 44 / 54. Jahrgang, 35–39.
- Götz, S. & Reichel, H.-C. (Hrsg.) (2013). *Mathematik 8* von R. Müller und G. Hanisch. Wien: öbv.
- Kiesl, H. (2013). Match me if you can. Mathematische Gedanken zur Champions-League-Achtelfinalauslosung. *Mitteilungen der DMV* 21, 84–88.
- Kießwetter, K. (1993). Vernetzung als unverzichtbare Leitidee für den Mathematikunterricht – und warum mathematikdidaktische Bemühungen sehr oft in kurzschrittige und kurzsichtige Einsparigkeit münden. *mathematik lehren*, Heft 58, 5–7.
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Kratz, H. (2005). Das Problem der vertauschten Briefe – zwei Wege zur Herleitung einer Rekursionsformel. *Stochastik in der Schule* 25, 11–15.
- Krauter, S. (2005). *Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken*. München: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag.
- Leufer, N. & Prediger, S. (2007). „Vielleicht brauchen wir das ja doch in der Schule“. Sinnstiftung und Brückenschläge in der Analysis als Bausteine zur Weiterentwicklung der fachinhaltlichen gymnasialen Lehrerbildung. In: A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann & S. Prediger (Hrsg.): *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag* (S. 265–276). Hildesheim: Franzbecker.
- Nikodim, M. (2013). *Motivation und Erwartungshaltung von Mathematikstudierenden – Auswertung der Fragebögen zu „Einführung in die Analysis“ an der Universität Wien*. Unveröffentlichtes Manuskript, Wien 2013.
- Rasfeld, P. (2001). Das Rencontre-Problem, eine Quelle für den Stochastikunterricht von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2001*, für die GDM herausgegeben von G. Kaiser (S. 496–499). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Steinbauer, R. (2012). *Einführung in die Analysis*. Skriptum zur Vorlesung, Universität Wien. [http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem12/EidA\\_Vo\\_2012-06-14.pdf](http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem12/EidA_Vo_2012-06-14.pdf), 25.2.2014.
- Székely, G. (1990). *Paradoxa. Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Texte zur Didaktik der Mathematik (herausgegeben von N. Knoche und H. Scheid). Heidelberg u. a.: Spektrum Akademischer Verlag.
- Wittmann, E. Ch. (2014). Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art. Erscheint in *mathematica didactica*.