Silke RUWISCH, Lüneburg

Mathematik lernen und unterrichten in der Grundschule

Einleitung

Anlass für diesen Beitrag ist die Frage, was in der Mathematikdidaktik seit Verabschiedung der Bildungsstandards 2004 eigentlich erreicht wurde und welche Forschungslücken zu konstatieren sind.

Mein Blick auf dieses Thema ist ein spezifischer: Als Sonderpädagogin blicke ich primär psychologisch auf das individuelle Lernen, als Soziologin dann sekundär auf dieses individuelle Lernen im sozialen Umfeld.

Mit diesem Fokus betrachte ich die *prozessbezogenen* Kompetenzbereiche der Bildungsstandards. Diese Konzentration auf die allgemeinen Kompetenzen ist vorrangig motiviert als Gegengewicht zu dem häufig inhaltlichen Blick, in welchem die prozessbezogenen Kompetenzen lediglich begleitende Funktion einnehmen. Alle fünf Kompetenzbereiche sollen betrachtet werden. Ausgehend von den formulierten Erwartungen in den Bildungsstandards werden wenige Hauptpunkte des jeweiligen Gebietes thematisiert und grundlegende offene Fragen aufgeworfen. Insofern warne ich davor, Vollständigkeit zu erwarten.[1]

Problemlösen

Erwartungen: Die Schülerinnen und Schüler können a) mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden, b) Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren) und c) Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen. (KMK 2005, 10)

Problemlösestrategien sind wesentlich zum Lösen mathematischer Probleme. Strategiekeime verschiedener Strategien, z.B. Rückwärtsarbeiten, Extremalprinzip, Ausschlussprinzip, sind bereits im Grundschulalter erkennbar (Stein 1999; Burchartz 2003). Probieren ist jedoch die wesentliche Strategie dieses Alters. Sie kann in der Grundschulzeit zum systematischen Probieren unter bewussterem Nutzen von z.B. Zahlbeziehungen, Operati-

[1] Die folgenden Ausführungen könnten den Eindruck erwecken, mathematikdidaktische Forschung im Grundschulalter sei theorielos. Dies ist weder den angeführten Literaturquellen zu unterstellen noch gilt dies insgesamt für die deutsche Mathematikdidaktik der Grundschule. Aufgrund des eingeschränkten Platzes verweise ich bezüglich langfristiger Theoriestränge auf meine Ausführungen in http://www. didaktik-der-mathematik.de/ pdf/PME37_National_ Presentation.pdf. Aus demselben Grund findet man das umfangreiche Literaturverzeichnis zum Beitrag unter http://www.leuphana.de/ueber-uns/personen/silke-ruwisch/publikationen. html

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 37–44).
Münster: WTM-Verlag

onswissen oder geometrischen Beziehungen ausgebaut werden, so dass sich unterschiedliche Niveaustufen beschreiben lassen (Rasch 2001). *Frage:* Wie situiert sind Problemlöseaktivitäten im Grundschulalter bzw. wie abstrakt, verallgemeiner- und übertragbar sind sie bereits?

Problemsituationen sind durch *Komplexität* gekennzeichnet. Die geringe Kapazität des Arbeitsgedächtnisses und das noch geringe mathematische Wissen lassen die Kinder zu Beginn der Grundschulzeit noch sehr kurzschrittig arbeiten. Beides nimmt im Verlauf der Grundschulzeit zu, so dass zunehmend mehr, teilweise auch alle Bedingungen eines Problems berücksichtigt und komplexere Problemstellungen bewältigt werden können.

Dazu sind *metakognitive und selbstregulierende Aktivitäten* notwendig. Diese hängen wesentlich von einer konstruktivistisch gestalteten Unterrichtskultur und dem intensiven fachlichen Diskurs unter den Peers ab (z.B. Sjuts 2003). Metakognitive Aktivitäten, wie Planen, Lösungsprozesse Überwachen und Kontrollieren sowie Reflektieren, sind in entsprechend gestaltetem Unterricht bereits zu Schulbeginn zu beobachten. Im Verlauf der Grundschulzeit ist eine Zunahme von Häufigkeit und Komplexität, Ausführlichkeit und Begründungstiefe sowie ein vermehrter Bezug auf die sachlichen Bedingungen und die Beiträge der Mitschülerinnen und Mitschüler festzustellen (Winkel 2012). *Fragen*: Wie bewusstseinsfähig sind die beobachteten metakognitiven Aktivitäten bereits in der Grundschulzeit? Lassen sich *heuristische* Lösungsbeispiele (Collet 2009) bereits in der Grundschule fruchtbar machen zur Förderung der Problemlöseaktivitäten?

Für den *Problemlöseprozess* insgesamt zeigt sich, dass dieser in der Grundschulzeit eher intuitiv und ganzheitlich verläuft. Längsschnittstudien zeigen, dass Grundschulkinder – jedenfalls mathematisch begabte – schon früh recht konstante bevorzugte Vorgehensweisen erkennen lassen (Fuchs 2006). Zwar erweist sich das Verstehen des Problems häufig als größte Hürde und hängt erwartungsgemäß sehr eng mit dem Lösungserfolg zusammen. Doch Planungsaktivitäten sowie die Rückschau oder eine bewusste Ausweitung auf weitere Probleme sind i.d.R. auch zu Beginn der SI eher selten zu beobachten (Rott 2013). *Frage*: Wie kann das implizite Nutzen und eigenständige Entwickeln von Problemlösefähigkeiten mit expliziter Thematisierung einhergehen (Bruder 2003; Bruder & Collet 2011)?

Darstellen

Erwartungen: Die Schülerinnen und Schüler können a) für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen, b) eine Darstellung in eine andere übertragen und c) Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten. (KMK 2005, 10)

Didaktisches Material dient der Veranschaulichung und Anschauung für Lehrpersonen wie für Lernende (Krauthausen & Scherer 2007). Als Veranschaulichungsmittel nutzen Lehrerinnen und Lehrer didaktische Materialien zur Einführung mathematischer Ideen und Handlungen. Für die Schülerinnen und Schüler bieten didaktische Materialien die Möglichkeit, ihre mathematischen Ideen mitzuteilen und zu begründen. Werden didaktische Materialien unter dem Aspekt der Anschauung betrachtet, stellen sie für Lernende ein Werkzeug zur (Re)konstruktion von Mathematik dar und dienen Lehrpersonen als diagnostisches Instrumentarium, um die mathematischen Konstruktionen der Schülerinnen und Schüler genauer zu erfassen. Diesen diskursiven Prozessen im Unterricht unterliegen permanent unterschiedliche Deutungen von Materialien (Gellert & Steinbring 2014). *Fragen*: Wie konstruieren Kinder eigentlich „ihre“ Mathematik mit Hilfe von didaktischen Materialien (Steenpaß & Steinbring 2014)? Welche metakognitiven und selbstregulativen Prozesse spielen hierbei eine Rolle?

Grundlegend für den Umgang mit Arbeitsmitteln und Darstellungen scheint die *visuelle Strukturierungsfähigkeit* zu sein. Söbbeke (2005) unterscheidet vier Ebenen. Werden Kinder aufgefordert, Arbeitsmittel und Darstellungen zu deuten, so können sie dies eher konkret empirisch mit stark dinglicher Einzeldeutung oder aber strukturiert tun. Wenn Kinder strukturiert deuten, dann zeigt sich eine zunehmende Flexibilität in den Deutungen, die auch durch die Fähigkeit zur Umstrukturierung und vor allem relationale Deutungen bestimmt ist. Bei gedanklichen Umstrukturierungen gelingen zunächst Zerlegungen, bevor auch das Zusammenfügen oder sogar beide Prozesse in einer Bearbeitung möglich sind (Beutler 2013). *Fragen:* Wie lassen sich visuelle Wahrnehmungs- und Strukturierungsprozesse anregen, fördern und der bewussten Fokussierung zugänglich machen? Wie domänenspezifisch bzw. allgemein und übertragbar sind die beschriebenen Ebenen?

Darstellungswechsel: Es ist schon lange unbestritten, dass die Brunerschen Repräsentationsmodi sich sowohl auf das Darstellen – die äußere Präsentation – als auch auf das Vorstellen – die innere Repräsentation – beziehen (Bruner 1988; Franke 1998). Beide lassen nur bedingt Rückschlüsse auf das jeweils andere zu. So führt das Handeln mit didaktischem Material nicht unbedingt zu vorgestellten Handlungen (Lorenz 2011). Ebenfalls unstrittig ist, dass die Brunerschen Repräsentationsmodi keine feste Lernfolge von enaktiv über ikonisch zu symbolisch darstellen (Bruner 1996), sondern sich die verschiedenen Darstellungsformen gegenseitig bereichern (Bruner 1988) und insbesondere der Darstellungswechsel bzw. die gleichzeitige Verfügbarkeit mathematischer Zusammenhänge in verschiedenen Modalitäten als fruchtbare Lösungsstrategie gilt (Fritzlar & Heinrich 2010). Deshalb ist auch in Hinblick auf das Operationsverständnis eine möglichst hohe Flexibilität im inter- aber auch intramodalen Transfer wünschenswert (Bönig 1995; Moser-Opitz 2007). Während vielfach Produkte von Darstellungswechseln bzgl. verschiedener Kriterien analysiert wurden (Radatz 1991; Bönig 1995; Ruwisch 2001), erlangt der Prozess des Darstellungswechsels erst in jüngerer Zeit Aufmerksamkeit. Die Untersuchung von Kuhnke (2013) zeigt auf, dass Grundschulkinder unterschiedliche Fokussierungen in diesem Prozess vornehmen: Sie richten die Aufmerksamkeit entweder auf einzelne Elemente, auf das Ergebnis oder auf Beziehungen zwischen Elementen bzw. Teilstrukturen. *Fragen:* Wie hängen diese Fokussierungen mit den Strukturierungsfähigkeiten der Kinder zusammen? Welche anderen Einflussfaktoren wirken auf die Prozesse des Darstellungswechsels? Wie sind gleichzeitige Repräsentationen in verschiedenen Modalitäten, sog. Doppelrepräsentationen (Fritzlar & Heinrich 2010; Schnotz et al. 2012) anzuregen?

Bezüglich *spezifischer Darstellungstypen*, welche insbesondere im Bereich Daten sowie bei geometrischen Projektionen in der Grundschule eine Rolle spielen, liegen zwar z.B. zur Komplexität der Diagrammkompetenz verschiedene theoretische Modelle vor (Schnotz 2002; Phillipp 2008), jedoch kaum empirische Daten für das Grundschulalter (Stecken 2013, Plath 2014). *Fragen*: Wie entwickelt sich das Darstellungsverständnis in verschiedenen Inhaltsbereichen? Welche Spezifika der Darstellungstypen wirken wie auf Verarbeitung und Interpretation?

Modellieren

Erwartungen: Schülerinnen und Schüler können a) Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen, b) Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen und c) zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren. (KMK 2005, 10)

Kinder, Welt und Mathematik: Je jünger Kinder sind, umso stärker begegnen sie der Welt ganzheitlich und mit permanentem Interpretationsbedarf auf der Grundlage ihres aktuellen Wissensstandes. Dies bedeutet für die Unterscheidung von Sachebene und Mathematik zunächst kaum eine entsprechende Trennung. Anfangs dient die Sachebene eher als Modellebene für das mathematische Lernen der Kinder; später durchdringen sich beide wechselseitig und werden zur Stützung herangezogen (Peter-Koop 2003). *Fragen*: Welches Verhältnis von Sachebene und Mathematik ist in welchem Alter angemessen, d.h. wie implizit entwickeln sich Modellierungskompetenzen bzw. inwieweit sollen sie explizit thematisiert werden?

Ausgehend von verschiedenen Modellen des *Modellierungsprozesses* in der Mathematikdidaktik der SI der 1980er und 1990er Jahren (z.B. Blum 1985; Schupp 1994), finden sich für die Grundschule Vorschläge, aufgrund der Kurzschrittigkeit der Argumentation zu einem dreischrittigen Prozess zu verkürzen (Guder & Schwarzkopf 2001). Dagegen wurde in der SI-Didaktik eine stärkere Ausdifferenzierung vorgenommen: Das Situationsmodell ist ein Zwischenschritt, welcher verstärkt auf die Verstehensprozesse der Schülerinnen und Schüler fokussiert (Blum & Leiss 2005). Daran schließt sich die theoretische wie empirische Frage an, ob beim Verstehen einer Situation und dem Bilden des Realmodells eher Informationen reduziert und vereinfacht werden müssen oder ob beim elementaren Modellieren eher *Prozesse der theoretischen Anreicherung zur strukturellen Erweiterung* der Situation im Vordergrund stehen (Schwarzkopf 2006).

Modellieren lernt man durch Modellieren. Dies ist zwar eine sicher häufig zutreffende Aussage, doch lässt sich ebenso die Frage stellen, inwieweit *Teilschritte* gezielt angesprochen und gefördert werden können. Viele sog. Bearbeitungshilfen werden im Unterricht thematisiert, doch ist nach wie vor ungeklärt, wie Schülerinnen und Schüler lernen können, sich diese als Werkzeuge beim Modellieren nutzbar zu machen. Genauso liegen kaum Erkenntnisse bzgl. der Interpretation und Validierung von Lösungen vor. An dieser Stelle ist die Frage nach möglichen und notwendigen metakognitiven und selbstregulativen Aktivitäten erneut zu stellen. Gerade in diesem Zusammenhang ist dann zu fragen, welche Anregungen beim Modellieren wie unterstützen können (Schneeberger 2009), ohne schematisch abgearbeitet zu werden.

Als grundlegend für das Modellieren muss auch das *näherungsweise Arbeiten* gelten – eine Mathematik, die im Grundschulunterricht bisher kaum eine Rolle spielt. Zwar fiel es den Schülerinnen und Schülern einer 4. Klasse zunächst auch schwer, abzuschätzen, inwieweit Fehler in ihren Annahmen sich im Ergebnis niederschlugen, doch war zu beobachten, dass innerhalb eines Schuljahres es ihnen immer besser gelang, ihre Annahmen zu explizieren, sinnvolle Durchschnittswerte zu verwenden, überschlagend statt genau zu rechnen und ein Gefühl für die Genauigkeit ihres Ergebnisses zu entwickeln (Ruwisch & Schaffrath 2009). Dennoch gibt es gerade zu diesem Bereich weder theoretische noch empirische Evidenz.

Fazit: Grundsätzlich sind kaum Forschungsaktivitäten zum Modellieren in der Grundschule festzustellen. So ist auch keine Abgrenzung von Modellieren und Sachrechnen zu erkennen.

Argumentieren

Erwartungen: Schülerinnen und Schüler können a) mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen, b) mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln und c) Begründungen suchen und nachvollziehen (KMK 2005, 10).

Mathematisches Argumentieren als *Handlungsmuster* kann in vier Schritte zerlegt werden: Entdecken, Beschreiben, Hinterfragen und Begründen mathematischer Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge (Bezold 2009, Meyer 2007). Die inhaltliche Basis wird durch die Beschreibung der Entdeckung oder einen Verweis auf gemeinsames Vorwissen realisiert; die Begründung ist erforderlich, um die beschriebenen Sachverhalte als wahr anzuerkennen (Ruwisch & Beier 2013).

Mathematische Argumentationen können grob in zwei *didaktische Funktionsklassen* unterteilt werden (Malle 2002): In ihrer Überzeugungsfunktion – dialogisches Begründen – dienen sie dazu, eine gemeinsame Auffassung eines Sachverhalts herzustellen. Dagegen soll monologisches Begründen dazu führen, selbst Zusammenhänge herzustellen und das eigene Verständnis zu vertiefen (Steinbring 2000). Diese epistemische Funktion wird dem Schreiben (Stephany et al. 2013) zugesprochen, durch welches zudem ein höheres bildungs- und fachsprachliches Niveau erreicht werden könnte, das durch konzeptionelle Schriftlichkeit gekennzeichnet ist (Gellert 2011).

Welche *Argumentationsstrukturen* lassen sich nun in dialogischen Argumentationen beobachten? Einfache Argumentationen sind i.d.R. ein- bzw. kurzschrittig, so dass ausschließlich Bedingung und Konklusion aneinandergereiht werden, ohne dass Garanten oder Stützungen angeführt werden (Schwarzkopf 2000; Fetzer 2007). Von sich aus hinterfragen Kinder nur selten, so dass dialogisch schnell Einigkeit unter den Peers herzustellen ist. Begründungsbedarf wird somit häufig zunächst durch die Lehrperson angezeigt (Schwarzkopf 2000). Die Qualität der Argumentationen lässt sich eher als substanziell und unsicher bezeichnen, als dass deduktiv-logische Schlüsse vorzufinden sind (Fetzer 2011). Die Autorin stellt zudem heraus, dass in vielen Argumentationen Teile implizit verbleiben, d.h. Garanten, Stützungen aber auch Voraussetzungen werden nicht explizit genannt, sondern häufig implizit als geltend bzw. geteiltes Wissen angenommen.

Bezüglich *schriftlicher Argumentationen* in dialogischer Form konnte Schreiber (2010) anhand eines Chats herausarbeiten, wie Schülerinnen und Schüler gemeinsam Inskriptionen entwickeln und unter welchen Bedingungen sich diese als besonders fruchtbar für Problemlöseprozesse erweisen. Im alltäglichen Mathematikunterricht werden Schülerinnen und Schüler hingegen kaum zu schriftlichen Argumentationen aufgefordert. So enthalten im Durchschnitt nur 6% aller Aufgaben eines Mathematikschulbuches Aufforderungen zum Begründen (Ruwisch 2014). In einem Mathematikdidaktik und Linguistik verbindenden Forschungsprojekt zeigte sich, dass a) mathematisches Begründen im Grundschulalter differenziert erfasst und beschrieben werden kann und b) das Entdecken und Fortführen mathematischer Zusammenhänge einfacher ist als eine mathematische Begründungsstruktur zu verwenden; beides ist jeweils einfacher als die sprachliche Realisierung der Begründungsstruktur (Neumann, Beier & Ruwisch 2014).

Fragen: Welche (sprachlichen) Mittel stehen Grundschulkindern implizit und explizit als Argumentationsbasis zur Verfügung? Wie entwickelt sich die Argumentationsfähigkeit im Verlauf der Grundschulzeit und welche Argumentationstiefe (Reichweite, Verallgemeinerbarkeit) ist erreichbar?

Kommunizieren

Erwartungen: Schülerinnen und Schüler können a) eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren, b) mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden und c) Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.

Mathematik gilt als *Fachsprache* und damit als besondere Sprache. Die (fach)sprachlichen Anforderungen von und deren Wechselwirkungen mit mathematischen Begriffsbildungsprozessen sind grundlegend für mathematikdidaktische Betrachtungen (Maier & Schweiger 1999). Zwar wird mit epistemologischen Forschungsansätzen intensiv die kommunikative Genese mathematischen Wissens im Grundschulunterricht erforscht (z.B. Steinbring 2005; Nührenbörger 2009), doch findet das Thema „Fachsprache" dabei wenig Aufmerksamkeit. Dass gerade im Grundschulunterricht der Zusammenhang fach-, bildungs- und alltagssprachlicher Aspekte von höchster Bedeutung für das mathematische Lernen ist, wird in den letzten Jahren vermehrt konstatiert. So konnte z.B. Schütte (2009) zeigen, dass Lehrpersonen eher einer ‚impliziten Pädagogik' folgen, welche alltagssprachlich strukturiert ist und nicht explizit fachsprachliche und bildungssprachliche Angebote zum begrifflichen Lernen und Vernetzen enthält.

Wenn Schülerinnen und Schüler gemeinsam als *Partner oder in Kleingruppen* Aufgaben bearbeiten, so stellt sich die Frage, wie diese Arbeit sinnvoll angeleitet werden kann und welche Bedingungen zu gelingenden, welche zu misslingenden Lernergebnissen führen. Während der Redeanteil weder positive noch negative Auswirkungen zu haben scheint (Götze 2007), führt ein starker „Ich-Bezug" mehrerer Gruppenmitglieder, der

Aufmerksamkeit einfordert, ohne diese selbst bereit zu stellen, zu Unmut bzw. Abbruch der Kooperation und auch zu misslingenden Arbeitsprozessen und Lernergebnissen (Ruwisch 2006). Als besonders lernförderliche Faktoren erweisen sich u.a. die sachbezogene interaktive Teilhabe aller (Götze 2007; Winkel 2012) sowie ko-konstruktive Problemlöseprozesse (Brandt & Höck 2011). Besonders lernförderlich für spätere individuelle Bearbeitungen sind sachbezogene Nachfragen, Paraphrasierungen etc. Als lernhinderlich erweisen sich neben dem oben beschriebenen unkooperativen Verhalten aber auch z.B. strukturierte Vorträge einzelner bei passiver Zuhörerschaft der anderen (Götze 2007) oder auch eine zu hohe kognitive Annäherung, so dass die Kinder quasi wie eine Person denken und das kritische Gegenüber als Korrektiv fehlt (Brandt & Höck 2011).

Auch *nonverbale Kommunikationsaspekte* erlangen zunehmend mehr Beachtung. Gestik-Lautsprache-Relationen lassen sich als integriertes Sprachsystem mit semantischer und temporaler Kohärenz beschreiben, so dass sog. ‚Gesture-Speech-Mismatches‘ sich als Indikatoren für die ‚Zone der nächsten Entwicklung‘ auch im mathematischen Lernen erweisen können (Huth 2011).

Fragen: Wie können sprachliche, gestische und handlungsunterstützende Äußerungen integriert betrachtet werden? Welches Verhältnis von Alltags- und Fachsprachlichkeit ist in der Grundschule angemessen? Wie lassen sich lernförderliche Faktoren initiieren und lernhinderliche vermeiden?

Grundlegende Schlussfragen

Wie konkret, situiert, intuitiv und ganzheitlich handeln, denken und lernen Grundschulkinder? Wie abstrakt, dekontextualisiert, bewusst und fachspezifisch können und sollen sie welche Kompetenzen erreichen?

Gleichermaßen gilt es jedoch auch dieselbe Frage in Bezug auf Studierende sowie Lehrerinnen und Lehrer zu stellen, evtl. ergänzt durch die Frage: Welche theoretische Basis und Breite benötigen Lehrpersonen, um die jeweiligen empirischen Ergebnisse entsprechend einordnen zu können und sie für sich handlungsleitend werden zu lassen?

Wie ernst nehmen wir das Vorwissen und die Annahmen eines eigenaktiven, konstruktiven und sozialen Lernens von Mathematik und Mathematikdidaktik im Mathematikunterricht in Mathematikveranstaltungen in der Ausbildung und in Angeboten der Fort- und Weiterbildung?