

Wolfgang SCHNOTZ, Landau

Visuelle kognitive Werkzeuge beim Mathematikverstehen

Strukturen und Prozesse beim kognitiven Problemlösen

Bei der Analyse menschlichen Problemlösens spielt der Repräsentationsaspekt eine zentrale Rolle. Für die Gestaltpsychologie war erfolgreiches Problemlösen im Wesentlichen eine Angelegenheit der Wahrnehmung. Problemlösen erfordert, dass die bisherige Wahrnehmung der Situation so umstrukturiert wird, dass die Lösung sofort offensichtlich wird, also an der neuen Wahrnehmung abgelesen werden kann. Wenn man z.B. an einem Tag einen Berg besteigt und am folgenden Tag auf dem gleichen Weg und im gleichen Zeitraum ins Tal zurückkehrt, kann man sich fragen, ob es einen Punkt gibt, an dem man beim Herabsteigen zur gleichen Tageszeit ist, wie man beim Hinaufsteigen war. Die Frage wird dann leicht lösbar, wenn man sich statt einer Person, die am einen Tag hinauf- und am anderen Tag herabsteigt, zwei Personen vorstellt, von denen die eine den Weg hinauf und die andere den Weg heruntergeht. Diese müssen sich treffen, sind also zur selben Zeit am selben Ort. Diese neue Sichtweise des Problems macht die Lösung sofort offensichtlich.

Im Gegensatz zur Gestaltpsychologie sah die Psychologie der Informationsverarbeitung erfolgreiches Problemlösen vor allem darin, von einem Ausgangszustand einen Weg zu einem Zielzustand in einem sog. Problemraum zu finden. Beispielsweise muss beim sog. Turm-von-Hanoi-Problem innerhalb eines Systems von drei Stäben ein Satz von Scheiben unterschiedlicher Größe von einem Stab (Ausgangszustand) zu einem bestimmten anderen Stab (Zielzustand) verlagert werden, wobei immer nur eine Scheibe bewegt und nie eine größere Scheibe auf eine kleinere Scheibe gelegt werden darf. Jeder auf diese Weise herstellbare Zustand entspricht einem Ort im Problemraum, und Problemlösung besteht darin, einen möglichst kurzen Weg durch den Problemraum zu finden, wobei bestimmte Heuristiken (z.B. Differenzheuristik, Mittel-Ziel-Analyse, Schleifenvermeidung) angewandt werden können.

Ohlsson (1992) hat mit seiner Representational Change Theory eine Synthese des gestaltpsychologischen und des informationspsychologischen Ansatzes vorgenommen. Problemlösen erfordert demnach Repräsentationen mit adäquaten Strukturen wie auch Prozessen, die auf dieser Struktur operieren. Die Gestaltpsychologie fokussierte primär auf Strukturen, wogegen die Informationsverarbeitungspsychologie primär auf Prozesse fokussierte. Während die Gestaltpsychologie nicht ausreichend berücksichtigte,

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 45–52).
Münster: WTM-Verlag

dass Einsichtsprobleme auch über einen Problemraum verfügen und auch auf Operationen innerhalb dieses Raumes angewiesen sind, hat die Informationsverarbeitungspsychologie nicht ausreichend berücksichtigt, dass Problemlösen nicht immer auf das Finden des Weges durch einen Problemraum beschränkt ist, sondern auch erfordern kann, den gegebenen Problemraum in einen anderen Problemraum zu transformieren (d.h. die Problemrepräsentation umzustrukturieren), der eine vereinfachte Folge von Operationen ermöglicht. Gutes Problemlösen beinhaltet somit das Generieren einer Repräsentation, die das leichte Ausführen jener Operationen ermöglicht, welche den gegebenen Zustand in den Zielzustand überführen.

Symbolbasiertes versus modellbasiertes Denken

Die Bedeutung von Strukturen und Prozessen für erfolgreiches Problemlösen lässt die Frage offen, wie diese Strukturen beschaffen sind und welche Art von Prozessen auf diesen Strukturen beim Problemlösen und allgemein bei Denkprozessen stattfinden. Eine mögliche Antwort ist, dass Denkprozesse auf interner Symbolverarbeitung beruhen, was insbesondere nahe liegt, wenn man logische Denkprozesse betrachtet, da sich hier klare Symbolverarbeitungsregeln identifizieren lassen. Allerdings zeigen sich hier auch manche Merkwürdigkeiten. Beispielsweise findet man beim konditionalen logischen Schließen, dass der sog. Modus Ponens (Prämisse 1: *Wenn a, dann b*; Prämisse 2: *Es gilt a*; Conclusio: *Es gilt b*) von nahezu allen Menschen beherrscht wird. Ebenso wie der Modus Ponens ist aber auch der Modus Tollens (Prämisse 1: *Wenn a, dann b*; Prämisse 2: *Es gilt Nicht b*; Conclusio: *Es gilt Nicht a*) ein wahrheitserhaltender Schluss. Der Modus Tollens wird jedoch von weit weniger Personen korrekt vollzogen als der Modus Ponens. Während viele den Modus Tollens, obwohl korrekt, als einen nicht zulässigen Schluss ansehen, betrachten sie den folgenden Schluss fälschlich als folgerichtig: Prämisse 1: *Wenn a, dann b*; Prämisse 2: *Es gilt b*; Conclusio: *Es gilt a*. Gleiches gilt für den folgenden Schluss: Prämisse 1: *Wenn a, dann b*; Prämisse 2: *Es gilt Nicht a*; Conclusio: *Es gilt Nicht b*.

Es stellt sich die Frage, weshalb korrekte Schlüsse als nicht richtig, während inkorrekte Schlüsse als richtig angesehen werden. Wenn Denken auf interner Symbolverarbeitung bzw. auf Anwendung einer im kognitiven System implementierten Logik besteht, so stellt sich die Frage, weshalb diese teilweise funktioniert und teilweise versagt. Eine mögliche Antwort ist, dass logisches Denken einen Verstehensmechanismus beinhaltet, der zu einer symbolischen Repräsentation führt, auf die dann abstrakte Symbolverarbeitungsregeln angewandt werden. Es wird angenommen, dass die „eingebauten“ Regeln unvollständig sind (dass man also z.B. eine Modus-Ponens-Regel, jedoch keine Modus-Tollens-Regel besitzt, was die unter-

schiedliche Schwierigkeit der beiden Schlüsse erklären würde) und dass der Verstehensmechanismus nicht immer zuverlässig funktioniert, sondern manchmal zu Fehlinterpretationen führt (indem z.B. „wenn a, dann b“ misinterpretiert wird als „b genau dann, wenn a“, was erklären würde, dass die beiden oben genannten inkorrekten Schlüsse als korrekt angesehen werden).

Eine gänzlich andere Sichtweise besteht darin, dass Denkprozessen ein Operieren mit inneren Analogmodellen zugrunde liegt (Johnson-Laird, 1983). Denken besteht demnach in der Konstruktion von mentalen Modellen, der Evaluation dieser Modelle (dem Heraussuchen richtiger Modelle) und dem Ablesen von Merkmalen an diesen Modellen. Beim konditionalen Schließen lassen sich z.B. drei Modelle (Fälle) konstruieren, die mit der Wahrheit der Prämisse „Wenn a, dann b“ kompatibel sind: Modell 1 (a und b), Modell 2 (nicht a, jedoch b), Modell 3 (weder a noch b), von denen man annimmt, dass sie in dieser Reihenfolge konstruiert werden. Beim Modus Ponens genügt Modell 1, um daran die Conclusio („b“) abzulesen, während beim Modus Tollens drei Modelle konstruiert werden müssen, um am dritten abzulesen, dass die Conclusio „Nicht a“ zutreffend ist. Dies würde erklären, weshalb der Modus Ponens leichter ist als der Modus Tollens. Das Zustandekommen der beiden obigen falschen Schlüsse wird hier damit erklärt, dass Modell 2 unberücksichtigt blieb, wodurch der Ableseprozess zu falschen Ergebnissen kommt.

Deskriptionale und depiktionale Repräsentationen

Die beiden skizzierten Sichtweisen von Denkprozessen als symbolbasiert oder modellbasiert verweisen auf entsprechend unterschiedliche Formen der mentalen Repräsentation. Allgemein gesprochen lassen sich Repräsentationen in deskriptionale und depiktionale Repräsentationen untergliedern. Zu den deskriptionalen Repräsentationen gehören z.B. Sätze natürlicher Sprachen, Terme und Gleichungen/Ungleichungen in der Mathematik und physikalische Formeln. Zu den depiktionalen Repräsentationen zählen nicht nur realistische Bilder und Karten, sondern auch Reliefs, Skulpturen, zwei- und dreidimensionale Diagramme sowie Analogmodelle, v.a. in Form von Visualisierungen, inklusive die sog. Analogcomputer. Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Repräsentationsformen ist, dass Deskriptionen Relationssymbole beinhalten, Depiktionen hingegen nicht. Bei der Beschreibung eines Objekts in einer natürlichen Sprache bezieht man sich anhand von Nomen auf die Komponenten und setzt sie mit Hilfe von Verben und Präpositionen zueinander in Beziehung. Verben und Präpositionen sind Relationssymbole. In arithmetischen Ausdrücken sind Zeichen wie „=“, „>“, „<“ Relationssymbole. Depiktionen hingegen sind

räumliche Konfigurationen, die aufgrund struktureller Gemeinsamkeiten für den repräsentierten Sachverhalt stehen. Sie beschreiben nicht, sondern zeigen die Beschaffenheit des Sachverhalts. Deskriptionale Repräsentationen sind mit konzeptuellen Strukturen, depiktionale Repräsentationen hingegen mit Objektstrukturen assoziiert.

Deskriptionen und Depiktionen sind für unterschiedliche Zwecke unterschiedlich gut geeignet. Deskriptionen sind darstellungsmächtiger, da sie einen höheren Abstraktionsgrad, einen höheren Allgemeingrad sowie Negationen und Disjunktionen ermöglichen. Deskriptionen wie „*Haustiere nicht gestattet*“ oder „*Sitzplatz für Gebrechliche oder Personen mit Kleinkindern*“ lassen sich nicht direkt bildhaft darstellen. Der Term „ $y = a \cdot x^2$ “ beschreibt eine allgemeine Klasse von Parabeln, während eine geometrische Figur jeweils nur eine bestimmte Parabel repräsentiert. Während Deskriptionen ihren Gegenstand meist nur unvollständig beschreiben bzw. vieles implizit lassen (Kosslyn 1994), sind Depiktionen grundsätzlich informational vollständig: Ein bestimmtes Dreieck beispielsweise enthält notwendig sämtliche Dreieckseigenschaften und ermöglicht somit, diese durch Ablesen zu bestimmen. Depiktionen sind dementsprechend im Sinne des oben genannten modellbasierten Denkens besonders für Inferenzen geeignet, da die neue Information direkt entnommen werden kann (Johnson-Laird 1983). Darüber hinaus bieten Depiktionen den Vorteil, in sich widerspruchsfrei zu sein.

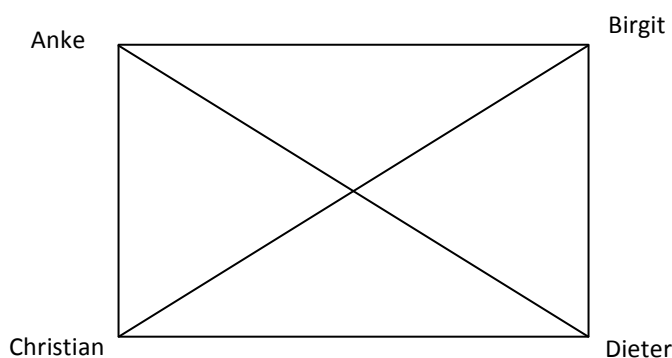
Die Unterscheidung zwischen Deskriptionen und Depiktionen lässt sich nicht nur auf externe Repräsentationen (Texte, Formeln, Bilder, Diagramme usw.), sondern auch auf interne mentale Repräsentationen anwenden. So handelt es sich bei den sog. propositionalen Repräsentationen, von denen auch das oben beschriebene symbolbasierte Denken ausgeht, um Beschreibungen in einer hypothetischen „mentalen Sprache“. Demgegenüber handelt es sich bei den sog. mentalen Modellen, die vom modellbasierten Denken angenommen werden, um depiktionale Repräsentationen des jeweiligen Sachverhalts. Neuere Ansätze zum Verstehen von Texten und Bildern oder Diagrammen sowie zum kreativen Denken und Problemlösen gehen – positiv formuliert – davon aus, dass erfolgreiches Denken und Problemlösen grundsätzlich in einer engen Wechselbeziehung von deskriptionalen und depiktionalen (externen und internen) Repräsentationen besteht (Schnotz, 2005). Negativ formuliert bedeutet dies, dass Defizite beim Denken und Problemlösen häufig auf eine ungenügende Interaktion zwischen deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationen zurückzuführen sind. Dies soll im Folgenden anhand von Beispielen aus dem Bereich des Mathematikverstehens verdeutlicht werden.

Frühes mathematisches Denken

Rasch (2003) hat Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Primarstufe entwickelt, die die verstehende Durchdringung mathematischer Strukturen fördern sollen. Ein Beispiel für eine solche Aufgabe ist:

- (1) *Wenn Anke, Birgit, Christian und Dieter sich morgens auf ihrem Schulweg treffen, schütteln sie sich die Hände. Wie viele Handschläge finden unter ihnen statt?*

Eine depiktionale Repräsentation dieser Situation in Form eines äußeren Bildes oder einer inneren Vorstellung könnte die vier Kinder mit phantasierten äußeren Merkmalen (z.B. Haarfarbe, Frisur, Größe) darstellen. Daran könnte ein Schüler erkennen, dass das erstgenannte Kind, Anke, allen drei anderen Kindern die Hand gibt. Daraus könnte dann der Schluss folgen, dass insgesamt $4 \cdot 3 = 12$ Handschläge ausgetauscht werden. Eine solche depiktionale Repräsentation würde also nur die äußerlich sichtbare Situation und nicht die zugrundeliegende mathematische Struktur hervorheben,



was dann zu einer inadäquaten mathematischen Deskription ($4 \cdot 3$) und so zu einem falschen Ergebnis führt. Für das vorliegende Problem sehr viel geeigneter wäre die in der nebenstehenden Abbildung gezeigte depiktionale Repräsentation.

Hier stehen vier Ecken für vier Kinder, und jede Verbindungslinie zwischen den Ecken repräsentiert einen Handschlag zwischen zwei Kindern. Es gibt insgesamt 6 solcher Verbindungslinien – die Vierecksseiten und die beiden Diagonalen – und deren Zahl kann an der Abbildung leicht modellbasiert abgelesen werden. Das Beispiel verdeutlicht, dass eine Depiktion nicht per se, sondern nur dann zur Lösung beiträgt, wenn sie die in der Problemsituation enthaltene mathematische Struktur hervorhebt. Außerdem zeigt das Beispiel, dass das Nichterkennen der zugrundeliegenden mathematischen Struktur anhand einer entsprechenden depiktionalen Repräsentation Anlass zu fehlerhaften Deskriptionen sein kann, die dann zu falschen Ergebnissen führen.

Bruchrechnen

Die Bedeutung von Bruchzahlen wird üblicherweise durch Visualisierungen unterstützt, indem z.B. „ $1/4$ “ durch einen Viertelkreis, „ $1/3$ “ durch ei-

nen entsprechenden Kreissektor, „ $1/2$ “ durch einen Halbkreis usw. repräsentiert wird. Mit dieser anfänglichen depiktionalen Unterstützung verstehen Lernende dann meist relativ problemlos, dass gleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert werden können, indem man den Nenner beibehält und die Zähler addiert oder subtrahiert. Bei der Multiplikation und Division von Brüchen wird jedoch häufig auf den depiktionalen Bezug verzichtet, da man sehr schnell zu einer nur noch syntaktisch orientierten Symbolverarbeitung übergeht. Damit bleibt jedoch die Semantik des Multiplizierens unbeachtet. Stattdessen werden rein syntaktische Algorithmen ohne semantischen Bezug angewandt, womit das Verständnis mathematischer Strukturen in den Hintergrund tritt zugunsten des routinierten algorithmischen Operierens.

Auf die defizitäre Verknüpfung von deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationen haben Orrill, Sexton, Lee und Gerde (2008) bei der Division von Bruchzahlen hingewiesen. Sie fanden, dass viele Mathematiklehrer amerikanischer High Schools nicht in der Lage waren, die depiktionale Repräsentation einer Aufgabe wie z.B. „ $3/4 : 1/8$ “ an einem Flächenmodell zu lösen, da ihnen offensichtlich nicht klar war, dass das Wesen der Division von Brüchen darin besteht, zu bestimmen, wie oft ein bestimmter Teil eines Ganzen in einem bestimmten anderen Teil dieses Ganzen enthalten ist (hier: 6). Sie zeigten anhand von Abbildungen auf irgendwelche visuelle 6er-Gruppen, verwendeten also Visualisierungen ohne konzeptuelles Verständnis für den zugrundeliegenden mathematischen Sachverhalt. Dementsprechend waren sie auch nicht in der Lage, Flächenmodelle als kognitive Werkzeuge zum Finden der Lösung zu verwenden, also deskriptionale und depiktionale Repräsentationsformen aufeinander zu beziehen und damit ein kohärenteres mathematisches Verständnis herzustellen.

Beweisführung

Das bereits von Plutarch erwähnte Osiris-Problem lautet: „*Bei welchen Rechtecken mit ganzzahligen Seiten (irgendeiner Einheit) sind Fläche und Umfang numerisch gleich?*“ Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe gelingt es relativ leicht, durch Versuch und Irrtum zwei Lösungen zu finden: „ $4*4$ “ und „ $3*6$ “. Schwieriger ist es zu beweisen, dass es nur diese beiden Lösungen gibt. Aus der Vielfalt von möglichen Beweisen sollen hier nur der Faktorisierungs- und der Fliesen-Beweis aufgegriffen werden (Greer, De Bock & Van Dooren, 2009).

Beim Beweis über Faktorisierung geht man von der Osiris-Gleichung „ $xy = 2x + 2y$ “ aus. Diese Gleichheitsaussage lässt sich innerhalb des deskriptionalen Problemraums in andere Gleichheitsaussagen überführen, nämlich in

„ $xy - 2y = 2x$ “, „ $y(x - 2) = 2x$ “, „ $y = 2x/(x - 2)$ “ und „ $y = 2 + 4/(x - 2)$ “. Da x und y ganzzahlig sind, muss auch der Term „ $4/(x-2)$ “ ganzzahlig sein, was wiederum erfordert, dass $(x-2)$ ein Faktor von 4 bzw. 4 ein Vielfaches von $(x-2)$ ist. Da $(x-2)$ ganzzahlig sein muss, gilt entweder „ $x=3$ “, „ $x=4$ “ oder „ $x=6$ “, und (wegen „ $y = 2 + 4/(x - 2)$ “) „ $y=6$ “, „ $y=4$ “ oder „ $y=3$ “. Diese Beweisführung ist rein deskriptional: Ausgehend von einer Beschreibung des Sachverhalts werden durch Symbolmanipulation neue Beschreibungen generiert, die dann den möglichen Wertebereich auf „ $3*6$ “ und „ $4*4$ “ eingrenzen. Beim Fliesen-Beweis geht man davon aus, dass ein Rechteck mit ganzzahligen Abmessungen mithilfe von $1*1$ großen Fliesen gebildet werden kann. Verlegt man zunächst nur an den Außenkanten solche Fliesen, so ist deren Anzahl gleich dem Umfang U minus 4 (weil die 4 Rechteck-Ecken nicht doppelt gefliest werden). Nach Befliesung dieser Randfläche verbleibt dann eine unbeflieste Innenfläche. Randfläche und Innenfläche ergeben zusammen die Gesamtfläche F . Diese kann nur dann (entsprechend dem Osiris-Kriterium) gleich U sein, wenn die Innenfläche 4 beträgt, weil [wegen $F = (U - 4) + \text{Innenfläche}$] nur dann die Fläche F gleich U ist. Diese Beweisführung operiert primär mit (aus Platzgründen hier nicht visualisierten) depiktionalen Repräsentationen, deren Merkmale deskriptional mittels Gleichungen festgehalten werden.

Greer, De Bock und Van Dooren (2009) fanden bei angehenden Mathematiklehrern eine deutliche Präferenz für die Faktorisierungslösung, während die Fliesenlösung als vergleichsweise „unmathematisch“ eingestuft wurde. Man kann hier die Frage stellen, ob es in der Kultur des Mathematikunterrichts eine Präferenz für deskriptionale (algebraische) Repräsentationen ohne Referenz zu depiktionalen Repräsentationen gibt, dass visuelle Modelle nur der anfänglichen „Veranschaulichung“ dienen, die in der eigentlichen Mathematik nur noch eine geringe Rolle spielen. Der Hauptakzent des Unterrichts liegt dann auf der effizienten (weil mechanischen) Manipulation von Symbolen entsprechend den Routinen der symbolischen Algebra ohne semantischen Bezug zu depiktionalen Repräsentationen. Damit wird allerdings im Sinne von Hatano der Akzent vor allem auf den Erwerb von Routinenexpertise“ (d.h. schnelles und genaues Lösen von mathematischen Aufgaben ohne wirkliches Verstehen) gelegt und weniger auf adaptive Expertise (d.h. die Fähigkeit, mit Verständnis gelernte Prozeduren flexibel und kreativ anzuwenden).

Instruktionale Konsequenzen

Die für adaptive Expertise erforderliche kognitive Flexibilität erfordert jedoch nicht nur schnelles und effizientes Manipulieren von algebraischen Ausdrücken, sondern auch die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Formen

der Repräsentation flexibel wechseln zu können, Problemräume adäquat zu strukturieren, und die Fähigkeit, Beziehungen zwischen verschiedenen Repräsentationen erkennen und nutzen zu können.

Bei der Visualisierung im Mathematikunterricht geht es nicht primär am Rande um die visuelle Anreicherung von mathematischen Inhalten mit Alltagskontexten oder die Veranschaulichung von Ausgangsbedingungen oder Ergebnissen mathematischen Denkens. Es geht vielmehr um die flexible Verwendung multipler (deskriptionaler und depiktionaler) Repräsentationen, also um repräsentationale Flexibilität als einer Kernkompetenz mathematischer Kreativität. Es ist davon auszugehen, dass diese Kompetenz durch Anleitung zum systematischen Mapping zwischen verschiedenen Repräsentationsformen und durch systematische Anleitung zum entsprechenden Perspektivenwechsel gefördert werden könnte und sollte. Hierzu reicht das Herstellen von Zeichnungen der gegebenen Situation nicht aus, da dies nicht der Gefahr vorbeugt, dass diese nur zur Illustration und nicht als kognitive Werkzeuge verwendet werden. Vielmehr gilt es, durch systematische Interaktion von deskriptionalen und depiktionalen Repräsentationen das Spektrum der kognitiven Möglichkeiten zu erweitern und somit zu einer höheren Flexibilität mathematischen Verstehens und Denkens beizutragen.

Literatur

- Greer, B., De Bock, D., & Van Dooren, W. (2009). The Isis problem as an experimental probe and teaching resource. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(4), 237-246.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.
- Kosslyn, S. M. (1994). *Image and brain*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Ohlsson, S. (1992). Information processing explanations of insight and related phenomena. In M. Keane & K. Gilhooly (Eds.), *Advances in the psychology of thinking* (pp. 1-44). London: Harvester-Wheatsheaf.
- Orrill, C. H., Sexton, S., Lee, S.-O., & Gerde, C. (2008). Mathematics teachers' abilities to use and make sense of drawn representations. *Paper presented at the Eighth ICLS Conference 2008 in Utrecht*.
- Rasch, R. (2003). *42 Denk- und Textaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren*. Seelze, Germany: Kallmeyer.
- Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 49-69). Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.