Ute BALTES, Christian RÜTTEN, Petra SCHERER, Stephanie WESKAMP, Essen

Mathe-Spürnasen – Grundschulklassen experimentieren an der Universität

1. Konzeptionelle Überlegungen

Im Projekt ‚Mathe-Spürnasen' werden Lernumgebungen entwickelt, die im Rahmen von Experimentiervormittagen an der Universität Duisburg-Essen für Schulklassen der Jahrgangsstufe 4 angeboten werden. Bzgl. der inhaltlichen Auswahl geht es um zentrale mathematische Inhalte, im Sinne von Kernideen, die als substanzielle Lernumgebungen aufbereitet werden und von den Schülerinnen und Schülern unter vielfältigen Perspektiven bearbeitet werden. Dabei geht es um unterschiedliche mathematische Perspektiven, aber auch um den Einbezug anderer Disziplinen unter fächerübergreifenden Aspekten.

Die Lernumgebungen sollen den Schülerinnen und Schülern ein hohes Maß an Eigenaktivitäten bieten und sie zum Probieren und Experimentieren anregen. Darüber hinaus sollen sie auch eine natürliche Differenzierung ermöglichen. Ein wesentliches Ziel ist dabei der Aufbau vernetzten Wissens durch eine aktive Wissenskonstruktion (vgl. z. B. Wittmann 1995). Auch in den Bildungsstandards wird als zentrales Anliegen ein vernetztes, kumulatives, anschlussfähiges und auf Verstehen ausgerichtetes Lernen formuliert, bei dem den allgemeinen mathematischen Kompetenzen im kognitiven und affektiven Bereich eine zentrale Rolle zukommt (vgl. Walther et al. 2008, 22). Betont wird einerseits das Vernetzen inhaltlicher und allgemeiner Kompetenzen, aber auch die Vernetzung der verschiedenen inhaltlichen Leitideen oder die Vernetzung zu außermathematischen Bereichen (Alltagserfahrungen, historische Genese; vgl. Winter 1995). Für die erfolgreiche Vernetzung der verschiedenen Kompetenzen wird u. a. die Konstruktion von gehaltvollen Lernumgebungen (in Abgrenzung zu isolierten Aufgaben) gesehen (vgl. z. B. Wollring & Rinkens 2008, 131 ff.).

Im Projekt wurden bislang für vier Themenbereiche Lernumgebungen entworfen und erprobt: Platonische Körper, Fibonacci-Folge, Pascal'sches Dreieck sowie Würfel. Letztere wird im Folgenden genauer diskutiert.

2. Lernumgebung ‚Würfel'

Der Würfel stellt im Mathematikunterricht der Grundschule das wichtigste Beispiel für einen geometrischen Körper dar: „Es gibt kaum einen geometrischen Körper, der so zahlreiche und unterschiedliche Möglichkeiten für

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 121–124). Münster: WTM-Verlag

geometrische Entdeckungen bietet“ (Schipper 2009, 262). Daher wird der Würfel in den Bildungsstandards sowohl im Zusammenhang mit den inhaltsbezogenen Kompetenzen ‚Raum und Form’ als auch ‚Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten’ erwähnt und entsprechende Aufgabenbeispiele angegeben. Hier zeigt sich bereits die Vielfalt an Aktivitäten, die der Würfel für den Unterricht auf unterschiedlichen Leistungsniveaus bietet. Unter anderem kann der Würfel dazu dienen, die geometrischen Eigenschaften von Körpern zu thematisieren und diese Eigenschaften mit anderen geometrischen Körpern oder Objekten der Alltagswelt zu vergleichen bzw. bestimmte Phänomene (z. B. in der Stochastik) mit diesen zu erklären.

In der Lernumgebung zum Würfel werden in einer Einführungseinheit zunächst die geometrischen Eigenschaften des Würfels erarbeitet bzw. entsprechendes Vorwissen aktiviert. In drei Vertiefungen forschen die Schülerinnen und Schüler arbeitsteilig in Kleingruppen zu Würfeltricks (vgl. Scherer & Wellensiek 2011), Würfelmehrlingen und deren Augensummen (vgl. Winter 2010) sowie zum Würfel als Zufallsgenerator. Die Einführung und die letztgenannte Vertiefung werden im Folgenden näher vorgestellt.

2.1. Einführung ‚Der Würfel und seine geometrischen Eigenschaften’

Die Einführungsphase dient der Aktivierung des Vorwissens bzgl. des Würfels als geometrisches Objekt bzw. der Thematisierung der geometrischen Eigenschaften des Würfels. Dabei wird ausgehend von würfelförmigen Objekten der Alltagswelt ein mathematisches Modell des Würfels entworfen und vertieft. Anschließend werden Objekte der Alltagserfahrung mit diesem Modell in Beziehung gesetzt, und die Schülerinnen und Schüler erkennen die Eigenschaften an unterschiedlichen Repräsentationen.

Zunächst werden den Lernenden verschiedene Würfel bzw. Bilder von Würfeln, auch Würfelabwicklungen (bzw. -netze) und Schrägbilder gezeigt, wodurch der Begriff ‚Würfel’ geschärft wird. Die einzelnen Objekte bzw. Bilder werden genauer auf die Eigenschaften hin untersucht. Die Lernenden erkennen, dass viele im Alltag als Würfel bezeichnete Objekte lediglich würfelförmig oder würfelähnlich aussehen und nicht in allen Eigenschaften dem idealen mathematischen Modell entsprechen.

Bei den Erprobungen hat sich gezeigt, dass die Begriffe ‚Fläche’, ‚Ecke’, ‚Kante’ vielen Schülerinnen und Schülern nicht präsent waren und es daher sinnvoll ist, diese zu wiederholen. Im Anschluss untersuchen die Schülerinnen und Schüler die Lage und die Repräsentation von Ecken, Kanten und Flächen im Vergleich von Abwicklungen und dreidimensionalem Objekt (vgl. Schipper 2009). Darüber hinaus werden an verschiedenen Schrägbildern die geometrischen Eigenschaften zugeordnet, und das Wechselspiel zwischen zweidimensionaler Darstellung und dreidimensionaler Wahrnehmung wird thematisiert.

Abschließend wird am Beispiel des Spielwürfels das Spannungsfeld zwischen näherungsweisem und exaktem mathematischen Modell in den Blick genommen: Der Spielwürfel stellt ein im Alltag verbreitetes als ‚Würfel' bezeichnetes Objekt dar (bzw. lässt sich der geometrische Begriff ‚Würfel' von dem alltagssprachlich gebräuchlichen Namen vom Spielwürfel ableiten). Auch wenn die Ecken des Würfels in der Regel abgerundet sind, besitzt er dennoch viele geometrische Eigenschaften des Hexaeders, die ihn auch als Zufallsgenerator besonders geeignet erscheinen lassen.

2.2. Vertiefung ‚Mit Schweinen würfeln'

Der Spielwürfel ist ein beliebtes Instrument für Erkundungen in der elementaren Stochastik. Im Rahmen dieser Vertiefung erkunden die Schülerinnen und Schüler die stochastische Relevanz der geometrischen Eigenschaften des Würfels. Dazu betrachten sie die historische Entwicklung von Würfeln mit Knochen zum sechsseitigen Spielwürfel. Anschließend experimentieren sie mit dem Würfel und einem alternativen Zufallsgerät und vergleichen diese.

In der Antike setzte sich das regelmäßige Hexaeder langsam als Spielwürfel durch und löste damit den Astragal (Sprunggelenksknochen von Schaf, Ziege oder Rind) als im Spielkontext genutztes Zufallsgerät ab. Im Gegensatz zum Hexaeder besitzen die einzelnen Ausgänge beim Astragal aufgrund einer unregelmäßigen geometrischen Form unterschiedliche Wahrscheinlichkeit.

Anstelle von Astragali, bei denen nur vier Ausgänge unterschieden werden können, vergleichen die Schülerinnen und Schüler im Rahmen der Vertiefung ‚Würfelschweine' aus dem Spiel ‚Schweinerei' (engl. ‚Pass the Pigs®') von Moffat mit sechsseitigen Spielwürfeln. Wie das regelmäßige Hexaeder besitzen auch die Würfelschweine sechs Ausgänge, die jedoch wie beim Astragal nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten (vgl. Gormann 2012). Die Schülerinnen und Schüler würfeln sowohl mit den Schweinen als auch mit Spielwürfeln, dokumentieren tabellarisch ihre Ergebnisse und vergleichen diese unter besonderer Beachtung der Spannweiten der absoluten Häufigkeiten. Dabei zeigt sich, dass die Spannweite bei den Würfelschweinen größer als bei den Spielwürfeln ist. Die Schülerinnen und Schüler versuchen, dieses Phänomen unter Rückbezug auf die unterschiedlichen geometrischen Eigenschaften von Würfelschweinen und Hexaeder zu erklären. Annika beispielsweise vergleicht die Ausgänge ‚Faule Sau 1' und ‚Haxe' beim Schweinewürfeln und vermutet, dass Haxe unwahrscheinlicher ist: „‚Haxe' ist schwieriger zu würfeln, denn das Schwein kann da leicht umkippen." Auf die Frage, ob eine ähnliche Beobachtung auch bei den Ausgängen des sechsseitigen Spielwürfels zu machen sei, antwortet Lisa: „Nein, die sind alle gleich wahrscheinlich."

Im Zusammenhang mit dem Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit wird den Schülerinnen und Schülern der französische Mathematiker Pierre-Simon Laplace (1749-1827) vorgestellt und der sechsseitige Spielwürfel als Laplace'sches Zufallsgerät charakterisiert. Die geometrische Eigenschaft des Würfels bedingt somit seine stochastische Eigenschaft. Abschließend vergleichen die Lernenden Plexiglasmodelle von Oktaeder und Kuboktaeder und stellen Hypothesen bzgl. der Wahrscheinlichkeiten auf. Im Gegensatz zum Oktaeder handelt es sich beim Kuboktaeder nicht um ein Laplace'sches Zufallsgerät mit gleichwahrscheinlichen Ausgängen, da die Seitenflächen zwar regelmäßig, aber nicht gleich sind.

Literatur

Gorman, M. F. (2012). Analytics, Pedagogy and the Pass the Pigs Game. INFORMS Transactions on Education, 13(1), 57-64.

KMK (Hrsg.) (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004. München: Wolters Kluwer.

Moffat, D. (2012). Schweinerei. Ein saublödes Spiel. Düsseldorf: Winning Moves GmbH.

Scherer, P. & Wellensiek, N. (2011). Verborgene Mathematik – Rechentricks verstehen und begründen. MNU Primar, 3(3), 88-95.

Schipper, W. (2009). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig: Schroedel.

Walther, G., Selter, C., & Neubrand, J. (2008). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther u. a. (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (S. 16-41). Frankfurt/M.: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (2010). Würfel & Co – Kunst und Natur in den Symmetrien von Körpern. In M. Ludwig & R. Oldenburg (Hrsg.), Basiskompetenzen in der Geometrie. Tagungsband der Herbsttagung des AK Geometrie der GDM (S. 35-76). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. C. (1995). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K. P. Müller (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 528-531). Hildesheim: Franzbecker.

Wollring, B., & Rinkens, H.-D. (2008). Raum und Form. In G. Walther u. a. (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret (S. 118-140). Frankfurt/M.: Cornelsen Scriptor.