

Jana BEITLICH, Kristina REISS, München

## **Das Lesen mathematischer Beweise – Eine Eye Tracking Studie**

### **Verständnis mathematischer Beweise**

Mathematik ist eine beweisende Wissenschaft (Reiss & Ufer, 2009) und die deduktive Struktur der Mathematik, die in universitären Vorlesungen und Lehrbüchern durch das typische Definition – Satz – Beweis Schema sichtbar wird, erfordert unabdingbar den Umgang mit Beweisen. Neben dem Verfassen von Beweisen sind insbesondere das Lesen und Verstehen von Beweisen zentrale Aktivitäten im Mathematikstudium (Mejia-Ramos & Inglis, 2009). Doch viele Studierende haben hier Schwierigkeiten. Das für dieses Themengebiet relevante Vorwissen aus der Schule basiert zum Teil auf der in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife der Kultusministerkonferenz festgelegten allgemeinen mathematischen Kompetenz „Mathematisch Argumentieren“ (Kultusministerkonferenz, 2012), umfasst aber wenig systematisches Beweisen. Entsprechend schwierig gestaltet sich der Umgang mit Mathematik in der Universität, wo ein streng axiomatischer Theorieaufbau und abstraktere Begriffe die Regel sind.

In einer Studie von Inglis und Alcock (2012) überprüften Studienanfänger und Mathematiker Beweise auf ihre Gültigkeit hin, während ihre Blickbewegungen aufgezeichnet wurden. Die Ergebnisse zeigten, dass Studierende länger als Mathematiker Formeln betrachteten, die in den Beweisen vorkamen (im Vergleich zu den Teilen der Beweise, die keine Formeln enthielten). Außerdem sprangen die Mathematiker häufiger zwischen den Zeilen des Beweises als die Studierenden. Ging es in dieser Studie um das Lesen von Beweisen, um diese auf ihre *Gültigkeit* hin zu überprüfen, wollen wir in unseren Studien auf das Lesen von Beweisen fokussieren, um diese zu *verstehen*, was für Studienanfänger wohl die zentrale Rolle zu Beginn des Studiums einnimmt.

Eine verbreitete Herangehensweise, Studierende beim Verstehen von Beweisen zu unterstützen, ist der Einsatz von den Textinhalt ergänzenden Abbildungen in Lehrbüchern und Vorlesungen. Kognitionspsychologische Theorien zum multimedialen Lernen stützen diesen Ansatz (z. B. Mayer, 2001; Schnotz, 2005) und viele Studien haben gezeigt, dass der Wissenserwerb mit Texten und Bildern erfolgreicher ist als das Lernen nur aus Texten (für eine Übersicht siehe z. B. Levie & Lentz, 1982). Die Kombination aus Text und Abbildungen scheint besonders wirkungsvoll zu sein, wenn die Repräsentationen semantisch verwandt sind oder räumlich nah zusam-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 157–160).  
Münster: WTM-Verlag

men präsentiert werden (Schnotz, 2005), da dann die Informationen aus den Repräsentationen gut integriert werden können. Allerdings können Abbildungen nicht hilfreich und sogar erschwerend sein, etwa wenn sie den Text in einer unpassenden Weise visualisieren. Die Art der Visualisierung beeinflusst die Struktur des mentalen Modells, das aus diesem Bild gebildet wird (Schnotz, 2005).

Im Bereich der Mathematik gibt es wenig empirisch fundierte Forschung zum Effekt der Kombination aus Text und Abbildungen. In einer kürzlich veröffentlichten Studie von Dewolf, Van Dooren, Hermens und Verschaffel (2013) mit Studierenden hatten zusätzlich zum Text präsentierte Bilder keinerlei Effekt auf die Lösungen von Textaufgaben. Ein möglicher Grund hierfür war, dass die Studierenden die Bilder kaum betrachteten. Angesichts dieser Ergebnisse ist es fraglich, ob Personen Abbildungen, die als Teil eines mathematischen Beweises präsentiert werden, *überhaupt* Beachtung schenken.

### Studie zur Rolle von Abbildungen beim Lesen von Beweisen

Ziel unserer Studie war es, empirische Erkenntnisse darüber zu gewinnen, ob – und wenn ja, in welcher Weise – Abbildungen beachtet werden, die gemeinsam mit einem mathematischen Beweis präsentiert werden. Dabei wurde der Beweis gelesen, um ihn zu verstehen.

Das Messen von Leseverhalten ist eine methodische Herausforderung, bei der sich mehrere Zugänge anbieten. Eine mögliche Vorgehensweise ist die mündliche Befragung der Versuchspersonen unmittelbar nach dem Lesevorgang. Eine andere Möglichkeit ist, die Teilnehmer während des Lesens laut denken zu lassen. Ein Nachteil beider Methoden ist jedoch, dass sie subjektiv geprägt sind und daher keine zuverlässige Auskunft über das tatsächliche Leseverhalten geben. Eine objektivere Methode ist, Blickbewegungen mit Hilfe eines Eye Trackers sichtbar zu machen und so das Leseverhalten zu erfassen.

Für die hier beschriebene Studie wählten wir als Teilnehmer Erwachsene mit hoher Expertise in Mathematik und zwar sechs Universitätsmitarbeiter mit einem Hochschulabschluss in Mathematik und zwei Mathematikstudierende höherer Semester. Die Teilnehmer sahen auf einem Bildschirm, der an einen Remote Eye Tracker angeschlossen war, nacheinander drei Items bestehend aus einem Satz, seinem Beweis und einer Abbildung, die im Text platziert war und den geschriebenen Beweis visualisierte, ohne andere

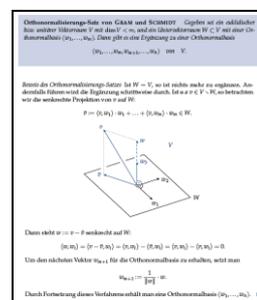


Abb. 1: Beispielimitem bestehend aus einem Satz (schattierter Absatz) und seinem Beweis inklusive einer Abbildung.

zusätzliche Informationen darzubieten (für eine grobe Illustration siehe Abb. 1). Sie sollten versuchen, die dargebotenen Inhalte der Items zu verstehen. Nach jedem Item beantworteten sie Verständnisfragen im multiple-choice Format, indem sie auf die richtige Antwort auf dem Bildschirm klickten. Die Items stammten aus typischen Lehrbüchern für Studienanfänger.

Zur Analyse der Blickbewegungen wurden für jedes Item Areas of Interest (AOIs) definiert, nämlich *Text* (für den Beweistext über und unter der Abbildung, ohne den zu beweisenden Satz) und *Bild* (für die Abbildung). Die Auswertung der Blickzeiten für die AOIs *Bild* ergab, dass alle Teilnehmer die Abbildungen berücksichtigten. Ein *t*-Test für verbundene Stichproben zeigte für Item 1 keinen signifikanten Unterschied in der Betrachtungsdauer pro Pixel (normiert an der Größe der AOIs) zwischen *Text* und *Bild*,  $t(6)_{\text{item}_1} = -1.26$ ,  $p = .25$ . Bei Item 2 und Item 3 zeigten sich dagegen signifikante Differenzen,  $t(6)_{\text{item}_2} = 3.49$ ,  $p = .013$ ,  $d = 0.52$ ,  $t(6)_{\text{item}_3} = 3.17$ ,  $p = .019$ ,  $d = 1.71$ . In beiden Fällen wurde der Text länger betrachtet als die Abbildung. Ein möglicher Grund hierfür ist, dass die Abbildung zwar den Teilnehmern helfen konnte, den Text besser zu verstehen, sie jedoch zum Verständnis nicht zwingend notwendig war und auch nicht den kompletten Beweis veranschaulichte. Ferner waren die Teilnehmer alle mit mathematischen Beweisen im Allgemeinen und mit den dargebotenen Inhalten aus Lehrbüchern für Studienanfänger im Speziellen vertraut. Das Ergebnis bei Item 1 ist möglicherweise dadurch erklärbar, dass die Teilnehmer zunächst annahmen, dass die Verständnisfragen zu den Items explizit auf die Abbildung Bezug nehmen. Nachdem sie beim Beantworten der ersten Fragen merkten, dass dies nicht der Fall ist, kehrten sie zu ihrem natürlichem Leseverhalten zurück und schenken der Abbildung weniger Beachtung. Eine Analyse der Blickpfade zeigte ferner, dass die Blicke der Teilnehmer beim Lesen der Beweise häufig zwischen dem Text und der Abbildung hin- und hersprangen, was ein Indikator dafür sein könnte, dass die Probanden versuchten, die gegebene Information zu integrieren. Dies scheint plausibel, da der Text und die Abbildung jeweils semantisch verwandt waren.

### **Zusammenfassung und Ausblick**

Die Ergebnisse dieser ersten Studie deuten darauf hin, dass Personen mit hoher Expertise in Mathematik eine Abbildung beachten, die gemeinsam mit einem Beweis präsentiert wird, während sie den Beweis lesen, um ihn zu verstehen. Dabei wird der Text länger betrachtet als die Abbildung. Ferner springen die Personen beim Lesen zwischen dem Text und der Abbildung, was darauf hindeutet, dass sie versuchen, die gegebenen Informationen zu verknüpfen. Außerdem kann als ein Ergebnis angesehen werden,

dass die Methode des Eye Trackings prinzipiell nützlich ist, um das Leseverhalten zu analysieren. Eine detaillierte Analyse von Blickbewegungen ermöglicht zuverlässigere Schlüsse über das tatsächliche Leseverhalten als dies mit verbalen Berichten der Teilnehmer möglich gewesen wäre.

Eine Einschränkung dieser Studie ist sicherlich die geringe Teilnehmerzahl. Es sind deshalb, neben der weiteren Datenauswertung, weitere Studien geplant. Hier soll beispielsweise außer dem Einfluss von Abbildungen auch der Einfluss von den Beweis erklärenden Texten untersucht werden, da dies ebenfalls eine Methode darstellt, um Studierende beim Verstehen von Beweisen zu unterstützen. Ferner sollen Studierende in den ersten Semestern einbezogen werden, um deren Leseverhalten mit dem von Experten zu vergleichen. Langfristig kann ein besseres Verständnis des Leseverhaltens mathematischer Beweise dabei helfen, Wege zu finden, das Beweisverständnis von Studierenden bestmöglich zu unterstützen und Lehrmaterialien an die Bedürfnisse der Studierenden anzupassen.

## Literatur

- Dewolf, T., Van Dooren, W., Hermens, F., & Verschaffel, L. (2013). Do students attend to and profit from representational illustrations of non-standard mathematical word problems?. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 217-224). Kiel, Germany: PME.
- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 358-390.
- Kultusministerkonferenz (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Bonn: KMK.
- Levie, W. H., & Lentz, R. (1982). Effects of Text Illustrations: A Review of Research. *Educational Communication and Technology Journal*, 30(4), 195-232.
- Mayer, R. E. (2001). *Multimedia learning*. New York: Cambridge University Press.
- Mejia-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 88-93). Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei.
- Reiss, K., & Ufer, S. (2009). *Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Jahresbericht der DMV, 111(4), 155-177.
- Schnotz, W. (2005). An Integrated Model of Text and Picture Comprehension. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (pp. 49-69). Cambridge: Cambridge University Press.