

Stephan BERENDONK, Bonn

Brücken zwischen elementaren mathematischen Kontexten

„Polynome verhalten sich wie ganze Zahlen“. Diese fantastische Beobachtung schlägt eine Brücke zwischen dem Kontext der Funktionen und dem Kontext der Zahlen, zwischen algebraischer Geometrie und Zahlentheorie.

Der Fund einer solchen Analogie eröffnet neue Möglichkeiten: Begriffe und Argumentationen die zunächst nur aus einem der Kontexte bekannt sind, können möglicherweise bewusst in den anderen Kontext übertragen werden und führen dort zu neuen Resultaten.

Bei der Fortentwicklung der Mathematik spielen solche Brücken zwischen verschiedenen Kontexten eine wesentliche Rolle; eine Tatsache, die sich in der Schulmathematik nicht widerspiegelt. Im folgenden Beitrag werden daher einige elementare und für den Schulunterricht geeignete Beispiele mit „Brückencharakter“ vorgestellt und es wird geschaut, inwiefern die jeweilige Brücke für weiteren Erkenntnisgewinn nutzbar gemacht werden kann.

1. Lo Shu

Es folgt zunächst die Beschreibung eines Zwei-Personen-Spiels: Die Zahlen von 1 bis 9 liegen, z.B. gedruckt auf Karten, auf einem Tisch. Abwechselnd nehmen sich die zwei Spieler jeweils eine der Zahlen mit dem Ziel drei Zahlen zu besitzen, deren Summe 15 ist. Der Spieler, der dies zuerst schafft, gewinnt. Sind alle 9 Karten vergeben ohne, dass einer der Spieler ein *Gewinntrio* in seinen Besitz bringen konnte, so endet das Spiel im Unentschieden.

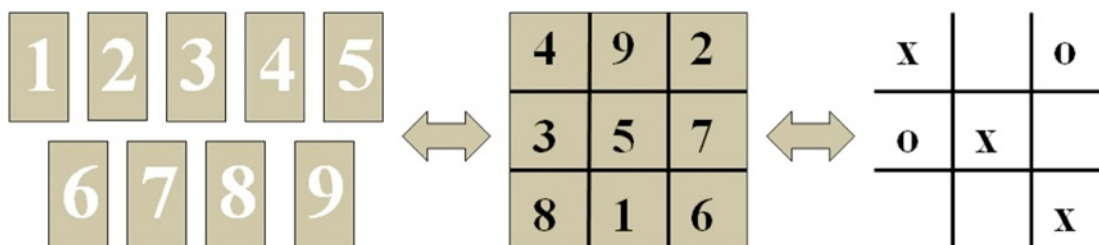
Hat Spieler 1 einen Vorteil? Hat er gar eine Gewinnstrategie? Nein, nach häufigem Spielen bekommt man den Eindruck, dass Spieler 2 stets ein Unentschieden erzwingen kann. Diese Eigenschaft erinnert an das Spiel *Tic Tac Toe*. Schreibt man sich einmal alle Gewinntrios auf, was beim Spielen hilfreich sein kann, so fallen einem noch mehr Ähnlichkeiten auf:

$$1+5+9, 1+6+8, 2+4+9, 2+5+8, 2+6+7, 3+4+8, 3+5+7, 4+5+6.$$

Es gibt 8 Gewinntrios bzw. Gewinnpositionen. Bei Tic Tac Toe haben wir die 3 Zeilen, die 3 Spalten und die 2 Diagonalen, also ebenfalls 8 Gewinnpositionen. Die 5 kommt, wie die Mitte bei Tic Tac Toe, als einzige Zahl in 4 Gewinnpositionen vor. Die Zahlen 2, 4, 6 und 8 kommen, wie die Ecken bei Tic Tac Toe, in 3 Gewinnpositionen vor. Schließlich treten die Zahlen 1, 3, 7 und 9, wie die Mitten der 1. und 3. Zeilen und Spalten bei Tic Tac Toe, nur in 2 Gewinnpositionen auf. Tatsächlich hat das hier vorgestellte

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 165–168).
Münster: WTM-Verlag

Spiel nicht nur beträchtliche Gemeinsamkeiten mit Tic Tac Toe, sondern es ist das gleiche Spiel, nur eben in einem arithmetischen Gewand. Das magische Quadrat der Ordnung 3, genannt *Lo Shu*, bildet die Isomorphie zwischen den beiden Inkarnationen des Spiels.



Das Wissen um diese Isomorphie verschafft dem erfahrenen Tic Tac Toe Spieler nun einen Vorteil beim Spielen der arithmetischen Version. Er kann einfach, wie gewohnt, die geometrische Version spielen und mit Hilfe der *magischen* Brücke jeweils schauen welche Zahl zu ziehen ist. Sein ahnungsloser Gegner muss sich dahingegen ganz auf seine arithmetische Weitsicht verlassen.

Eine bessere Sicht auf die gefundene Isomorphie erhalten wir bei dem Versuch die Isomorphie zu erweitern bzw. zu verallgemeinern: Gibt es auch eine arithmetische Version von *Vier-in-einer-Reihe*? Und wie steht es mit Vier-in-einer-Reihe auf einem Torus? Kommt hier vielleicht ein panmagisches Quadrat der Ordnung 4 in Frage? Tic Tac Toe lässt sich auch mit einem 3x3x3 Würfel anstelle eines 3x3 Quadrats spielen. Kann man zu diesem Spiel, etwa mit Hilfe eines magischen Würfels, ein arithmetisches Analogon konstruieren?

2. Intransitivität

Wir schreiben die drei Zahlen der ersten Zeile des Lo-Shu-Quadrats jeweils auf zwei einander gegenüber liegende Seitenflächen eines Würfels. Genauso verfahren wir mit der zweiten und dritten Zeile. Wir erhalten so die nachfolgend abgebildeten Würfel:



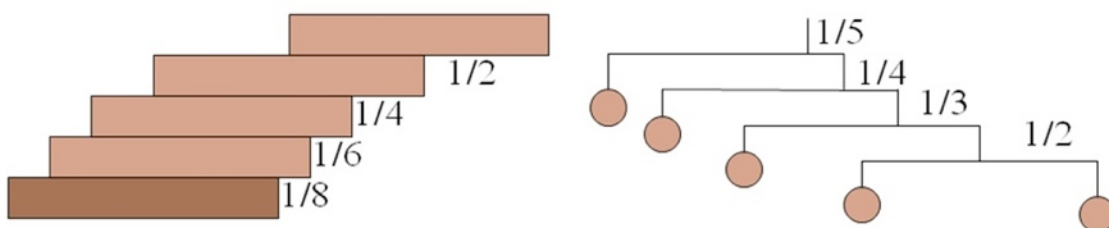
Lässt man die Würfel paarweise gegeneinander antreten, so liegt in 20 von 36 Fällen beim linken Würfel oben eine größere Zahl als beim mittleren Würfel. Der mittlere Würfel gewinnt wiederum in 20 von 36 Fällen gegen den rechten Würfel. Schließlich gewinnt – vielleicht überraschend – auch der rechte Würfel in 20 von 36 Fällen gegen den linken Würfel.

Aufgrund ihrer *symmetrischen Intransitivität* können wir mit den Würfeln das Spiel Stein-Schere-Papier (Schnick-Schnack-Schnuck) spielen: Beide Spieler besitzen alle drei Würfel und wählen daraus gleichzeitig und verdeckt einen Würfel aus. Die ausgewählten Würfel treten dann gegeneinander an. Durch dieses Duell der Würfel erhält das Spiel eine zusätzliche Glücks- bzw. Zufallskomponente. Wir sprechen daher von der *stochastischen* Version des Spiels Stein-Schere-Papier.

Häufig wird das Spiel um einen zusätzlichen Gegenstand, dem Brunnen, oder sogar um zwei zusätzliche Gegenstände, Echse und Spok, erweitert. Haben diese Erweiterungen ebenfalls einen stochastischen Zwillung? Beim Untersuchen dieser Fragen, beim Versuch also die gefundene Brücke auszubauen, trifft man wieder auf neue Fragen: Welche Würfelformen kommen für eine stochastische Version von Stein-Schere-Papier-Echse-Spok in Frage? Ein Ikosaederwürfel? Kann man auch passende Belegungen für den normalen sechsflächigen Würfel finden? Sind die gefundenen Belegungen symmetrisch bezüglich der Gegenstände? Falls nicht, welchen Gegenstand sollte man am Häufigsten spielen? Wie verhält es sich mit diesen Fragen bei 7 Gegenständen?

3. Harmonische Reihe

Wie baut man aus n kongruenten quaderförmigen Klötzchen eine Halbbrücke mit maximalem Überhang? Die linke Zeichnung der nachfolgenden Abbildung zeigt eine Halbbrücke, bei der jedes Klötzchen höchstens zwei andere Klötzchen, ein darunter liegendes und ein darüber liegendes, Klötzchen berührt. Unter solchen Halbbrücken hat diejenige den größten Überhang, bei der der Überhang jeweils des von oben gezählt k -ten Klötzchens gegenüber dem darunter liegenden Klötzchen $1/(2k)$ beträgt – wobei die Länge der Klötzchen 1 ist. Der maximale Überhang korrespondiert somit mit dem n -ten Folgenglied der harmonischen Reihe.



Die einzelnen Überhänge dieser *harmonischen Halbbrücke* lassen sich mit Hilfe des Hebelgesetzes bestimmen. In einem anderen Kontext, dem Bau von Mobiles, spielt das Hebelgesetz eine ähnliche Rolle. Auch dort können wir die Frage nach dem maximalen Überhang stellen: Gegeben seien n gewichtlose Stäbe gleicher Länge, sowie ein (unendlicher) Vorrat von gleich schweren Gewichten. Angenommen die Gewichte können nur an die Enden

der Stäbe gehängt werden und zudem nur ein Gewicht pro Ende. Wie baut man aus n Stäben ein möglichst *ausladendes* Mobile, ein Mobile also, das ein Gewicht besitzt, mit dem es sich in radialer Richtung möglichst weit von der Aufhängung an der Decke entfernen kann? Das gesuchte Mobile scheint einfach die auf den Kopf gestellte harmonische Halbbrücke zu sein. Doch wie tragfähig ist die gefundene Analogie? Lässt man die Bedingung fallen, dass die Klötzchen der Halbbrücke höchstens zwei weitere Klötzchen berühren dürfen, so kann man Halbbrücken mit größeren Überhängen als bei der harmonischen Halbbrücke finden (vgl. [4]). Wie sehen die dazu analogen Mobiles aus? Haben sie auch eine größere *Ausladentheit* als das *harmonische Mobile*?

5. Weitere Beispiele

In [1] wird beschrieben wie der Eulersche Polyedersatz, genauer der von Staudtsche Beweis des Polyedersatzes in drei verschiedenen Kontexten jeweils geleitet durch bestimmte Eigenheiten der jeweiligen Kontexte entdeckt werden kann. Nachdem die gemeinsame Struktur der Kontexte aufgedeckt und dann weiter präzisiert worden ist, wird sie bewusst genutzt um neue Einsichten über die einzelnen Kontexte zu gewinnen.

Die Multiplikation der natürlichen Zahlen lässt sich kontextgebunden zum Einen mit Hilfe einer Balkenwaage, zum Anderen über den Flächeninhalt von Rechtecken *definieren* (vgl. [2], S.59-64 und [3], S. 243-244). Zunächst mag gar nicht klar sein, dass es sich, abstrakt gesehen, um die gleiche Operation handelt. Sobald jedoch strukturelle Ähnlichkeiten (z.B. das Kommutativgesetz) zwischen den beiden Operationen erkannt sind, kann beispielsweise gefragt werden, ob sich diese auch auf analoge Weise nachweisen lassen. Auf welche grundlegenden Kenntnisse (Axiome) über die beiden Kontexte wird bei den Begründungen jeweils zurückgegriffen?

Ein letztes Beispiel folgt als Frage: Was hat eine nach innen öffnende Bus-tür mit dem Zeichnen einer Ellipse mit Hilfe eines Spirographen zu tun?

Der Leser ist aufgefordert nach weiteren vielleicht noch eindrucksvolleren Beispielen für Brücken zwischen elementaren Kontexten zu suchen.

Literatur

Berendonk, S. (2014): *Erkundungen zum Eulerschen Polyedersatz, Genetisch, explorativ, anschaulich*, Springer Spektrum.

Bruner, J.S. (1974): *Toward a Theory of Instruction*, Belknap Press.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1*, Ernst Klett Verlag.

Paterson, M., Peres, J., Thorup, M., Winkler, P., & Zwick, U. (2009): Maximum Overhang, *American Mathematical Monthly*, 116, 763-787.