Jan BLOCK, Braunschweig

Eine didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen als Konzeptualisierung für flexibles algebraisches Handeln

Flexibles algebraisches Handeln beim Lösen quadratischer Gleichungen ist gekennzeichnet durch die Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens, das in Abhängigkeit von den spezifischen Merkmalen der Gleichung ausgewählt wird (Block 2012, 2013). Bei quadratischen Gleichungen sind die Strukturen der Gleichung und der Terme sowie die auftretenden Zahlen relevant (Abb. 1).

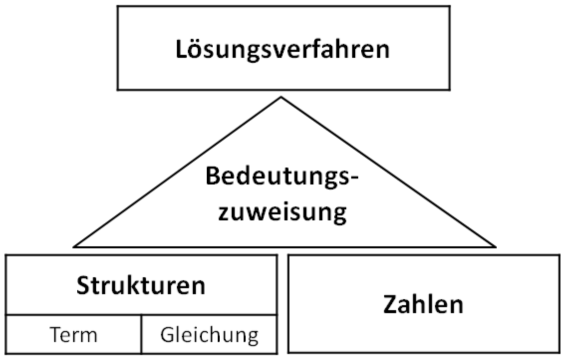

Abb. 1: Einflussfaktoren beim Lösen quadratischer Gleichungen

In einer explorativen Studie mit 57 Schülerinnen und Schülern (Jahrgang 9 und 10, Gymnasium) wird den Fragen nachgegangen, welche Merkmale quadratischer Gleichungen Schüler wahrnehmen und welche Bedeutungen sie diesen zuweisen. Als Bezugsrahmen für die Analyse und Interpretation der Befunde dient eine *didaktische Landkarte*: eine (grafische dargestellte) Beschreibung eines Sachverhalts, die die für eine didaktische Betrachtung unter bestimmten Fragestellungen wesentlichen Informationen enthält.

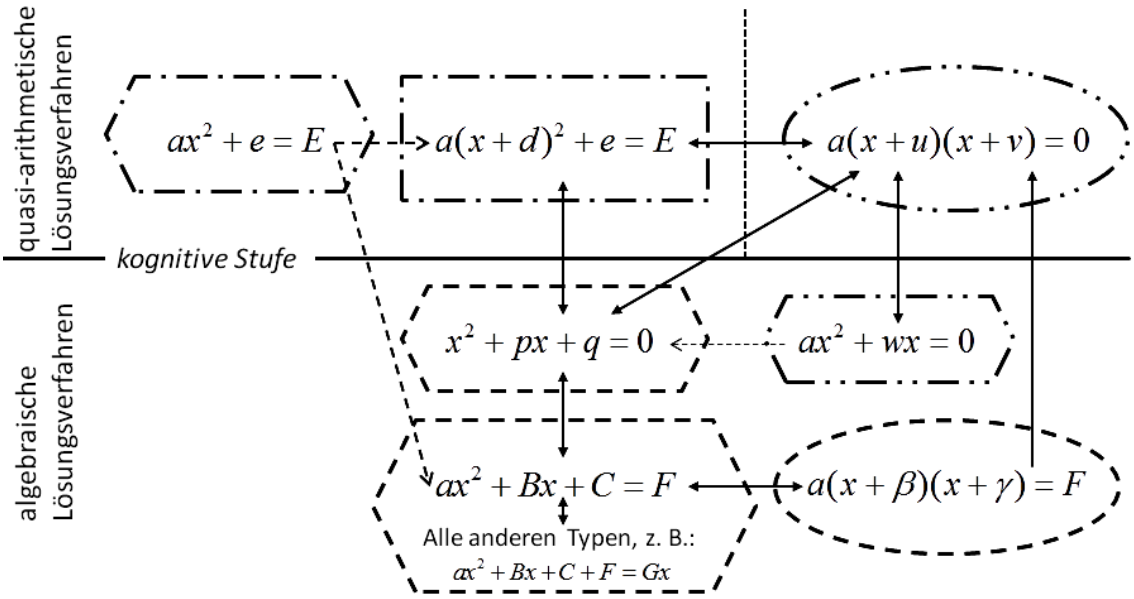

Abb. 2: Didaktische Landkarte quadratischer Gleichungen

Die Typen quadratischer Gleichungen lassen sich auf der didaktischen Landkarte (Abb. 2) zunächst in zwei Klassen einteilen, die sich dadurch

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 197–200). Münster: WTM-Verlag

unterscheiden, dass sie mit quasi-arithmetischen oder algebraischen Verfahren lösbar sind. Bereits Studien von Filloy & Rojano (1984) differenzieren zwischen Klassen linearer Gleichungen in dieser Art und konstatieren einen „didactical cut“ zwischen diesen Klassen, der u. a. von Herscovics & Linchevski (1994) kritisch diskutiert wurde. Zur Beschreibung des qualitativen Unterschieds dieser beiden Klassen eignet sich der Begriff „kognitive Stufe“, da die unterschiedlichen Typen quadratischer Gleichungen verschiedene Anforderungen hinsichtlich algebraischer bzw. arithmetischer Fähigkeiten beim Lösen stellen. Die quasi-algebraisch lösbaren Typen können, ähnlich wie entsprechende lineare Gleichungen, ohne ein Operieren mit der Variablen gelöst werden, indem geeignete Umkehroperationen angewandt werden. Bei den algebraisch lösbaren Typen ist es nicht möglich, die auftretenden Terme in einem Operatordiagramm darzustellen. Diese Gleichungen sind nicht durch Umkehroperationen lösbar, sondern es ist ein Operieren mit der Variablen nötig. Der faktorisierte Term der Gleichung $a(x+u)(x+v)=0$ ist zwar nicht als Operatordiagramm darstellbar, dennoch können die Lösungen ohne algebraische Operationen durch Berücksichtigung der Nullteilerfreiheit des Köpers der reellen Zahlen bestimmt werden. Dieser Sonderfall wird durch die senkrechte, gestrichelte Trennlinie angezeigt. Die Pfeile weisen auf Transformationsmöglichkeiten der verschiedenen Gleichungstypen hin und die gestrichelten Pfeile zeigen an, dass es sich um Spezialfälle handelt. So ist z. B. zu erkennen, dass der Gleichungstyp $ax^2+e=E$ sowohl als Spezialfall einer Gleichung in der sogenannten Scheitelpunktform als auch einer Gleichung in allgemeiner Form interpretiert werden kann.

Die in den Gleichungen auftretenden Terme unterscheiden sich hinsichtlich ihres Typs im Erscheinungsbild, nach Dreyfus & Hoch (2004) also hinsichtlich ihrer „actual structures“. In der Landkarte zeigen die Formen der Umrandungen den Typ des Terms an. Hier ist zu unterscheiden in Produkt (Ellipse), Summe (Sechseck) und den Spezialfall Scheitelpunktform (Rechteck), bei der die Variable linear in einem Produkt auftritt, der Term aber eine Summe ist. Die Linienart der Umrandungen differenziert die Typen von Gleichungen weiter nach adäquaten Lösungsverfahren. Hier kann unterschieden werden zwischen p-q-Formel (gestrichelt), Radizieren (Punkt-Strich) und Faktorisieren/Nullteilerfreiheit (Punkt-Punkt-Strich).

Es ist erkennbar, dass die Klassifizierungen nach Typen der Terme, quasi-arithmetisch bzw. algebraisch lösbaren Gleichungen und adäquaten Lösungsverfahren in komplexer Weise miteinander korrespondieren. Zur Auswahl eines adäquaten Lösungsverfahrens müssen also neben dem auftretenden Term weitere Merkmale betrachtet werden, wie z. B. die auftretenden Zahlen und der Aufbau der Gleichung.

Die Fragestellungen der Studie werden u. a. anhand einer Sortieraufgabe untersucht, bei der die Schüler 20 quadratische Gleichungen nach selbst zu formulierenden Kriterien sortieren müssen (Block 2012). Dabei lassen sich sechs zentrale Kategorien von Sortierkriterien beobachten, die in Abb. 3 unter Nennung ausgewählter Beispiele von Sortierkriterien dargestellt sind.

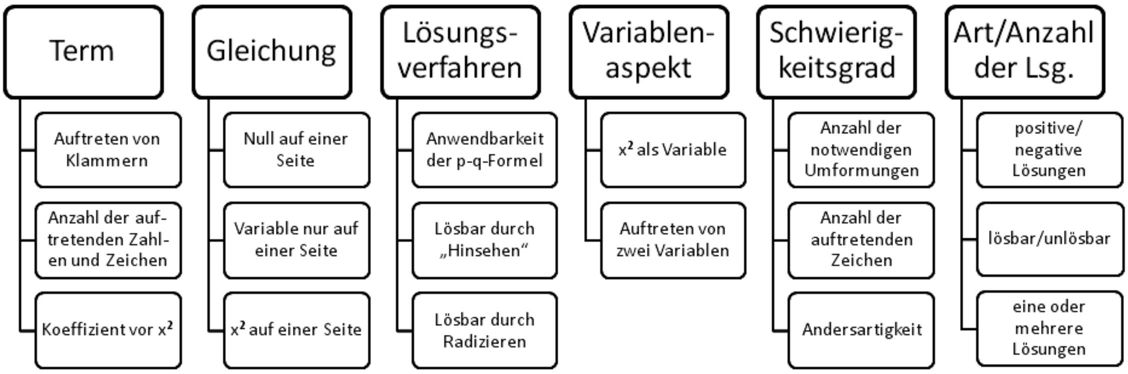

Abb. 3: Sortierkategorien mit ausgewählten Beispielen für Sortierkriterien der Schüler

Die Kategorien Term, Gleichung und Lösungsverfahren sind unmittelbar relevant für flexibles algebraisches Handeln mit quadratischen Gleichungen. Für alle Kategorien wird in einer Analyse der Sortierungen und Begründungen untersucht, inwieweit förderliche Faktoren für flexibles algebraisches Handeln oder Hürden bzw. Hindernisse zu erkennen sind.

Exemplarisch werden im Folgenden Untersuchungsergebnisse bezüglich des Sortierkriteriums „Null auf einer Seite der Gleichung" dargestellt. Ein Schülerpaar formuliert, dass dieses Kriterium eine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der p-q-Formel oder die Bestimmung der Lösung mithilfe der Nullteilerfreiheit darstellt. Damit werden die relevanten Merkmale der Gleichung richtig in Beziehung zueinander gesetzt. Zahlreiche Probanden formulieren, dass es sich um die notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der p-q-Formel handelt. Diese Begründung erscheint in dieser Form korrekt. Betrachtet man aber die zugehörigen Sortierungen, so ist zu erkennen, dass diese Begründung bei vielen Schülern nicht nur auf quadratische Gleichungen bezogen wird, die in Normalform oder allgemeiner Form vorliegen, für die also die Anwendung der p-q-Formel ein adäquates Lösungsverfahren darstellt, sondern auch für Gleichungen, deren Terme Produkte sind (Bsp. $(x-3)(x+5)=0$), deren Terme in einfacher Weise faktorisiert werden können (Bsp. $x^2+2x=0$) oder die durch Radizieren lösbar sind (Bsp. $4x^2-10=0$). Diese Schüler fokussieren in ihrer Wahrnehmung nur auf die an einer bestimmten Stelle der Gleichung auftretende Zahl Null, evtl. wahrgenommene Strukturen der Terme werden nicht weiter berücksichtigt. Eine solche isolierte Merkmalsbetrachtung steht einem flexiblen algebraischen Handeln als Hindernis im Wege.

Wahrnehmungen, denen Bedeutungen zugeschrieben werden, die in keinem Zusammenhang zum Lösen der Gleichung stehen, überdecken möglicherweise relevante Bedeutungen und wirken so als Hürden für die Flexibilität beim Lösen von Gleichungen. Eine solche Begründung ist z. B. das „Beachten besonderer Rechenregeln mit der Null“. Die auch beim Lösen von Gleichungen zu beachtenden Besonderheiten beim Umgang mit der Zahl Null sind unabhängig vom wahrgenommenen Merkmal „Null auf einer Seite der Gleichung“. Offensichtlich wird aber durch das Auftreten der Null an exponierter Stelle der Gleichung vorhandenes Wissen zu dieser Zahl aktiviert. Eine andere Begründung des Merkmals „Null auf einer Seite der Gleichung“ bezieht sich auf die Einschätzung des Schwierigkeitsgrads, wenn formuliert wird, dass eine „Vereinfachung von Rechenvorgängen“ durch diese Gestalt bedingt ist. Im Kontext flexiblen algebraischen Handelns ist diese Einschätzung jedoch nicht relevant.

Die bisherigen Auswertungen der Studie zeigen sehr wenig positive Befunde bezüglich der zu erwartenden Kompetenzen im flexiblen Umgang mit quadratischen Gleichungen. Dieses Ergebnis deckt sich tendenziell mit Befunden von Nogueira de Lima & Tall (2006) in einer Studie zum Verständnis von Gleichungen. Die qualitativen Analysen ermöglichen aber das Erkennen der Zusammenhänge für Hindernisse und Hürden für flexibles algebraisches Handeln und bieten somit die Möglichkeit zur Entwicklung von Hinweisen für die Gestaltung von Lernprozessen, die ein flexibles algebraisches Handeln fördern können.

Literatur

Block, J. (2012): „Aber das rechnet man doch mit der p-q-Formel!“ – Wie erfassen Schülerinnen und Schüler Merkmale quadratischer Gleichungen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM. 137-140.

Block, J. (2013): Quadratische Gleichungen - Erkennen und verstehen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Münster: WTM. 156-159.

Dreyfus, T., Hoch, M. (2004): Equations - A structural approach. In: PME 28, Vol. I. 152-155.

Filloy, E., Rojano, T. (1984): From an arithmetical to an algebraic thought. A clinical study with 12-13 year olds. In: PME-NA. 51-56.

Herscovics, N., Linchevski, L. (1994). A gognitive gap between arithmetic and algebra. In: *Educational Studies in Mathematics* 27 (1), 59–78.

Nogueira de Lima, R., Tall, D. (2006): The Concept of Equations: What have Students met before? In: PME 30, Vol. 4. 233-240.