Katharina BÖCHERER-LINDER, Andreas EICHLER, Freiburg

Der Einfluss der Visualisierung auf den Wissenserwerb im Bereich bedingte Wahrscheinlichkeit

Hintergrund

„Representation and visualization are at the core of understanding in mathematics" (Duval, 2002, S. 312). Dass die Visualisierung, hier verstanden als die grafische Repräsentation eines mathematischen Objekts oder Verfahrens, einen erheblichen Einfluss auf das Lernen von Schülerinnen und Schülern haben kann, ist in der mathematikdidaktischen Forschung unbestritten. Dennoch ist hier wie auch in der psychologischen Forschung ebenso unbestritten, dass eine Visualisierung nicht per se auf den Lernerfolg wirkt, sondern ihre Güte wie auch die Güte ihrer Verknüpfung mit dem mathematischen Objekt entscheidend ist (z.B. Ainsworth, 2006; Presmag, 2006). Damit besteht für die mathematikdidaktische Forschung einerseits die Frage, welche von möglicherweise mehreren Visualisierungen für einen Themenbereich den höchsten Lernerfolg verspricht, andererseits die Frage, welcher Art der adressierte Lernerfolg ist.

In dem hier beschriebenen Forschungsprojekt, das Teil der Promotionskollegs VisDeM (Visualisierungen im Deutsch- und Mathematikunterricht) ist, wollen wir beiden Fragen nachgehen. Dies geschieht bezogen auf das Thema der bedingten Wahrscheinlichkeiten, einem Bereich, in dem einerseits Visualisierungen potentiell Lernhürden beseitigen können und in dem andererseits bereits empirische Untersuchungen zur Wirksamkeit von Visualisierung, dem Einheitsquadrat und dem Baum mit absoluten Häufigkeiten, bestehen (Bea, 1995; Sedlmeier & Gigerenzer, 2001).

Visualisierungen im Themenbereich bedingte Wahrscheinlichkeit

Beim Umgang von Erwachsenen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ergaben Studien von Sedlmeier und Gigerenzer (2001) die langfristig höhere Effektivität des Baumes mit absoluten Häufigkeiten gegenüber dem Wahrscheinlichkeitsbaum beim Rückwärtsschließen auf Grundlage bedingter Wahrscheinlichkeiten. Dies wurde auch auf Schulebene durch die Arbeit von Wassner (2004) bestätigt. Die Überlegenheit des Baumdiagramms mit absoluten bzw. natürlichen Häufigkeiten gegenüber dem Wahrscheinlichkeitsbaum wird zum einen mit der Repräsentation der Information (natürliche Häufigkeiten) erklärt (Gigerenzer & Hoffrage, 1995), zum anderen mit der grafischen Hilfe des Baumes, die eine sequentielle Strukturierung der Information ist (Sedlmeier & Gigerenzer, 2001). Die nachgewiesene Überlegenheit bezieht sich dabei auf das Lösen von Rechenaufgaben zur

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 209–212). Münster: WTM-Verlag

Formel von Bayes in verschiedenen Kontexten und damit auf das prozedurale Wissen (Hiebert & Carpenter, 1992).

Andererseits belegt die Untersuchung von Bea (1995) die höhere Wirksamkeit des Einheitsquadrates gegenüber dem Wahrscheinlichkeitsbaum hinsichtlich der langfristigen Qualitätsverbesserung stochastischen Denkens mit Bezug auf bedingte Wahrscheinlichkeiten. Der Vorteil des Einheitsquadrates ist dabei darin zu sehen, dass das Einheitsquadrat als eine statistische Grafik die Größenverhältnisse darstellt und somit eine strukturelle Visualisierung auch der Formel von Bayes bietet. Die Ergebnisse von Bea (1995) zeigen, dass das Einheitsquadrat gegenüber dem Wahrscheinlichkeitsbaum sowohl hinsichtlich der Förderung des prozeduralen Wissens als auch bezogen auf das Verständnis und die Problemlösefähigkeit im Sinne eines konzeptuellen Wissens (Hiebert & Carpenter, 1992) überlegen ist.

Bezogen auf die bisherigen Forschungsergebnisse bleibt die Frage bestehen, welche der beiden Visualisierungen (Baum, Einheitsquadrat) wirksamer hinsichtlich des Lernerfolgs von Schülerinnen und Schülern ist und zwar getrennt nach prozeduralem und konzeptuellem Wissen. Vorab vermuten wir, dass das Einheitsquadrat wirksamer das konzeptuelle Wissen fördert, während sich der Baum (mit natürlichen Häufigkeiten) hinsichtlich des Aufbaus prozeduralen Wissens überlegen zeigt.

Forschungsmethode

Die Wirksamkeit der Visualisierungen auf den Wissenserwerb wurde in einer Pilotstudie in einem quasi-experimentellen Design in einem einheitlichen Setting untersucht und verglichen. Hierfür wurde eine Intervention mit Lehramtsstudierenden für die Sekundarstufe I an der PH Freiburg durchgeführt. Das Treatment bestand aus zwei Lerneinheiten von je 60 Minuten, die sich allein in der Visualisierung unterschieden. In der ersten Interventionsgruppe (N=21) wurde das Einheitsquadrat bzw. eine gewichtete Vierfeldertafel eingesetzt, in der zweiten Gruppe (N=22) das Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten. Es wurde ein Vortest und ein Nachtest durchgeführt. Die Tests waren bis auf die eingesetzten Visualisierungen identisch. Dabei wurden eine A- und eine B-Version in einem Überkreuzdesign verwendet.

Ausgehend davon, dass die beschreibende Statistik Verständnisgrundlage für die schließende Statistik ist (Meyer, 2008), bezogen sich die Interventionen und die Testaufgaben auf einen Bereich, der Verständnisgrundlage für den Themenkomplex bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes ist. Dabei ging es darum, Aussagen in bivariaten Situationen zu verstehen und zu bewerten. Es wurden Größenverhältnisse innerhalb eines Datensatzes in den Blick genommen. An einer Beispielaufgabe (Abb.1) zeigt sich, wie das Verständnis für den Einfluss der Basisrate („Die meisten Patienten sind gesund“) und das Problem der Diagnose seltener Ereignisse bzw. das Rückwärtsschließen („Die meisten positiv getesteten Patienten sind gesund“) angebahnt werden kann, ohne sich unmittelbar auf die Formel von Bayes zu beziehen (Sedlmeier & Gigerenzer, 2001).

Beispielaufgabe: Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an:

- Die meisten positiv getesteten Patienten sind gesund.
- Die meisten kranken Patienten haben ein positives Testergebnis.
- Die meisten Patienten sind gesund.

Gruppe 1 hatte das Einheitsquadrat, Gruppe 2 das Baumdiagramm

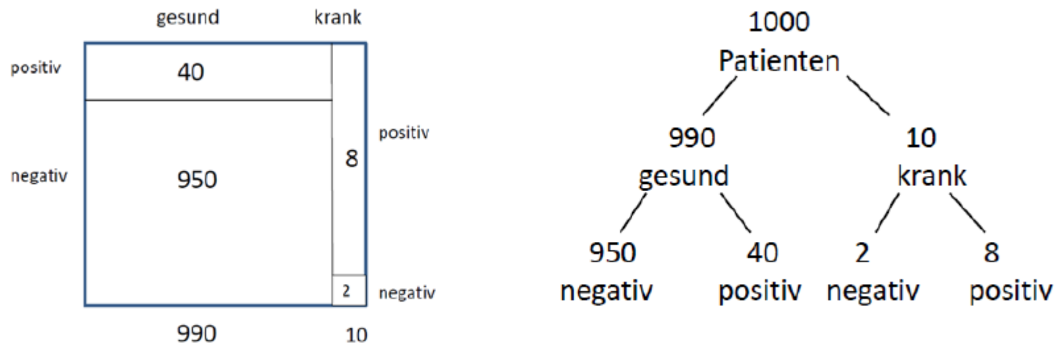

Abb. 1: Beispielaufgabe mit Visualisierungen Einheitsquadrat und Baum

In unserer Pilotstudie haben wir uns darauf beschränkt, das Einheitsquadrat als Anschauungshilfe so zu skizzieren, dass die Größenverhältnisse ungefähr wiedergegeben werden. Auf eine exakte Konstruktion haben wir verzichtet.

Ergebnisse

In der Pilotierung wurden sowohl im Vor- als auch im Nachtest ausschließlich Items mit Verständnisfragen zu bivariaten Zusammenhängen und keine Routine- oder Rechenaufgaben eingesetzt. Daher wurden alle Testaufgaben auf den Erwerb von konzeptuellem Wissen bezogen. Insgesamt haben sich die Testitems überwiegend als zu leicht für die Stichprobe erwiesen, da deutliche Deckeneffekte zu beobachten waren. Durch die fehlende Varianz waren erwartungsgemäß eine Skalenbildung sowie der Nachweis eines überzufälligen Unterschieds der Interventionsgruppen schwierig.

Mit Hilfe der Pilotierung konnte unsere Eingangshypothese, dass das Einheitsquadrat für den Erwerb konzeptuellen Wissens überlegen ist, nicht beurteilt werden. Allerdings geben die Ergebnisse der Pilotierung einen Hinweis darauf, dass es lohnenswert sein könnte, die genannte Hypothese weiter zu untersuchen. So zeigte sich bei einzelnen Testitems durchaus eine leichte wenn auch nicht signifikante Überlegenheit des Einheitsquadrates. In dem oben genannten Testitem aus dem Nachtest (Abb.1) zum Beispiel erreichte die Einheitsquadratgruppe im Schnitt 5,71 Punkte, die Baumdiagrammgruppe 5,36 Punkte ($p = 0,116$). Diese höhere Wirksamkeit des Einheitsquadrates ist insofern bedeutsam, als für fast alle Studierenden das Einheitsquadrat neu und unbekannt war, wohingegen das Baumdiagramm fast allen Studierenden schon vor der Intervention vertraut war.

Ausblick

Geplant ist eine Interventionsstudie mit Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 10 am Gymnasium. Hier sollen nicht nur die Verständnisgrundlagen sondern auch der Satz von Bayes direkt in den Blick genommen werden. Die Intervention und der Test werden weiterentwickelt, so dass sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen erhoben werden kann. Mit den Erfahrungen der Pilotierung soll zudem die Spannweite der Aufgabenschwierigkeiten vergrößert werden.

Literatur

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, 183–198.

Bea, W. (1995). *Stochastisches Denken*. Frankfurt a.M.: Lang.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt (Hrsg.), *Representation and mathematics visualization* (S. 311-336). North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. *Psychological Review, 102, 4*, 684-704.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 65-97). New York: Macmillan.

Meyer, J. (2008). Bayes in Klasse 9. In A. Eichler & J. Meyer (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht, Band 4* (S. 123-135). Hildesheim: Franzbecker.

Presmag, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (S. 117-146). Rotterdam: Sense Publishers.

Sedlmeier, P. & Gigerenzer, G. (2001). Teaching Bayesian Reasoning in Less Than Two Hours. *Journal of Experimental Psychology: General, 130, 3*, 380-400.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens*. Hildesheim: Franzbecker.