

Bernhard BROCKMANN, Augsburg

Strategien von Schülern und typische Fehler beim Lösen linearer Gleichungen

Wahrscheinlich wird jeder Lehrer, der ein zentrales Thema wie Äquivalenzumformungen bei linearen Gleichungen behandelt, das Kapitel mit einem Test abschließen, der korrigiert, evtl. benotet und zurückgegeben wird. Bei der Besprechung der Testergebnisse mit den Schülern wird er die Aufgaben nach ihrem Anspruchsniveau gewichten, über den einen oder anderen Lösungsweg diskutieren, auf die häufigsten Fehler eingehen und sich passende Übungen überlegen. Ist der Test gut ausgefallen, sind Schüler und Lehrer zufrieden, für weitere Analysen aber bleibt in der Regel keine Zeit.

Anhand von Materialien aus dem Archiv der ehemaligen Zentralstelle für Computer im Unterricht, ergänzt durch aktuelle Erhebungen sollen mit nicht zu aufwendigen Werkzeugen differenzierte Auswertungen eines Tests zu linearen Gleichungen versucht werden.

Gruppe A (n=196)

$$19x + 84 = 23x$$

$$9x + 5(4 + 3x) = 140$$

$$14x - 15 + 29 = -8 + 19x - 21x$$

$$15x - 82 = 16 - 4(7 - 5x)$$

Gruppe B (n=66)

$$29x + 124 = 33x$$

$$14x + 5(6 + 2x) = 150$$

$$13x - 24 + 39 = -7 + 28x - 31x$$

$$15x - 87 = 18 - 5(7 - 4x)$$

Leicht oder schwer?

Als Maß für die Schwierigkeit einer Aufgabe wurde der Anteil richtiger Lösungen angesetzt. Ein aktueller Test (8. Klasse Februar 2014) schien die Anordnung des Autors nach steigendem Schwierigkeitsgrad zu bestätigen. Der Blick in andere Klassen zeigt aber, dass in manchen Fällen Aufgabe 1 fehleranfälliger als Aufgabe 2 war oder dass Aufgabe 3 die meisten Schwierigkeiten bereitete. Die leichten Einstiegsaufgaben 1 und 2 grenzen sich in ihrer Schwierigkeit jedoch deutlich gegen die beiden letzten Aufgaben ab. Der Anteil der richtigen Lösungen kann also nur eine grobe Orientierung für die Schwierigkeit einer Aufgabe geben. Unterschiede zwischen den Gruppen A und B lassen sich nur vermuten. Könnten z. B. die in Gruppe B etwas größeren Zahlenwerte Ursache für den etwas geringeren Anteil richtiger Lösungen sein?

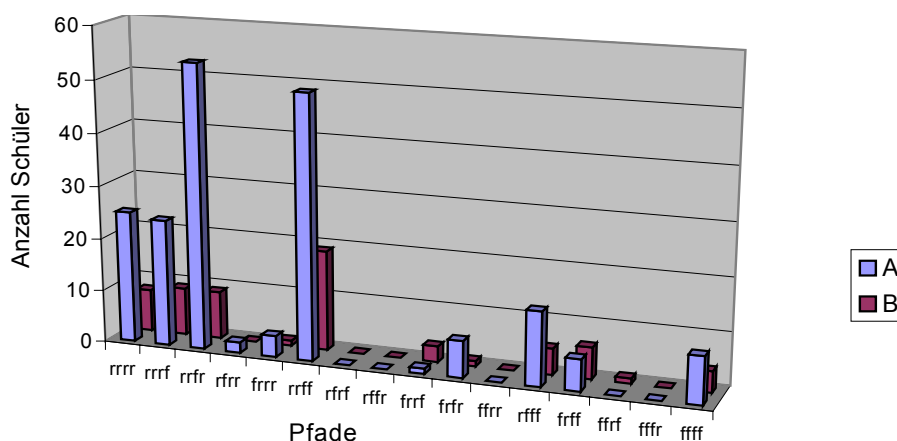
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 241–244).
Münster: WTM-Verlag

Richtig oder falsch?

Wenn man bei den Lösungsversuchen nur zwischen richtig r und falsch f unterscheidet, lassen sich für alle Schüler alle möglichen „Erfolgspfade“ von „alles richtig“ über „Fehler nur bei der letzten Aufgabe“, ... bis „alles falsch“ aufzeichnen und z. B. wie bei einem Galtonbrett die Häufigkeiten zu jedem einzelnen Pfad angeben.

Ein Blick auf das Säulendiagramm zeigt schnell, dass etwa die Hälfte aller möglichen Pfade überhaupt nicht oder nur ganz selten vorkamen. Deutlich erkennbar wird auch hier der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben, weil z. B. Schüler mit 3 richtigen Lösungen ihre Fehler bei Aufgabe 3 oder 4 machen und Schüler mit 2 richtigen Lösungen ihre Fehler vorwiegend bei den Aufgaben 3 und 4 haben.

Die Diagrammsäulen erlauben auch Aussagen über die Sicherheit der Schüler im Lösen von Aufgaben. Als Maßstab könnte die Zahl der richtigen Lösungen dienen. Sieht man von den Schülern ab, die keine Aufgabe richtig haben, gibt es keine Auffälligkeiten.



	rrrr	rrrf	rrfr	rrrr	frrr	rrff	rfrf	rffr	frfr	frfr	ffrr	rfff	frff	ffrf	ffrr	ffff
■ A	25	24	54	2	4	50	0	0	1	7	0	14	6	0	0	9
■ B	8	9	9	0	1	19	0	0	3	1	0	5	6	1	0	4

Differenzierte Analyse

Nach diesem mehr globalen Bewertungsansatz soll eine differenzierte lokale Analyse versucht werden. Ziel ist ein Überblick über die tatsächlich gewählten Lösungswege und über die von den Schülern gemachten Fehler. Es bedurfte mehrerer Ansätze, für die Darstellung der Lösungswege eine geeignete Form zu finden. Versuche, die Lösungen aller Schüler einer Klasse in einem einzigen Diagramm simultan aufzuzeigen, scheiterten an mangelnder Übersicht. Eine Aufteilung wurde notwendig: Fehler wurden in

einer eigenen Liste nach Typen und vermuteten Ursachen erfasst, in das Diagramm nur Wege mit richtigen Lösungen aufgenommen. Es erwies sich dabei als praktikabel, zuerst mit einer Klasse zu beginnen und die verwendeten Zwischenschritte und damit die Lösungswege auf einer Folie aufzuschreiben bzw. einzuzeichnen. Auf einer zweiten, darüber gelegten Folie wurden dann Schüler für Schüler die benutzten Wege mit Punkten markiert. Relativ schnell entstand so ein Bild der Häufigkeitsverteilung für die einzelnen Lösungswege. Für die nächsten Klassen wurden stets weitere neue Folien zur Erfassung der Häufigkeiten aufgelegt. Fast immer mussten bisher nicht übliche Weg nachgetragen werden. Mit dieser Methode wurden aber Unterschiede auch zwischen den Klassen sofort sichtbar.

Links oder rechts? Analyse der Aufgabe $19x + 84 = 23x$

Die Aufgabe schaffen die Schüler in der Regel in zwei Schritten. Ihr erster Blick gilt dabei Termen mit x , bevor sie Strategien für ihre Lösung entwickeln. Weil so die Subtraktion einfacher wird, fassen die meisten Schüler (mehr als zwei Drittel) Terme mit x auf der rechten Seite zusammen und kommen zur Gleichung $84 = 4x$ oder direkt zur Lösungsmenge. Schüler, die x lieber auf der linken Seite hatten, entwickelten allein für den ersten Umformungsschritt neun weitere Varianten. Welche Ideen hatten sie wohl?

- mit Seitentausch: $23x = 19x + 84$; $23x - 19x = 84$; oder direkt $4x = 84$
- ohne Seitentausch: $19x = 23x - 84$; $19x - 23x = -84$; $-23x + 19x = -84$;
 $19x - 23x + 84 = 0$; $-4x + 84 = 0$; oder direkt zu $-4x = -84$

In der Regel geben die Schüler an, welche Rechenoperation sie vornehmen wollen (z. B. $-19x$). Gelegentlich schreiben sie Zwischenschritte und Nebenrechnungen auf; manche verzichten aber auch auf schriftliche Notation und führen mehrere Umformungen gleichzeitig durch. Die Vielfalt der individuellen Lösungswege in allen Klassen überrascht. Ein Zeichen für Methodensicherheit?

Überraschend ist auch, dass schon bei dieser relativ einfachen Aufgabe fast alle typischen Fehler vorkommen: Rechenfehler bei Subtraktion oder Division, Vorzeichenfehler, nicht deutbare Umformungsfehler, aber auch typische Fehler wie

- entgegengesetzte Operationen (z. B. links -84 , rechts $+84$),
- einseitige Operationen (z. B. links -84 , rechts unverändert),
- falsche Interpretation von Termen (z. B. $4x$ als $4 + x$).

Lassen sich solche Fehler reduzieren oder gar vermeiden?

Aus dem Archiv der Zentralstelle: Üben mit Erfolg

Im Projekt „Computerunterstützter Unterricht“ (s. Literaturhinweis) wurden u. a. Untersuchungen zu einem Algebrakurs mit Programmen zum Thema Gleichungen durchgeführt (B. Brockmann: „Zur Effektivität von Übungsprogrammen – Untersuchung am Beispiel von linearen Gleichungen“). Die Auswertung von Protokollen, Tests und Erhebungen aus diesem Projekt enthält Aussagen auch zum Umgang mit typischen Fehlern:

Wurden z. B. die Schüler in einem Übungsprogramm – der Computer war hier Übungsmittel und zugleich Forschungsinstrument – besonders darauf hingewiesen, dass sie beim Umformen auf den beiden Seiten einer Gleichung entgegengesetzte Rechenoperationen durchgeführt hatten, so trug diese spezifische Diagnose in hohem Maße zur Vermeidung von Fehlern dieser Art bei. Diese Wirkung wurde noch verstärkt, wenn die Schüler aufgefordert wurden, ihren Fehler selbst zu beschreiben. Dass eine solche Aufforderung zur Verbalisierung nicht nur über das Medium Computer, sondern auch im Unterricht, vor allem aber bei der Arbeit mit einzelnen Schülern erfolgreich ist, kann als gesichert gelten.

Jung oder alt? Strategien von Erwachsenen

Die Aufgaben wurden auch einigen Erwachsenen vorgelegt, die 10, 20 oder auch 40 Jahre mit Gleichungen nichts mehr zu tun hatten. Auch nach langer „Mathe-Pause“ verfügten die Erwachsenen über Strategien zur Lösung der angebotenen Gleichungen. Wer sich mutig der Herausforderung stellte, alte Methoden aus der Schulzeit wieder zu aktivieren, spürte mit jeder Aufgabe, die bearbeitet war, wachsendes Vertrauen in die eigenen lange verborgenen Fähigkeiten und fand fast immer einen Weg zur richtigen Lösung. Besonders auffällig die Souveränität, mit der in einem einzigen Schritt die Seiten einer Gleichung vertauscht und Differenzen berechnet wurden. Diesen „ganzheitlichen Blick“, vermutlich am Waagemodell geschult, scheinen Erwachsene den allermeisten Schülern vorauszuhaben.

Wenn einzelne Fehler gemacht wurden, waren es Rechen- oder Vorzeichenfehler, in einem Fall auch einseitiges Operieren. Warum aber jemand, der eine Aufgabe der Gruppe A richtig löste, bei der gleich strukturierten Aufgabe B keinen Ansatz zu einer Lösung fand, bleibt ein Rätsel.

Literatur

Keil, K.-A. (1976). Das Projekt Computerunterstützter Unterricht Augsburg. Kapitel 5 Untersuchungen und Einsatzerfahrungen (S. 566-593). Augsburg: Zentralstelle für Programmierten Unterricht. (Auszüge aus dem Projektbericht, graphische Darstellungen, für die in diesem Beitrag kein Platz ist, über bernhard.brockmann@web.de)