Klaus-Peter EICHLER, Elena KLIMOVA, Schwäbisch Gmünd

Erwerb allgemeiner mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe vom Fach aus

1. Problemlage und Zielsetzung

Ziel des Mathematikunterrichtes ist die Einheit von formaler und materialer Bildung. Bildungsstandards der KMK beschreiben die zu erwerbenden inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen. Laut der aktuellen PISA-Ergebnisse hat sich das Leistungsniveau in Deutschland zwar insgesamt verbessert, jedoch sind die Anteile der Spitzengruppen nicht in gleichem Maß gewachsen. Die Abbildung 1 zeigt die Stagnation in Bezug auf die Leistungsspitze.

Es ist altbekannt und bewährt, dass ein Hauptmittel zur Realisierung der Bildungsziele im Mathematikunterricht ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben ist (vgl. Weber 1987, Fanghänel 2000, Eichler 2010). Hinsichtlich des höchsten Kompetenzniveaus gibt es vergleichsweise wenig Forschungsbefunde, die aufzeigen, wie Kinder zu entsprechenden Leistungen geführt werden können. Ziel unserer Arbeit ist deshalb die Analyse, Charakterisierung, Konzeption und wissenschaftliche Begründung eines solchen Arbeitens mit Aufgaben, mit dem inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen auf höchster Niveaustufe entwickelt werden können.

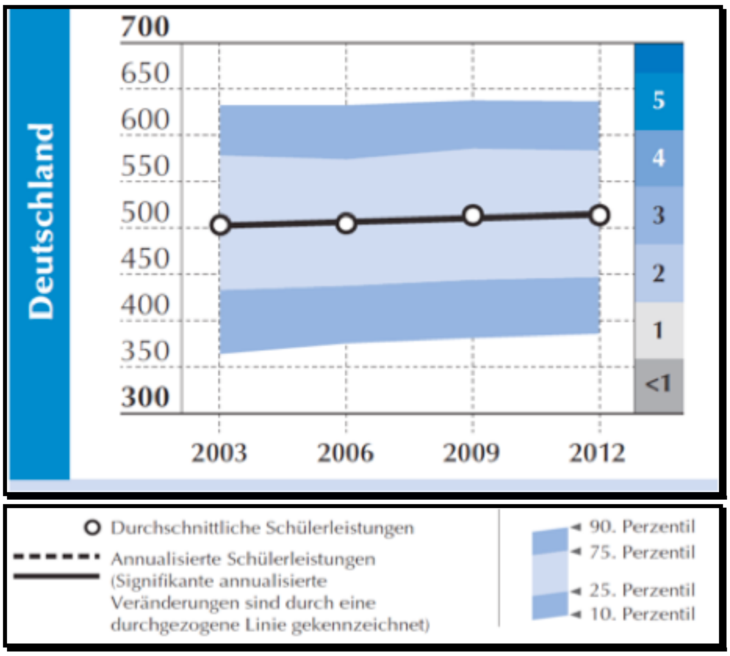


Abb. 1: PISA über die Jahre hinweg (OECD 2013, S. 446).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 325–328). Münster: WTM-Verlag

2. Analyse, Charakterisierung und Konzeption eines geeigneten Arbeitens mit Aufgaben & erste Befunde

Hinsichtlich der Tätigkeit der Lehrerin / der Lehrer wurden die Komponenten des Arbeitens mit Aufgaben folgendermaßen gestuft (vgl. Fanghänel 2000): Auswahl und Anordnung der Aufgaben, Stellen der Aufgaben, Ingangsetzen und ***Inganghalten*** der Aufgabenbearbeitung bis hin zur Rückbesinnung auf die Lösung und den Lösungsweg.

Ausgehend vom Ziel wurden Aufgaben ausgewählt:

- mit hohem fachlichen Anspruch und Komplexität, die zur Strategiefindung herausfordern (Anforderungsbereich III),
- zu welchen es mehrere Vorgehensweisen bzw. unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten gibt (Anforderungsbereich III),
- bei deren Bearbeitung Verallgemeinerungen hilfreich sind,
- die aus verschiedenen Bereichen der Mathematik stammen, einen Transfer und vernetztes Denken fordern (Anforderungsbereich III),
- bei welchen die Rückbesinnung auf den Lösungsweg fruchtbar ist, weil die Aufgabe mathematische Substanz hat,
- deren Lösungen nicht im Internet zu finden sind (Abb. 2).

Aufgabe 1 Gegeben sind die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ mit $a_1 = 2$ und $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Summe $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Aufgabe 2 Beweisen Sie die Ungleichung: $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

Aufgabe 3 Beweisen Sie: wenn die Flächeninhalte eines Quadrats und eines Dreiecks gleich sind, dann ist der Dreiecksumfang größer als der Umfang des Quadrats.

Aufgabe 4 Beweisen Sie, dass die Primzahl p den Zähler des Bruchs $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ teilt.

Aufgabe 5 Man berechnet die Quersumme der Zahl 7^{2013}, dann die Quersumme der errechneten Zahl, d.h. die Quersumme der Quersumme, und so weiter bis man eine einstellige Zahl bekommt. Welche Zahl bekommt man?

Aufgabe 6 Wenn in einem spitzwinkligen nicht gleichseitigen Dreieck durch eine Ecke die Höhe, durch eine andere Ecke die Seitenhalbierende und durch die letzte Ecke die Winkelhalbierende gezogen wurden und die Schnittpunkte dieser drei Strecken ein Dreieck bilden, dann ist dieses Dreieck nie gleichseitig. Beweisen Sie diese Aussage.

Abb. 2: Beispiel der Aufgaben.

Die Art der Aufgabenstellung und das Format der Aufgabenbearbeitung entscheiden darüber, ob Potenzen zum Argumentieren genutzt werden, ob Schüler_innen beim Lösen aus der Sache heraus mathematisch kommunizieren oder an mathematischen Darstellungen arbeiten müssen.

Ein Beispiel des Formats der Aufgabenstellung ist Matboj (vgl. Klimova 2012). Die Organisation und der Ablauf lassen sich kurz wie folgt beschreiben: Zwei Mannschaften bearbeiten im Team jeweils die gleichen Aufgaben. Abwechselnd trägt aus jeder Mannschaft ein Teilnehmer die Lösung der Aufgabe vor. Ein Teilnehmer der gegnerischen Mannschaft beurteilt als Kritiker die vorgetragene Lösung und den Lösungsweg. Aufgabe des Kritikers ist es, Fehler in der Lösung oder Lücken in der Begründung des Lösungswegs zu finden und dann zu schließen. Punkte gibt es sowohl für die Lösung als auch für die Kritik.

Worauf kommt es zum Beispiel beim Bearbeiten der Aufgabe 2 an? Die Aufgabe lösen kann jeder – mit dem Taschenrechner. Beim Matboj bestand die Herausforderung darin, diese Ungleichung ohne Rechner zu beweisen. Dazu mussten die Teilnehmer argumentieren (Abb. 3). Sie hatten die Möglichkeit, die Lösung ausgehend von der Betrachtung des allgemeinen Falls zu finden oder nach dem Lösen zu verallgemeinern (Abb. 4). Es geht grundsätzlich primär nicht um das *Lösen* dieser Aufgabe, sondern um den ***Erwerb von Fähigkeiten im Lösen*** von Aufgaben. Schüler_innen sollen dabei Arbeitsweisen des FACHES Mathematik erlernen und als solche erfahren.

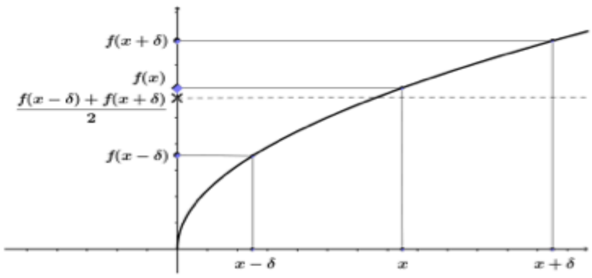
Beweis:
Wir bezeichnen: $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}$ und $b = \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}}$.
Dann gilt $a^3 + b^3 = 6$.
Da $b < a$ ist, gilt weiter $0 < (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow ab < a^2 - ab + b^2 \Leftrightarrow$
$ab(a+b) < (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 = 6 \Leftrightarrow 3ab(a+b) < 18 \Leftrightarrow$
$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) < 24 \Rightarrow a + b < 2\sqrt{3}.$

Abb. 3: Algebraische Lösung der Aufgabe.

Mit dem vorgeschlagenen Format des Arbeitens mit Aufgaben werden ein besonderer Anlass und eine Anleitung zur Rückbesinnung gegeben. Schüler_innen erfassen übertragungsfähige Arbeitsweisen, verallgemeinern und kommunizieren. Diese Phase der Rückbesinnung ist ein wesentlicher Ort der Entwicklung allgemeiner Kompetenzen.

Bisher wurden mathematische Aufgaben in großer Zahl gesichtet, aufbereitet und eingesetzt (entsprechend der o.g. Kriterien). Mathematisch anspruchsvolle Aufgaben sind zwingend notwendig, aber nicht hinreichend für den Erwerb prozessbezogener Kompetenzen. Entscheidend ist die Art und Weise, ***wie*** Lehrpersonen mit diesen Aufgaben arbeiten. Deshalb wurden Interviews mit 8 Lehrpersonen geführt. Alle 8 befürworteten Methoden wie Matboj und würden diese Methoden einsetzen.

Verallgemeinerung:



... Ist eine Funktion streng monoton steigend, wobei das Wachstum bei Zunahme des Arguments abnimmt (d.h. $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ im Definitionsbereich sind), dann ist das arithmetische Mittel von zwei beliebigen Werten der Funktion kleiner als der Wert der Funktion in der Mitte, d.h. $\forall x \in D(f)$ gilt

$$\frac{f(x-\delta)+f(x+\delta)}{2} < f(x)$$

Beweis:

$$f(x) - f(x-\delta) > f(x+\delta) - f(x) \qquad \text{für} \quad \forall x \in D(f), \quad \forall \delta > 0$$

Folgerung: Die Ausgangsungleichung $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$ ist somit ein Sonderfall der allgemein bewiesenen Ungleichung für

$$f(x) = \sqrt[3]{x},\ D(f) = (0, +\infty),\ x = 3 \text{ und } \delta = \sqrt{3}.$$

Abb. 4: Verallgemeinerung der Aufgabe.

3. Ausblick

Für die weitere Arbeit ist das Erfassen und Klassifizieren von Arbeitsweisen der Schüler_innen beim Bearbeiten ausgewählter Aufgaben und eine Längsschnittstudie zur Erfassung der Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen geplant. Hier sollen gezielt die von uns favorisierten Lernaktivitäten über mindestens ein Schuljahr hinweg eingesetzt werden.

Literatur

Fanghänel, G. (2000). Arbeiten mit Aufgaben – ein wesentliches Mittel zur Gestaltung eines modernen Mathematikunterrichts. *Mathematikunterricht gestalten*. Berlin: Paetec.

Eichler, K-P., Grassmann, M., Mirwald, E. & Nitsch, B. (2010). *Mathematikunterricht.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag.

Klimova, E. (2012). MatBoj-Wettbewerb als ein neuer fachspezifischer Wettbewerb in Mathematik zur Förderung begabter Schüler. *In Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, S. 449–452. Münster: WTM-Verlag.

OECD (2013), PISA 2012 Ergebnisse: *Was Schülerinnen und Schüler wissen und können (Band I): Schülerleistungen in Lesekompetenz, Mathematik und Naturwissenschaften.* W. Bertelsmann Verlag, Germany.

Weber, K. (1987). Ziel, Inhalt und Prozesskonzeption des Mathematikunterrichts nach den neuen Lehrplänen der Klassen 1 bis 3. *Unterstufe.* Berlin 34 (1987) Heft 4. S. 65 – 78.