Thomas GAWLICK, Hannover

Über Aufgaben-, Prozess- und Problemlösertypen bei K10

Probleme sind Aufgaben, in denen eine Barriere auftritt - das beschreiben wir theoretisch (Gawlick 2013) und empirisch (Gawlick & Begerow in diesem Band) durch Abgrenzung von *Routineaufgaben*: Bei letzteren verfügt der Bearbeiter in der ES (epistemische Struktur sensu Dörner) über kognitive Schemata, die die Heurismen der HS (die heuristische Struktur) zur Konstruktion eines Lösungsweges nutzen. Dem entsprechen durch Lösungsgraphen operationalisierte Bearbeitungsphasen (Gawlick 2013):

(AZI) Ausgangs- und Zielzustand der Aufgabe werden identifiziert.

(TOI) Mögliche Zwischenzustände und Operatoren werden identifiziert.

(PLE) Es wird ein Handlungsplan für die Kombination der Operatoren entworfen.

(DPL) Der Handlungsplan wird ausgeführt.

(KMD) Die Ausführung wird kontrolliert und der Handlungsplan ggf. modifiziert.

Bei diesen Bearbeitungsphasen sprechen wir von *Assimilation* (sensu Piaget). Ist eine Anpassung der Schemata oder der Aufgabe (!) nötig, handelt es sich um *Akkommodation* – erkennbar am Umbau des Lösungsgraphen.

Kann nicht assimiliert oder routinemäßig akkommodiert werden, tritt ein Problem auf - wir definieren also: Eine *Problemaufgabe* (für einen Löser) ist eine Aufgabe, bei deren Bearbeitung problemhafte Akkommodation oder Akquisition (Erwerb neuer Schemata) auftreten. Die Phasen dazu:

(POF) Fragen aus Polyas Tabelle zum „Ausdenken eines Plans

(SZA) Situations- und Zielanalyse (nach Duncker (1935))

(OPS) Operatorsynthese

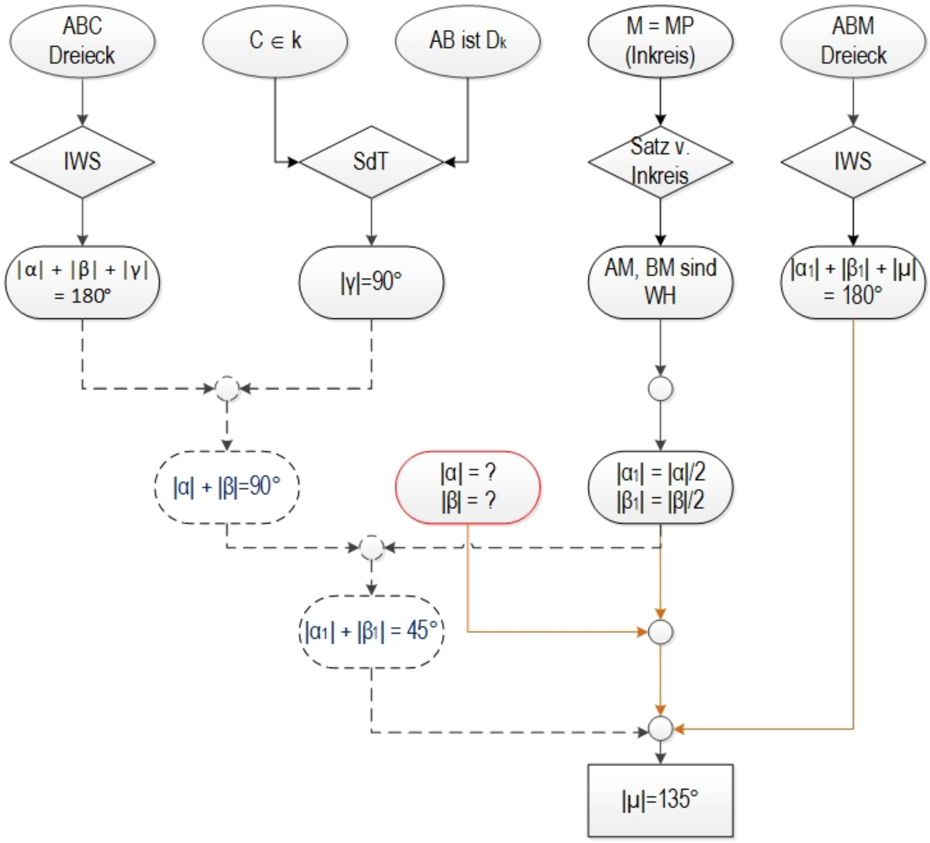
Die TIMSS-Aufgabe K10 ist ein *potentielles Interpolationsproblem*, d.h. nur in der Phase PLE werden Barrieren erwartet. Denn der Ausgangszustand ist explizit gegeben, der Zielzustand kann durch Messen bestimmt werden, die nötigen Operatoren wie SdT (Satz des Thales) und IWS (Innenwinkelsumme) sind bekannt. Warum aber dann die Barriere?

Tatsächlich zeigt sich, dass bei einem erheblichen Anteil der Probanden mangels be- oder erkannter Operatoren ein *Synthese*problem vorliegt. Dies analysieren wir hier nicht weiter – sondern die Frage, wo bei K10 die *Interpolations*barriere liegt: in einem einzelnen Schritt oder in der Art, wie Schritte zu verknüpfen sind? Wir wollen zeigen, dass ersteres der Fall ist. Dazu gilt es theoretisch und empirisch zu beschreiben, welche Heurismen routinemäßig verfügbar sind. Im Projekt HeuRekAP (Brockmann-Behnsen in diesem Band) wurden verschiedene Polya-Fragen trainiert. Die entsprechenden Heurismen lassen sich so beschreiben: GA (Gleiche Aufgabe), VA

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 403–406). Münster: WTM-Verlag

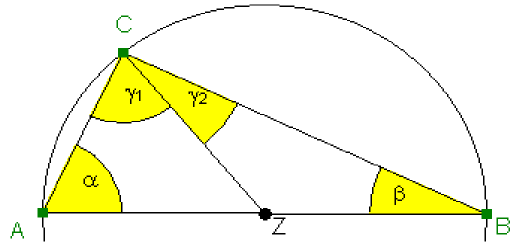
(Vorwärtsarbeiten), RA (Rückwärtsarbeiten), HA (Hilfsaufgabe), und als Meta-Programm TOTE (Test-Operation-Test-Exit, vgl. Dörner 1976). Dabei ist folgende Kombination denkbar, wenn GA keinen Erfolg bringt: TOTE ruft solange VA auf, bis alle erreichbaren Zwischenziele gefunden sind (wobei beim Test sinnvoller Weise geschaut wird, ob sich die Folgerungsketten zielführend entwickeln.) Falls das Ziel dabei nicht erreicht wird, wird der Heurismus gewechselt: Per RA wird versucht, die Lücke zu schließen. Misslingt auch das, erfolgt eine weitere Umorientierung: Es wird mit HA nach einer Hilfsaufgabe geschaut. Dieser letzte Schritt markiert auch den Beginn der problemhaften Akkommodation: „"Problemlösendes Denken erfolgt, um Lücken in einem Handlungsplan zu füllen, der nicht routinemäßig eingesetzt werden kann“ (Funke 2003, 25) – das wird an dieser Stelle erstmals erforderlich sein, während VA und RA noch routiniert ablaufen.

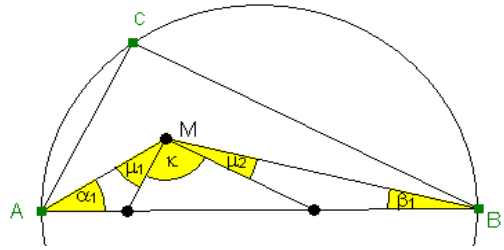
Bei K10 kann man mit VA die 4 „Säulen“ des Beweises aufbauen (Abb. s.u., schwarze Linien). Beim RA entsteht der Wunsch, das gesuchte μ aus α und β zu bestimmen (orangene Linien) – allerdings sind diese ja variabel, so dass dieser Plan nicht ausführbar ist – wir nennen dies die *α-β-Barriere*.



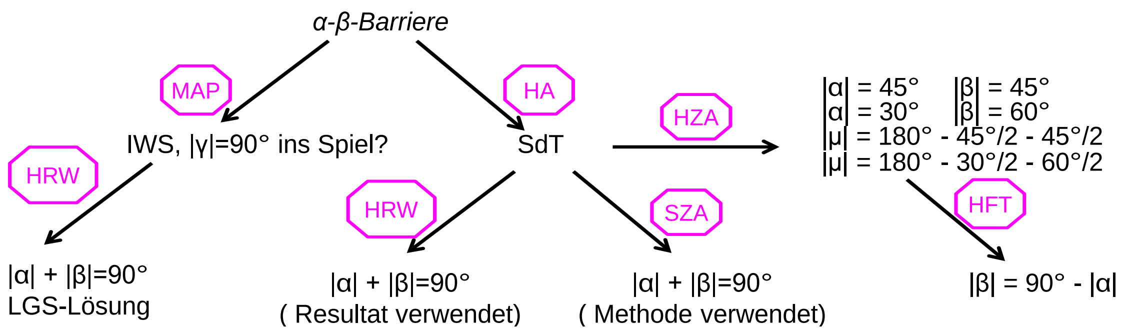
An dieser Stelle folgt in den untersuchten Prozessen häufig eine SZA, bei der die Lücke allerdings häufig nicht geschlossen wird. Möglich wäre dies über Polyas Frage „Hast Du die ganze Bedingung benutzt?“ (MAP), um |α|

+ |β| + |γ| = 180° und |γ|=90° ins Spiel zu bringen. Nötig ist allerdings noch der Heurismus Repräsentationswechsel (HRW), um darin keine Rechenausdrücke, sondern ein LGS zu erkennen. Routinemäßig führt das zu |α| + |β|=90° und weiter zur Zielerreichung (gestrichelte Linien). Diese routinemäßige Akkommodation kommt allerdings bei den untersuchten Neuntklässlern kaum vor – das macht diesen Schritt zum *Barriereschritt*! Stattdessen wechseln sie in POF und nutzen Heurismen zur Planentwicklung – z.B. wird HA aufgerufen: „Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen? [a)] Kannst Du ihr Resultat verwenden? [b)] Kannst Du ihre Methode verwenden? [c)] Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?“ (Polya 1949, 1) Wird dabei an Thales gedacht, führt a) wieder auf HRW (von |γ|=90° zu |α| + |β|=90°), doch bei b) endet die Routine: Hier muss der Beweisgang erinnert und akkommodiert werden – das erfordert problemlösendes Denken: So könnte z.B. versucht werden, die Hilfslinie CZ beizubehalten oder durch MZ zu ersetzen – doch beides führt nicht weiter. Eine SZA erhellt: die Funktion von CZ ist, den gesuchten Winkel in zwei Teilwinkel zu zerlegen. Bei K10 könnte man das gleiche so versuchen: $|\mu| = |\mu_1| + |\mu_2| + |\kappa|$, wobei μ_1, μ_2 zu α_1, β_1 kongruente Teilwinkel von μ sind und κ der Restwinkel. Dies führt auf |μ| = 90°+|κ|/2 und die Aufgabe, |κ| zu bestimmen, was auf verschiedene Weise möglich ist. Alternativ kann man auch zu einer „zugänglicheren Aufgabe“ übergehen (HZA), indem man |α| als gegeben annimmt und daraus |β|=90°- |α| ableitet (HFT).





Die Entstehung der o.a. Lösungswege im Wechselspiel von ES und HS veranschaulicht das „heuristische Galtonbrett“. Es zeigt damit zugleich Prozess- und mögliche Problemlösertypen auf, je nachdem welche Heurismenfolge gewohnheitsmäßig gebraucht bzw. was vernachlässigt wird. Das Prozessmodell ermöglicht dann eine differentielle Analyse, wie Problemlö-



ser sich auf diesem Brett bewegen und was dabei Erfolg verspricht.

Die Lösungsvariante, die Funktion von CZ zu übertragen, ist anscheinend in der Literatur noch nicht bekannt - wir verdanken die Idee einer Probandin, die sie aber leider nicht ausführt. Dies verdeutlicht, dass es nicht bloß auf die „richtigen" Heurismen ankommt, sondern auf die Art der Anwendung. Was zeichnet die erfolgreicheren Problemlöser dabei aus? Die bisher untersuchten K10-Prozesse lassen zweierlei vermuten:

a) Erfolgreiche wechseln Problemlöser beim Akkommodieren die Blickrichtung: Vom *schon Erreichten* (SZA) zum *noch Fehlenden* (POF).

b) Sie konkretisieren wenn nötig die Polya-Fragen (z.B. von „*Wie* kann ich das rausbekommen?" zu „*Mit welcher Formel* kann ich..?)"

Für Aussagen, welche Strategien die erfolgreicheren sind, ist es noch zu früh. Auch ist noch unklar, ob es sich mehr auszahlt, die Barriere zu umgehen als ihre Überwindung zu versuchen. Schon jetzt ist aber ein neuer Aspekt des Problemlösens deutlich: Viele Prozesse enthalten scheinbar unproduktive Abschnitte, was bisher als erfolgshinderlich galt („wild goose chase", vgl. Schoenfeld 1985) – wir beobachteten aber auch Möglichkeiten, sie als Inkubation produktiv für eine Illumination zu machen:

– *Distraktion* (sachfremde Abschweifung)
– *Rumination* (Hin- und Herwenden eines unbefriedigenden Ansatzes)

Evtl. liegt hier ein noch nicht beschriebener Typus erfolgreichen Problemlösens vor. Probandenäußerungen wie „hab ich immer erstmal die ganzen Formeln hingeschrieben damit ich schon mal einen ersten Überblick bekomme und hab mir dann überlegt wie ich weiter arbeiten kann" im stimulated recall deuten auf eine HS, die das VA zunächst in die Breite und dann erst in die Tiefe verfolgt – dies und das (u. U. nachteilige) Aufschieben des Planens können dazu beitragen, ein „Verzetteln" zu vermeiden.

Literatur

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, Stattgart: Kohlhammer.

Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin: Springer.

Funke, J. (2003). *Problemlösendes Denken.* Stuttgart: Kohlhammer.

Gawlick, Th. (2013): Problem - das Gegenteil von Routineaufgabe? Zur Konzeption von Problemlösen. *Beiträge zum Mathematikunterricht.*

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens.* Tübingen: Francke.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press.