Michael GAIDOSCHIK, Klagenfurt

„Hälfte von 90? Geht doch gar nicht!“ - Zu Defiziten im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems

Massive Defizite im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems sind eines der Hauptmerkmale sogenannter „Rechenschwächen“. Hier nur einige Andeutungen dazu, wie das eine mit dem anderen zusammenhängt:

Wie soll ein Kind *im Rechnen stark* werden; wie also soll es etwa im zweiten Schuljahr flexible oder doch zumindest sichere Strategien des halbschriftlichen Addierens und Subtrahierens mit zweistelligen Zahlen entwickeln, wenn ihm nicht klar geworden ist, dass die Ziffern dieser Zahlen unterschiedliche Bündelungseinheiten repräsentieren? Wenn es etwa 38 nicht als Zusammensetzung von 3 Zehnern und 8 Einern denkt, sondern als „Aneinanderkettung“ einer Drei und einer Acht („concatenated single-digit conception of multi-digit numbers“, vgl. Verschaffel u. a. 2007)?

Wie soll es auf dieser Basis einen „Zahlenraum“ aufbauen, also die in vielen Anwendungen nützliche Übersetzung von quantitativen Beziehungen (die sich nun einmal nur bei Einsicht ins Dezimalsystem erschließen) in räumliche Vorstellungen der „Nähe“ und „Ferne“ von zwei- und mehrstelligen Zahlen zu einander, des „Dazwischen“, „Genau in der Mitte“ usw.?

Wie soll es ohne Wissen um die *multiplikative Struktur* des Dezimalsystems (das Versetzen einer Ziffer um eine, zwei, drei … Stellen nach links verzehn-, verhundert-, vertausendfacht den repräsentierten Wert) die vielfältigen Erfahrungen mit „großen Zahlen“, die es wie jedes andere Kind im Laufe der Jahre in Alltag und Schule durchaus auch macht, so verarbeiten und zueinander in Beziehung setzen, dass daraus jenes *Wissen*snetz wachsen kann, welches vermutlich gemeint ist, wenn im Zusammenhang mit mehrstelligen Zahlen unscharf von „Größen*vorstellung*“ gesprochen wird?

Einsicht in die additive und multiplikative Struktur des Dezimalsystems sind also unverzichtbare Voraussetzungen für einen stabilen Aufbau von Wissen und Können im Inhaltsbereich „Zahlen und Operationen“. Woran aber liegt es, dass gerade diese Voraussetzungen von manchen Kindern nicht oder nicht in ausreichendem Maße erworben werden?

Aus der Sache heraus verständliche Schwierigkeiten

Zunächst plädiere ich für einen Perspektivenwechsel: Angesichts der gewaltigen Herausforderung, die die geniale Erfindung des dezimalen Stellenwertsystems Lernenden stellt, sollten wir nicht darüber erstaunt sein, wie schwierig es Kindern fallen kann, hier zu tragfähigen Einsichten zu

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 395–398). Münster: WTM-Verlag

gelangen. Es verdient umgekehrt Bewunderung, in wie kurzer Zeit und mit wie wenig erkennbaren Friktionen sich viele Kinder ein Notationssystem zu Eigen machen, für dessen Entwicklung die Menschheit Jahrhunderte benötigt hat. Die hartnäckigen Schwierigkeiten von Lehramtsstudierenden beim Verstehen nicht-dezimaler Stellenwertsysteme waren in den letzten Jahren wiederholt Thema in Sektionsvorträgen der GDM-Tagungen. So fremd unseren Studierenden der Umgang mit Sechser-Bündelungen erscheint, so fremd ist Kindern zwangsläufig zunächst das Zehnersystem.

Eine erste *Bekanntschaft* ergibt sich zwar lange vor Schuleintritt. Da wird auch einiges *prozedurales Wissen* erworben (Zahlwortreihe über zehn hinaus, Schreiben/Lesen zumindest einiger zweistelliger Zahlen…). Der Erwerb von grundlegendem *konzeptuellem Wissen* über das Zehnersystem bleibt aber eine Aufgabe für die ersten Schuljahre. Um nur einige der Hürden deutlich zu machen, die nun überwunden werden müssen:

- Die schon vertrauten Ziffern tauchen in neuer Bedeutung auf; dasselbe Zeichen kann innerhalb einer Zahl Unterschiedliches bezeichnen.
- Zehner sind aus Einern zusammengesetzt, zweistellige Zahlen aus Zehnerbündeln und nicht weiter gebündelten Einern. Das Problem vieler Kinder, denen der Einstieg in die Mathematik schwer fällt: Sie denken schon bei Zahlen kleiner zehn *nicht* an Zusammensetzungen, sondern identifizieren sie mehr oder weniger vollständig mit Rangplätzen innerhalb einer eingelernten Reihe von Wörtern. Acht ist nicht z.B. fünf und drei, sondern das, was nach sieben kommt. In der Verlängerung ist vierzehn das, was nach dreizehn kommt, aber nicht die Zusammensetzung aus zehn und vier, einem Zehner und vier Einern.
- Zehner und Einer müssen in Schrift und Wort *sorgfältig unterschieden* werden. Die räumliche Anordnung in der Ziffernschrift ist eine kulturelle Konvention, die Kinder erst lernen müssen; die Aneignung wird in der deutschen Sprache durch zahlreiche Irregularitäten erschwert, v.a. durch den Widersinn zuerst gesprochener, rechts zu notierender Einer und danach gesprochener, links zu notierender Zehner.
- Zehner und Einer müssen *in ihrem Zusammenhang* verstanden und verwendet werden. Die 4 in 45 muss ebenso als vier Zehner wie als vierzig Einer gedacht werden können, diese vierzig (etwa zur Lösung von 40 – 5) wenn nötig als drei Zehner und noch zehn Einzelne weiterverarbeitet werden, usw. usf.. Das zuvor angesprochene *Unterscheiden* von Zehnern und Einern genügt für viele Anwendungen, etwa das Addieren von zweistelligen Zahlen mit der (deshalb gerade bei Kindern mit Lernschwierigkeiten so beliebten) Strategie „Stellenwei-

se“ (zumindest bei Aufgaben ohne Zehnerüberschreitung). Aber schon das (deshalb für viele Kinder erst einmal unlösbare) titelgebende Halbieren von 90 gelingt nur, wenn in der 9 an der Zehnerstelle die Einer mitgedacht werden (z.B. als 80 + 10, 8 Z + 10 Einer).

Durch den Unterricht mitverursachte Schwierigkeiten

In meinem Vortrag auf dem LehrerInnentag der GDM-Tagung 2014, der diesem Beitrag zu Grunde liegt, war mir wichtig, auf drei Bereiche hinzuweisen, in denen eine meiner Wahrnehmung nach im deutschen Sprachraum verbreitete Unterrichtspraxis Lernschwierigkeiten im Bereich des Dezimalsystems provozieren und verstärken kann.

Da ist zum einen die Tradition sorgfältig gestaffelter „Zahlenräume“. Die erste *unterrichtliche* Beschäftigung mit mehr als einstelligen Zahlen erfolgt dieser Tradition gemäß für viele Kinder im engen Bereich der Zahlen 10 bis 20. Für das Erarbeiten von Einsicht in das Bündelungsprinzip ist diese Beschränkung wohl kontraproduktiv: Das Bündeln kann bei Betrachtung nur dieser Zahlen ja gar nicht als *Prinzip* in Erscheinung treten, es bleibt eine vereinzelte Veranstaltung. Aus kindlicher Perspektive ist nicht nachvollziehbar, warum die Gleichsetzung „10 Einer sind ein 1 Zehner“ im Bereich bis 20 bedeutsamer sein sollte als das Bündeln von 5 Einern zu einem Fünfer, von 8 zu einem Achter usw.. Die Aufgabe 16 – 10 erwies sich in einer Interviewstudie mit 139 Kindern am Ende des ersten Schuljahres als besonders schwierig; etwa 62 Prozent der Kinder konnten sie nur durch eine mühselige Zählstrategie oder gar nicht lösen (vgl. Gaidoschik 2010). Dass hier nur „ein Zehner weg“ gedacht werden müsste, war diesen Kindern nicht zugänglich; offenbar war „Zehner“ für sie noch keine wesentliche Kategorie. Sie alle hatten vor dem Interview aber monatelang im Zahlenraum bis 20 gerechnet; aber eben auch *nur* im Zahlenraum bis 20.

Zweitens: Die angesprochene Idiotie der deutschen Sprache, welche Kindern beim Lesen und Schreiben zweistelliger Zahlen einen Verstoß gegen genau *die* Richtungsorientierung zumutet, auf die wir sie in unserem Kulturkreis sonst jahrelang (und nicht immer erfolgreich) hin trimmen, ist Schulbüchern zumeist nicht mehr wert als eine Fußnote: „Merke: Man spricht die Einer zuerst!“ Dabei wäre es ein Leichtes, diese für viele Kinder nun einmal beträchtliche Hürde ein wenig nach hinten zu rücken. Wenn Bündelungs- und Positionsprinzip einmal geklärt sind, lassen sich die Tücken der deutschen Sprache wohl eher bewältigen. Warum also geben wir uns nicht anfangs damit zufrieden, dass Kinder, die sich über Bündelungshandlungen ein erstes Verständnis von Zehnern noch erarbeiten müssen und gerade erst lernen, dass auch die Position einer Ziffer Bedeutungsgehalt hat, etwa 34 sprachlich als „drei Zehner, vier Einer", dann „dreißig und vier" festhalten? Das wäre ja auch für die Kinder förderlich, die auf prozeduraler Ebene bereits wissen, dass 34 üblicherweise „vierunddreißig" heißt!

Drittens und in diesem begrenzten Rahmen letztens: Es besteht in unserer Community meiner Wahrnehmung nach Einigkeit darüber, dass „das von Dienes in den 60-er Jahren propagierte didaktische Prinzip [...] der Variation der Veranschaulichungsmittel […] im Lichte neuerer Erkenntnisse relativiert zu betrachten" ist (Krauthausen & Scherer 2007, S. 261). Aus guten Gründen: Jedes Veranschaulichungsmittel ist zuallererst *Lernstoff*, muss in seiner Struktur verstanden werden, um dann allenfalls zum *Mittel* für eine Vertiefung und Erweiterung von Verstehen und Können zu werden. Dennoch folgen in gängigen Schulbüchern bei der Erarbeitung des Hunderterraums in raschem Wechsel Veranschaulichungsmittel von gänzlich unterschiedlicher Struktur: Zehnerbündel und Einer werden auf der nächsten Doppelseite abgelöst von Hunderterfeld und Hundertertafel, die wiederum Platz machen für Hunderterreihe und Zahlenstrahl. So soll dann ein Kind etwa auf einer Doppelseite links oben ein Teilquadrat des Hunderter*feldes* als einen Einer, je zehn davon als einen Zehner denken; rechts daneben dagegen, auf der Hunderter*tafel,* ein solches Teilquadrat als 34, ein anderes als 70 usw.. Dazu Lorenz (2000, S. 21): „Materialvielfalt ist eher ein Ausdruck von Hilflosigkeit, bestenfalls einer theoretischen Hoffnung."

Um nicht weiter vergebens hoffen zu müssen, plädiere ich dafür, Materialien für das Dezimalsystem nur auf Basis einer sorgfältigen stoffdidaktischen Analyse einzuführen. Die leitende Überlegung müsste sein: Was könnten Kinder, sofern sie die Struktur des Materials verstanden haben, damit über das Zehnersystem lernen, was sie mit anderem Material nicht mindestens ebenso gut lernen können? So manches Material – etwa die Hundertertafel – würde dann zwar nicht aus den Schulbüchern verbannt werden müssen, aber zu einem wesentlich späteren Zeitpunkt (und mit klarer definierter didaktischer Zielsetzung) als bisher zum Einsatz kommen...

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht*. Frankfurt/Main: Peter Lang.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg – Berlin: Spektrum, 3. Auflage.

Lorenz, J.-H. (2000). Aus Fehlern wird man... Irrtümer in der Mathematikdidaktik des 20. Jahrhunderts. In: *Grundschule*, H. 1., S. 19-22.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In: Lester, F. K. Jr. (Ed.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 1, Charlotte, NC: NCTM, S. 557-628.