

## Analyse der Graphen von Lösungen der TIMSS-Aufgabe K10

Mathematisches Problemlösen ist infolge des mittelmäßigen Abschneidens deutscher Schülerinnen und Schüler bei Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA als Prozesskompetenz in den hiesigen Curricula fest verankert. Problemlösen bedeutet, einen Weg im Zustandsraum der Aufgabe vom Anfangs- zum Zielzustand zu finden. Bei der Analyse von Schülerlösungen kommt es daher nicht nur auf die Ergebnisse an: Reiss et al. (2000) zeigten, dass bei der TIMSS-Aufgabe K10 das nötige Faktenwissen zwar vorhanden war, es aber nicht zu Argumentationssträngen verknüpft werden konnte. Auf Grundlage von Polya (1919) und König (1992) haben wir daher den *Lösungsgraphen* entwickelt, mit dem Problembearbeitungen diesbezüglich ausgewertet werden können. Seine Knoten sind die Zwischenziele (Ovale) und Hilfsmittel (Rauten) des Lösungsweges. Die Kanten geben an, inwieweit die Elemente von den SuS verknüpft wurden.

Per Qualitativer Inhaltsanalyse wurde anschließend ein Kategoriensystem entwickelt und ein Kodiermanual erstellt, das als Grundlage für die Kodierung der 120 Schülerbearbeitungen (vgl. Sektionstext) diente. Ein entscheidender Vorteil dieses Systems ist, dass nun damit auch Irr- und Umwege sowie Auslassungen der SuS dargestellt werden können.

Die Auswertung ergab, dass 90% der untersuchten SuS denselben Weg wählten. Dieser *Standard-Lösungsweg* kann anhand einer Schülerlösung in Abb. 1 nachvollzogen werden. Diese Lösungsgraphen konnten daher normiert werden, indem die Elemente ei-

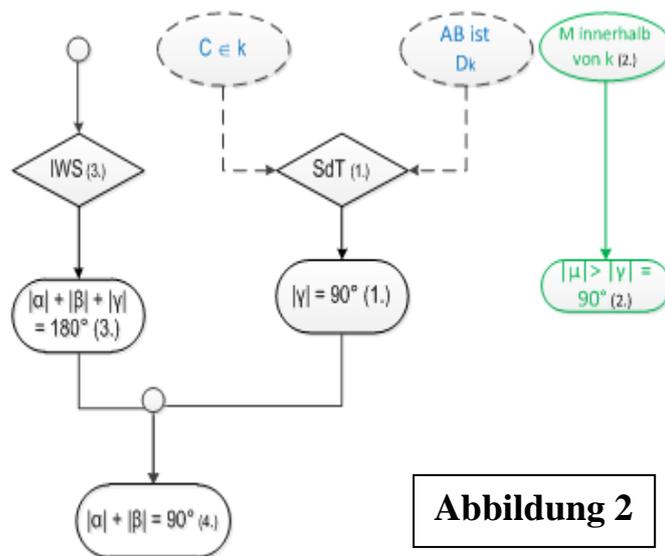
Beweisschritt / Rechnung	Begründung
① $ v  = 90^\circ$	Satz des Thales
② $ s_1  +  v  = 90^\circ$	M liegt innerhalb von k
③ $ a_1  +  b_1  +  v  = 180^\circ$	1WS
④ $ a_1  +  b_1  = 90^\circ$	siehe 1, 3
⑤ d, f und e sind Winkelhalbierende	gehen durch M und k <sub>2</sub> berührt die Seiten des Dreiecks ABC
⑥ $ a_2  +  b_2  +  s_1  = 180^\circ$	1WS
⑦ $ a_2  +  b_2  = 45^\circ$	siehe 5, 4
⑧ $180^\circ -  a_2  -  b_2  =  s_1  = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$	1WS, siehe 7
⑨ $ s_1  = 135^\circ$	

**Abbildung 1**

ner der Kategorien (Richtig, Fehlend, Falsch, Zusätzlich und Zusammenhanglos zum Standardweg) zugeordnet wurden, s. Ausschnitt in Abb. 2. Bei zufällig ausgewählten 20% betrug die Interraterreliabilität 89,4%. Ab-

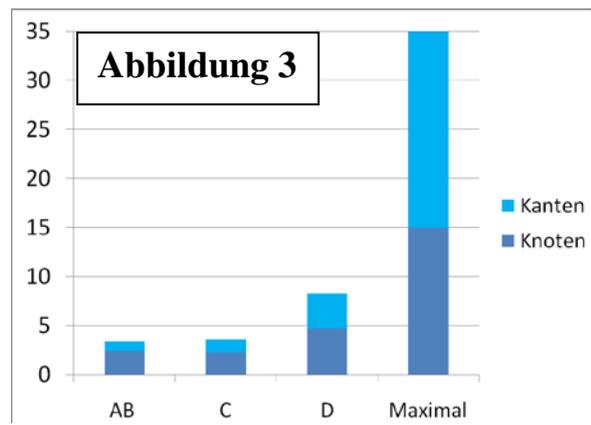
schließlich wurden die erstellten Graphen mit der Anzahl der richtigen Elemente bewertet. Die bewerteten Graphen werden nachfolgend analysiert.

Die durchschnittlichen Punktzahlen, die in den Versuchsgruppen C und D bzw. den Kontrollgruppen A und B erzielt wurden, können Abb. 3 entnommen werden. In dieser Grafik



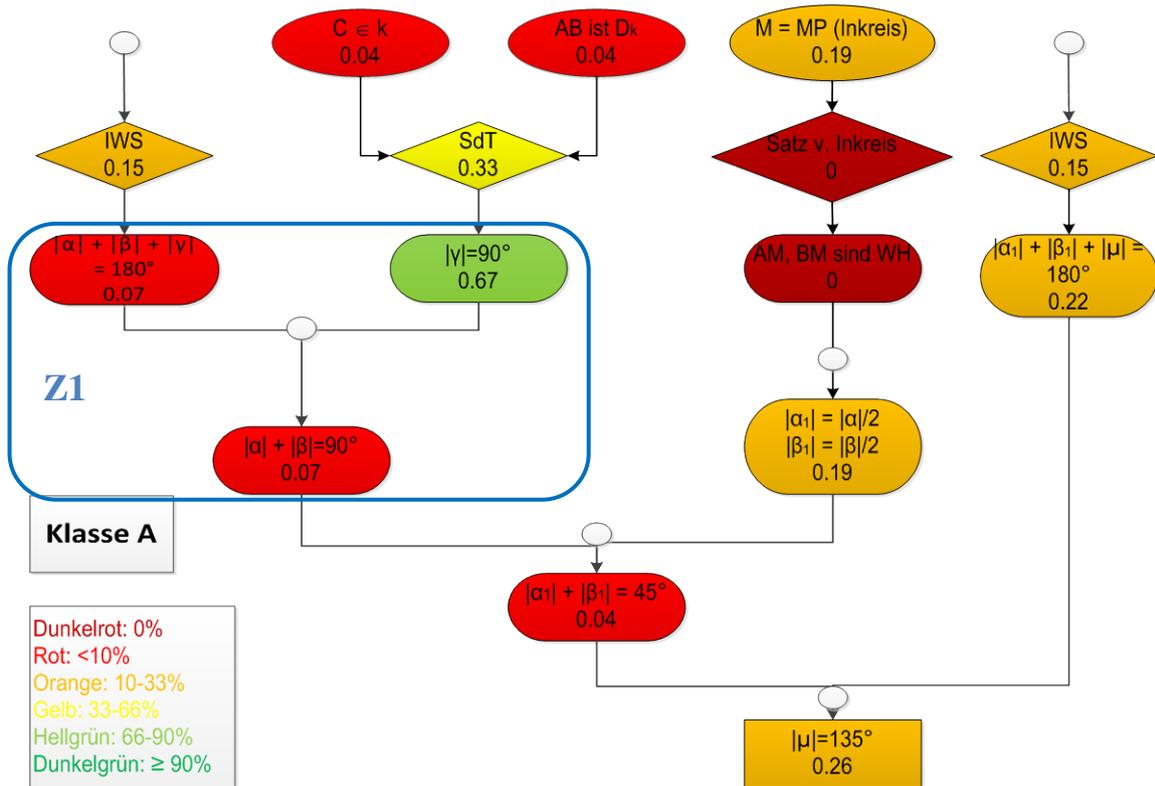
**Abbildung 2**

sind die Knoten und Kanten getrennt voneinander dargestellt, um nicht nur eine Aussage über die Punktzahl treffen zu können, sondern auch über die Fähigkeit, Knoten geeignet zu verknüpfen. Zunächst einmal fällt auf, dass der prozentual erreichte Wert der Schülerinnen und Schüler der Studie im Vergleich zur maximalen Punktzahl relativ gering ist. Es wird aber deutlich, dass die Klasse D mit dem expliziten Training (ET) im Mittel eine höhere Punktzahl erzielen konnte, als die Vergleichsklassen. Die Klasse C mit implizitem Training (IT) liegt hingegen nur knapp über den Vergleichsklassen. Da aufgrund vergleichbarer Vornoten davon ausgegangen werden kann, dass der Leistungsstand in den vier Klassen vor Trainingsbeginn auf einem ähnlichen Niveau war, kann insbesondere in der ET-Klasse von einem Trainingserfolg gesprochen werden. In beiden Treatmentklassen ist der relative Anteil der angegebenen Verknüpfungen deutlich größer. Bzgl. der Fähigkeit Begründungen angeben und argumentativ verknüpfen zu können, schneidet also auch die IT-besser ab.

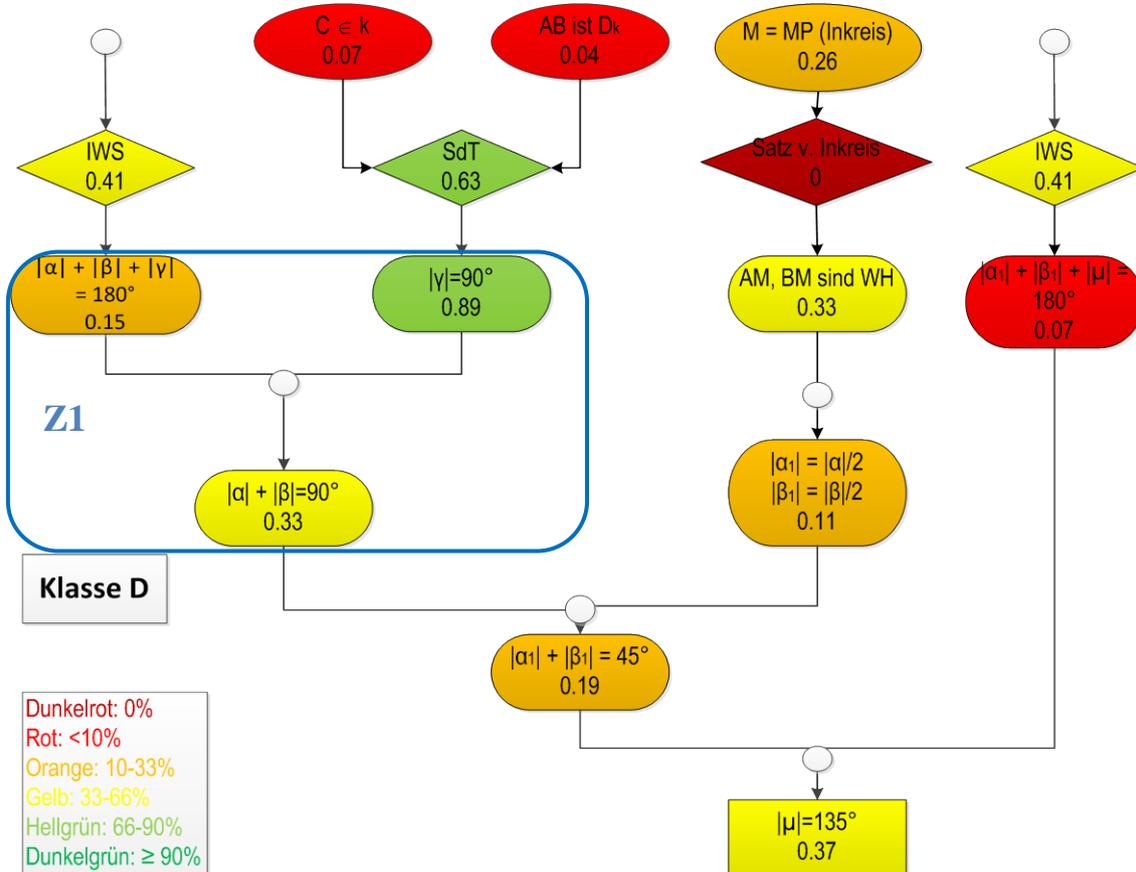


Klasse	Notenschnitt Klasse 7	Punkte K10
A	2,61	4,06
B	2,56	2,31
C	2,90	3,12
D	2,44	7,20
Durchschnitt	2,63	4,18

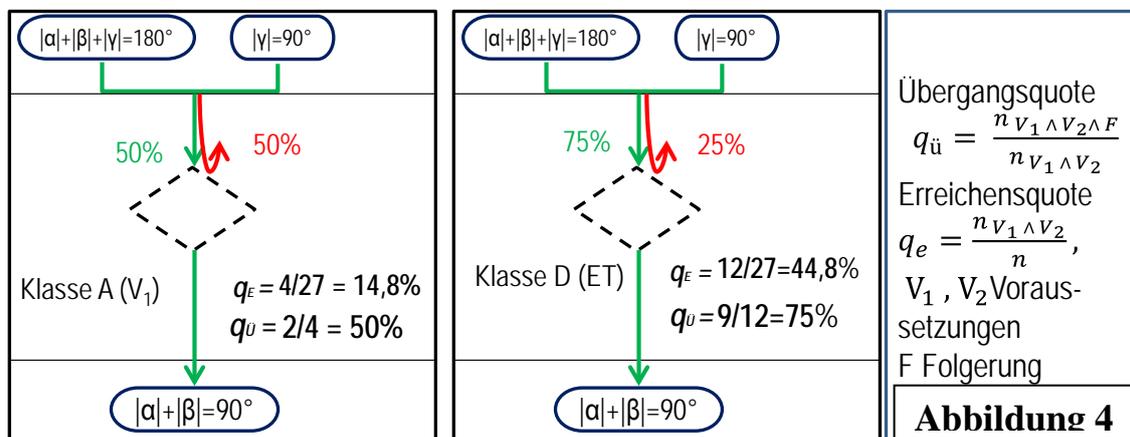
Ein Vergleich der Profilklassen A und D zeigt, dass in der ET-Klasse fast alle Elemente des Lösungswegs mit höherer Wahrscheinlichkeit genannt werden als in der Kontrollgruppe.



Insbesondere bei den Hilfsmitteln und den *lokalen Zusammenhängen* (Argumente verknüpfende Schritte: 4,7,9 in Abb. 1) ist dies deutlich:



Wir haben bei diesen Schritten untersucht, welcher Anteil der Probanden die Voraussetzungen erfüllt (*Erreichensquote*  $q_E$ ) und welcher Anteil dieser SuS daraufhin auch den Schritt erfolgreich durchführt ( $q_U$ ). Empirisch liegt die Barriere liegt offenbar in Z1 (Schritt 4 in Abb. 1), wo viele Schüler nicht weiter kommen, obwohl beide Voraussetzungen genannt sind. Bei den anderen lokalen Zusammenhängen ist dies nicht der Fall. Auch theoretisch wird hier eine Barriere erwartet: Da es nach der Liste in Polya (1949, S.1f) keinen Heurismus gibt, mit dem das Zwischenziel  $|\alpha| + |\beta|=90^\circ$  erreicht werden könnte, wird sie auch als  $\alpha$ - $\beta$ -Barriere bezeichnet. Abb. 4 zeigt zwei Trainingserfolge: In der Versuchsklasse konnten mehr Schüler die Barriere erreichen, also vor der Barriere mehr Teilziele und Operatoren identifizieren. Zudem überwand ein prozentual größerer Anteil dieser SuS im Anschluss auch tatsächlich die Barriere, konnte also die Voraussetzungen beim Barriereschritt besser verknüpfen.



Bei den anderen lokalen Zusammenhängen, die bei der K10-Aufgabe hergestellt werden müssen, lag der Wert derjenigen, die sowohl beide Voraussetzung erreicht haben, aber dennoch scheiterten, deutlich niedriger (<17%).

## Literatur

- Kelle, U., Kluge, S. (1999). *Vom Einzelfall zum Typus*. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. Opladen: Leske + Budrich.
- König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. In: *Der Mathematikunterricht*, 38 (3). S. 24-38.
- Pólya, G. (1919). Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. *Schweizerische pädagogische Zeitschrift*, 29(2), 53–63.
- Polya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.
- Reiss, K., Thomas, J. (2000): Wissenschaftliches Denken beim Beweisen in der Geometrie. In: *mathematica didactica*, 23 (1). S. 96-112.