Tobias HOCK, Aachen

Axiomatik in der Schule: ein didaktisches Himmelfahrts-kommando? Ein genetischer Zugang zu Kolmogoroff

„*Of the many odd and various things we believe, few are believed more confidently than the truths of simple mathematics. When asked for an example of a thoroughly dependable fact, many will turn from common sense – 'after all, they used to think humans could'nt fly' – from science – 'the sun has risen every day so far, but it might fail us tomorrow' – to the security of arithmetic – 'but 2 plus 2 is surely 4'.*" (Maddy 1990, S. 1)

Die Mathematik gilt als Musterbeispiel für logische Stringenz und lückenlose Beweisführung. Mathematische Sätze haben, sobald sie einmal bewiesen sind, den Ruf unumstößlicher Wahrheiten, an denen niemand mehr zweifeln kann. Aus fachlicher Sicht führt jede mathematisch-logische Argumentationskette irgendwann zu Aussagen, die in einer mathematischen Theorie nicht weiter bewiesen werden (können), den sogenannten Axiomen. Von ihnen ausgehend stellt sich die Mathematik als eine deduktive Wissenschaft dar, die allein auf Grundlage der Axiome mit logischen Schlüssen die Richtigkeit ihrer Aussagen sichert.

Den Ausführungen in diesem Artikel liegt die Prämisse zu Grunde, dass das axiomatische Arbeiten „ein zu wichtiger Bestandteil des mathematischen Denkens [ist], als daß wir es den Schülern vorenthalten dürften" (Lehmann 1979, S. 120). Es ist nach Ansicht des Autors heutzutage durchaus noch möglich, in sinnvoller Weise Axiomatik an der Schule zu betreiben. Zu diesem Zweck wurde eine Unterrichtsreihe zu Andrei Kolmogoroffs Axiomen der Wahrscheinlichkeitsrechnung für Zusatzkurse der Sekundarstufe II entwickelt, die in diesem Artikel vorgestellt wird. Ferner werden erste Ergebnisse einer qualitativen empirischen Pilotstudie über Schülervorstellungen zu diesem Thema präsentiert.

1. Fachlicher und historischer Hintergrund

Aus fachlicher und historischer Sicht ist es wichtig, zwischen der klassischen und der modernen Sichtweise auf Axiomensysteme zu unterscheiden (vgl. van der Waerden 1967). Prominentestes Beispiel für die klassische Axiomatik ist Euklids *Die Elemente*, der moderne Standpunkt ist vor allem durch David Hilberts *Grundlagen der Geometrie* repräsentiert. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass bis ins 20. Jahrhundert Axiome (und damit auch die daraus abgeleiteten Sätze) als wahre Aussagen über (wohlbekannte) Objekte der Anschauung angesehen wurden, wohingegen seit Hilbert ontologische Fragen aus der mathematischen Betrachtung ausge-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 539–542). Münster: WTM-Verlag

schlossen werden: Mathematische Theorien sind formale Denksysteme über abstrakte, durch die Axiome implizit definierte Objekte.

2. Didaktische Perspektiven

Als Reaktion (unter anderem) auf die von der Bourbaki-Gruppe vorangetriebene Strukturmathematik entstanden unter dem Schlagwort „New Math“ in den 60er und 70er Jahren – zuerst in den USA und später in Europa – umfangreiche Reformbestrebungen, um die Schulmathematik stärker fachsystematisch auszurichten. Der Fokus auf Mengentheorie und abstrakte algebraische Strukturen führte jedoch zu heftigen Gegenreaktionen und letztendlich zum schnellen Scheitern der Bewegung.

Im Hinblick auf die fachsystematische Ausrichtung von Schulunterricht hat Freudenthal den Begriff „anti-didaktische Inversion“ geprägt: Die Mathematik wird als deduktiv geordnetes *Produkt* präsentiert und „die Gedanken, die uns zum Resultat führten, verheimlichen wir“ (1973, S. 101). Sinnvoller ist es seiner Meinung nach, wenn sich Schüler mit dem *Prozess* des Axiomatisierens beschäftigen, was das anfängliche „lokale Ordnen“ weniger Sätze und schlussendlich das „Lösen der ontologischen Bindung“ umfasst (vgl. Freudenthal 1973, S. 417). Dies steht im Einklang mit dem genetischem Prinzip im Sinne Wittmanns: Bei einer Ausrichtung des Unterrichts „an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik“ (2009, S. 130) sollten Axiomensysteme erst „als *Endstufe* des genetischen Prozesses“ behandelt werden (2009, S. 147).

3. Unterrichtsreihe: Kolmogoroff-Axiome

Als Themenbereich für eine erste Konfrontation von Schülern mit axiomatischen Denkweisen wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung gewählt, da das Axiomensystem von Kolmogoroff „zu dem Einfachsten gehört, das es in der Mathematik gibt“ (Freudenthal 1973, S. 528). Die Unterrichtsreihe wurde in je drei Doppelstunden im Rahmen zweier Projektkurse in der gymnasialen Oberstufe erprobt. Anknüpfend an die Vorerfahrungen der Schüler aus dem Stochastikunterricht wurden der Laplace’sche und frequentistische Ansatz wiederholt, sowie deren Grenzen bei der Theoriebildung aufgezeigt. Nach einer Einführung in die wesentlichen Aspekte der mengentheoretischen Modellierung von Zufallsexperimenten wurden neun grundlegende Regeln aufgelistet, die innerhalb einer Theorie der Wahrscheinlichkeit Gültigkeit besitzen sollten. Schließlich erkundeten die Schüler die logischen Zusammenhänge zwischen den Regeln (lokales Ordnen) und hielten ihre Ergebnisse in umseitiger Tabelle fest. Dabei gab es durchaus Spielraum für unterschiedliche Beweiswege; das folgende Beispiel stellt ein Ergebnis dar, auf das sich die Schüler in einem der beiden Kurse als gemeinsame Grundlage einigten:

	↓ Regel ... kann man folgern aus →	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$P(\Omega) = 1$	■	×					×		
2	$P(\emptyset) = 0$	×	■					×		
3	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$			■	×					
4	$P(A \uplus B) = P(A) + P(B)$			×	■					
5	$P(A) \geq 0$	×			×	■	×			
6	$P(A) \leq 1$	×			×	×	■			
7	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	×			×			■		
8	$A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$			×					■	
9	$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$				×	×				■

In der Abschlussdiskussion wurden bereits einige logische Probleme und Auffälligkeiten benannt: „Für Regel 1 braucht man Regel 2 und für Regel 2 braucht man wieder Regel 1“. „Die Regeln 1 und 4 werden besonders häufig zur Begründung herangezogen“. Solche Entdeckungen können als Ausgangspunkt für eine intensivere Auseinandersetzung mit der Notwendigkeit von Axiomen dienen.

4. Interviewstudie

Im Anschluss an die soeben beschriebene Unterrichtsreihe wurden mit insgesamt sieben Schülern Leitfadeninterviews (Dauer je 25-35 Minuten) durchgeführt mit dem Ziel, mehr über mentale Vorstellungen zum Thema Axiomatik zu erfahren und mögliche Fragestellungen für weitere kognitionswissenschaftliche Untersuchungen zu entwickeln. Dabei wurden die Grundannahmen qualitativer Forschung, insbesondere der Grounded Theory (siehe Glaser, Strauss 2005), zugrunde gelegt.

Unter anderem wurden die Schüler in den Interviews erstmalig mit Kolmogoroffs Ansatz konfrontiert, drei Aussagen „einfach“ unbewiesen als Axiome an den Anfang seiner Theorie zu setzen (nämlich 1, 4 und 5) und die Gültigkeit der restlichen Aussagen zu deduzieren. Besonders auf die Frage, was ihre Meinung zu diesem Ansatz sei, gaben die Schüler interessante Antworten:

> S1: „Kann man nichts gegen sagen, es ist ja für jeden einleuchtend erstmal, dass diese Regeln so stimmen.“
>
> S2: „[…] es gibt ja Aussagen, die sind letztendlich … nicht zu beweisen […] diese sieht man halt als Tatsachen an (Interviewer: *Okay*) und deswegen ähem ja finde ich das eigentlich okay.“

Für die meisten der sieben Schüler (wie S1) ist die Wahl von Axiomen durch unmittelbare Evidenz gerechtfertigt und mathematischen Aussagen kann damit ein (wie auch immer gearteter) Wahrheitsgehalt zugesprochen werden. S2 argumentiert dagegen auffällig weniger mit Worten wie ‚anschaulich klar', ‚einleuchtend', ‚stimmt' oder ‚ergibt Sinn'. Zwar verzichtete in den Interviews kein Schüler bei der Bewertung der axiomatischen Methode komplett auf evidenzbasierte Argumente (S2 spricht auch von ‚Tatsachen'), allerdings waren die Unterschiede in Wortwahl und Begründungsmustern zum Teil enorm. Eine zweite Interviewstudie soll sich deshalb speziell auf die Rolle der Wahrheit in der axiomatischen Mathematik konzentrieren, zumal es in diesem Bereich nach Kenntnis des Autors bisher keine kognitionswissenschaftlichen Untersuchungen mit Schülern gibt.

5. Fazit und Ausblick

Die Erprobungen in dem Projektkurs zeigen, dass sich Schüler durchaus auf das Thema Axiomatik einlassen und dies in natürlicher Weise zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit der Notwendigkeit von Axiomen führen kann. Eine Orientierung am fachlichen Vorwissen der Schüler sowie am Prozess des lokalen Ordnens und Axiomatisierens trägt dabei zu einem authentischen Bild der Mathematik bei. Eine didaktisch unmotivierte und rein deduktive Arbeit mit vorgegebenen Axiomensystemen könnte dagegen nach Meinung des Autors zum Scheitern von NewMath beigetragen haben.

Die Auswertung der Einzelinterviews lässt zudem weitere kognitionswissenschaftliche Untersuchungen von Schülervorstellungen zum ontologischen Status von Axiomen (Wahrheit vs. Beweisbarkeit) sowie zur Rechtfertigung bestimmter Axiome sehr vielversprechend erscheinen. Zu diesem Zweck ist derzeit eine zweite Lerneinheit mit anschließender Interviewstudie zum Thema „Sphärische Geometrie" in Planung.

Literatur

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. 2 Bd. Stuttgart: Klett.

Glaser, B. G., Strauss, A.L. (2005). *Grounded Theory: Strategien qualitativer Forschung*. 2. Aufl. Bern: Huber.

Lehmann, W. (1979). Die Betonung konstruktiver Elemente beim axiomatischen Arbeiten. *Didaktik der Mathematik, 2,* 120–126.

Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

van der Waerden, B. L. (1967). Klassische und moderne Axiomatik. *Elemente der Mathematik, 22,* 1–4.

Wittmann, E. Ch. (2009). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.