

Thomas JANSSEN, Bremen

Lernen als Entwicklung der mathematischen Sinne: Ein Beispiel aus der Algebra

Wer die Algebra beherrscht, hat ein Gespür dafür, wie mit ihren Strukturen umzugehen ist. Er oder sie weiß, wie man eine Gleichung löst, was ein Funktionsterm aussagt oder wie sich ein quadratischer Ausdruck umformen lässt. Gerade wenn die Algebra für Probleme sorgt, hört man naturalisierende Äußerungen wie: „Dafür fehlt mir der Sinn“. Dass dieser Sinn sich (weiter-)entwickeln kann, wird damit implizit verneint.

1. Stand der Forschung und Fragestellung

Auch die Forschung zum algebraischen Struktursinn konzentriert sich bislang auf die Feststellung und Beschreibung aktueller Fähigkeiten und Defizite. Malle (1993) sieht die Vermittlung von *Strukturierungsfähigkeit* als ein zentrales Ziel des Algebraunterrichts in der Mittelstufe an, verzichtet jedoch auf eine theoretische Fassung des Begriffs. Linchevski und Livneh (1999) rufen mit ähnlichen Ausführungen zu einer Beschäftigung mit dem „algebraic structure sense“ auf. Dem kommt Hoch (2007) nach, die ihn in ihrer Dissertation als gestufte Kompetenz beschreibt. In Tests weist sie nach, dass diese Kompetenz bei den untersuchten Elftklässlern weit weniger ausgebildet sind als man hoffen würde, aber auch, dass durch individuelle Förderung Fortschritte zu erreichen sind. Hochs Beschreibung der zugrundeliegenden Lernprozesse ist allerdings für eine Umsetzung im Klassenverband kaum hilfreich. Auch Rüede (2012) bewegt sich im Kontext des algebraischen Struktursinns. Er wendet sich den im Umgang mit algebraischen Strukturen ablaufenden Prozessen zu. Dabei wird auch untersucht, welche Maßnahmen das individuelle Strukturieren fördern. Der Prozess der Ausbildung algebraischen Struktursinns an sich bleibt aber weiterhin unterbelichtet. Daher soll nun der Frage nachgegangen werden, wie algebraischer Struktursinn *in seiner Entwicklung* verstanden und beschrieben werden kann und wie sich dieser Lernprozess im Klassenunterricht realisiert.

2. Neue Perspektiven durch Theorievernetzung

Als vielversprechende theoretische Ansätze bei diesem Vorhaben wurden das SVSt-Modell (Bikner-Ahsbahr, 2005) und die Theory of Knowledge Objectification (im Folgenden TKO, Radford, 2013) ausgewählt. Das Vorgehen bei der Theorievernetzung (detailliert dargestellt in Janßen & Bikner-Ahsbahr, 2013) bestand aus zwei Schritten. Zunächst wurden die beiden Theorien verglichen, dann wurden sie basierend auf einem kleinen Datensatz kombiniert.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 575–578).
Münster: WTM-Verlag

Der Vergleich ergab, dass die zentralen Stärken des SVSt-Modells in seinem offenen Strukturbegriff sowie in der starken Einbindung ins konkret Soziale liegen. Das SVSt-Modell nimmt Struktursehen als die zentrale Handlung der kollektiven Wissenskonstruktion im Klassenraum an. Als mathematische Strukturen werden dabei „Regelmäßigkeiten, Gesetzmäßigkeiten, musterhafte Lösungen“ (Bikner-Ahsbahr, 2005, S. 202) verstanden. Die Stärke der TKO liegt in der vorgenommenen Eingrenzung der Lerninhalte als die kulturell etablierte Mathematik sowie in ihrer Perspektive auf die langfristige individuelle Entwicklung der Schülerinnen und Schüler. Sie nimmt an, dass durch das Erkennen der kulturellen Tätigkeit (bspw. das Lösen linearer Gleichungen) zugrundeliegenden Tätigkeitsmotivs einerseits diese Tätigkeit erlernt wird (Objectification), sich andererseits gleichzeitig die individuelle Persönlichkeit entwickelt (Subjectification).

In der Kombination der beiden Ansätze ergibt sich ein theoretisches Modell, das den Erwerb algebraischen Struktursinns durch Objectification/Subjectification (im Sinne der TKO) annimmt. Diese werden als Spezialfälle des Struktursehens (im SVSt-Modell) interpretiert.

3. Methodisches Vorgehen

Die Datengrundlage wurde in einer Designstudie in einer 8. Klasse einer Bremer Oberschule gewonnen. In drei Unterrichtseinheiten zu Themen der elementaren Algebra (lineare Gleichungen, lineare Funktionen, Umformen quadratischer Terme) wurden in Zusammenarbeit mit der Lehrkraft Wege gesucht, algebraischen Struktursinn auszubilden. Dabei wurde insbesondere der Arbeitsprozess zweier Schülerpaare videographiert, um die individuellen und gemeinsamen Lernhandlungen beobachten zu können.

Die Unterrichtseinheiten werden getrennt analysiert, da zunächst nicht von einem Strukturen übergreifenden Struktursinn ausgegangen werden kann. In diesem Beitrag werden Ergebnisse aus der Unterrichtseinheit zu linearen Gleichungen vorgestellt. Als Tätigkeitskontext dienten dabei Schachtelgleichungen (vgl. Affolter et al., 2003). In der Analyse sind nun zunächst all die Szenen interessant, in denen Struktursicht im Sinne des SVSt-Modells auftritt. Sie wurden transkribiert und daraufhin untersucht, inwiefern sie die Merkmale aufweisen, die die beiden Theorien postulieren, insbesondere, inwiefern und unter welchen Bedingungen es zu Objectification/Subjectification und damit zur Entwicklung von Struktursinn kommt.

4. Ausgewählte Ergebnisse

Im Folgenden werden drei Merkmale von Szenen der Struktursinnentwicklung dargestellt, die zusammengenommen den Ansatz einer Beschreibung des „kommunikativen Prozesses“ (Malle, 1993, S. 35f.) bilden, in dem Al-

gebra gelernt werden muss. Aus den Ergebnissen ergibt sich eine inhaltliche Konkretisierung des Struktursinnbegriffs.

Zunächst sind Szenen der Struktursinnentwicklung als *Zonen der nächsten Entwicklung* verstehbar, wenn man der Definition von Lerman und Meira (2009, S. 199) folgt, die sie als „an ever-emerging semiotic field for interaction and communication where learning-leads-development“ verstehen. Es besteht eine Beziehung zwischen Lehrkraft und Lernenden, die asymmetrisch ist bezüglich des kulturellen Wissens, aber symmetrisch in dem Sinne, dass beide Seiten sich gegenseitig verstehen müssen. Entscheidende Momente dieser Beziehung, die sich immer wieder rekonstruieren ließen, werden im Folgenden an Einzelaussagen einer Episode illustriert. Darin arbeitet die Lehrerin mit zwei Schülern, nachdem diese zunächst vergeblich versucht haben, das Vorgehen einer weiteren Schülerin nachzuvollziehen:

Die Lehrkraft initiiert eine Klärung von Zielen und Vorgehen:

Lehrerin: Was macht ihr mit denen-

Das Gespräch wird auf die relevanten Objekte fokussiert:

L: So Streichhölzer kann ich ja nich mehr wegnehm hab ich hier ja nich- ,aber?

Ahmed: Aber die Kisten-

L: Wie viele- kann ich wegnehm?

A: Hier zwei- und hier zwei.

Betonung der Struktur durch die Lehrkraft:

L: Und da zwei. ,also immer gleich viele ne? (...) Weil das muss ja gleich bleiben

Die neue Situation dient als Ausgangspunkt für weiteres Handeln:

L: so was ham wir dann hier noch liegen?

Wenn Szenen der Struktursinnentwicklung so sehr von den sozialen Voraussetzungen abhängen, ist es wenig erstaunlich, dass sie eine *starke emotionale Aufladung* aufweisen. So sind vor dem Eintreten von Objectification/Subjectification häufig Anzeichen von Ärger, Frustration und Anspannung zu beobachten, die sich dann in Freude und Entspannung auflösen.

Doch es handelt sich hier nicht um rein affektive oder gar unfachliche Situationen. Im Gegenteil, sie enthalten *ausführliche Äußerungen zu (Handlungs-)Zielen und (Tätigkeits-)Motiven sowie zu den relevanten Objekten*. Diese werden durch *explizite Zeigegesten* unterstützt.

Aufbauend auf dieser Analyse lassen sich erste Hypothesen bilden, die den sich herausbildenden Struktursinn zu linearen Gleichungen *inhaltlich-fachlich konkretisieren*: Zwei zentrale Schritte sind zunächst, a) die beiden Seiten der Gleichung als zueinander gleiche Objekte und b) die Variablen- und Skalarterme als vergleichbare Objekte wahrzunehmen; davon ausgehend sind Handlungen möglich, deren Ziel die Vereinfachung der Gleichung bei

Erhaltung der Gleichheit ist – Äquivalenzumformungen. Sie werden zielgerichtet ausgeführt, bis die Lösung unmittelbar erkennbar ist. Diese Beschreibung ist kompatibel mit Hochs Definition, betont aber den konkreten Handlungsablauf gegenüber der abstrakten Fähigkeit.

5. Ausblick

Die Beschreibung der Szenen von Struktursinnentwicklung ist noch unvollständig. Insbesondere müssen Spezialfälle genauer untersucht werden, etwa wenn unterschiedliche Interessen bei Lehrkraft und Schülern auftreten. Offen ist auch, inwiefern sich die beobachteten Vorgänge bei anderen Strukturen rekonstruieren lassen, und ob die Ausbildung bereichsspezifischen Struktursinns die Entwicklung in anderen Gebieten unterstützt.

Schließlich kann es eine Frage weiterer Forschung sein, ob und wie sich Struktursinn nachlernen lässt. Kann es nachträglich „klick machen“, oder bräuchten Schülerinnen und Schüler der elften Klasse ebenso viel Zeit und Zuwendung wie die in der Studie beobachteten Achtklässler?

Literatur

- Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti und B., Wieland, G. (2003). *mathbu.ch 8. Mathematik im 8. Schuljahr für die Sekundarstufe I*. Bern: Schulverlag blmv & Zug: Klett und Balmer.
- Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessendichter Situationen – Baustein für eine mathematikdidaktische Interestheorie*. Hildesheim: Franzbecker.
- Hoch, M. (2007). *Structure Sense in High School Algebra*. Unveröffentlichte Dissertation. Tel Aviv: Tel Aviv University.
- Janßen, T. und Bikner-Ahsbahs, A. (2013). *Networking theories in a design study on the development of algebraic structure sense*. Working group paper auf der CERME8, abrufbar unter http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Janssen_Bikner_Ahsbahs.pdf (1. März 2013)
- Linchevski, L., und Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173–196.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Meira, L. und Lerman, S. (2009). *Zones of proximal development as fields for communication and dialogue*. In: C. Lightfoot und M. C.D.P Lyra (Hrsg.): *Challenges and Strategies to Study Human Development in Cultural Contexts*. Rom: Firera & Liuzzo, S. 199–219.
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. In: *Journal of Research in Mathematics Education* 2 (1), S. 7–44.
- Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 33 (1), S. 113–141.