Christoph HAMMER, München

Immer Ärger mit den Flächeninhalten!

Ein Thema, das von der Grundschule bis zur Sekundarstufe II immer wieder auftaucht, zahlreiche Anwendungen im Alltag hat und anschaulichen Unterricht ermöglicht – das sind doch beste Voraussetzungen für erfolgreiches Lernen!

Allerdings zeigen Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis erhebliche Probleme, die sich auch in verschiedenen Studien widerspiegeln. So konnten im nationalen Test PISA 2003 nur etwa 60% der beteiligten Schüler den Flächeninhalt eines L-förmigen Flächenstücks berechnen (Ulfig, 2013). Für diese offensichtlichen Schwierigkeiten gibt es vielfältige Ursachen. Hier soll diesbezüglich jedoch nicht ins Detail gegangen werden. Vielmehr werden auf der Basis grundlegender Betrachtungen Vorschläge für einen Unterricht gemacht, der nach Möglichkeit die genannten Probleme verringert.

1. Grundlegende Betrachtungen

Man muss es ja zugeben: einige Aspekte des Themas sind nicht ganz einfach. Es geht schon mit dem Begriff "Flächeninhalt" los. Angesichts der "Liniendominanz ebener Figuren" (Franke, 2007) fällt es schwer, tragfähige Vorstellungen von diesem Begriff zu entwickeln (Weigand, 2009). Es versteht sich von selbst, dass der axiomatische Ansatz hier nicht weiterhilft.

Im Folgenden wird gezeigt, wie das **Grundprinzip des Messens** zur Begriffsbildung beitragen kann. Dies ist schon deshalb bedeutsam, weil Flächeninhalte im Alltag selten gemessen, sondern nahezu ausschließlich aus Längenmaßen berechnet werden. Für die Abgrenzung zwischen Umfang und Flächeninhalt stellt dies eine zusätzliche Schwierigkeit dar.

Eine zweite Ursache für Schülerprobleme liegt darin begründet, dass die Flächeninhaltsformeln zu verschiedenen Figuren in unterschiedlichen Schuljahren behandelt werden und dadurch der Blick auf ihre Strukturgleichheit verstellt wird. Auch hier kann das Grundprinzip des Messens vernetzend als "roter Faden" helfen.

Schließlich dominiert – auch bei uns (?) – das lineare Denken. Nur ein Drittel der befragten Erwachsenen konnte bei der Studie "Bürgerkompetenz Rechnen" (Stiftung Rechnen, 2013) die Frage richtig beantworten, was mit dem Volumen passiert, wenn die Kantenlänge eines Würfels verdoppelt wird. Diese Aufgabe gehörte zu den am schlechtesten bearbeiteten des gesamten Tests. Zum Beispiel ist es ist ja auch schwer vorstellbar, dass das Volumen der Erde eine Million Mal in das der Sonne mit ihrem "nur" hun-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 479–482). Münster: WTM-Verlag

dertfachen Radius passt (die Erdkugel passt nicht so oft in die Sonne!). Die ebenen Beispiele zu diesem Problem handeln häufig von Pizzen mit unterschiedlichen Radien. In diesem Zusammenhang spielt bei den folgenden Vorschlägen die **zentrische Streckung** eine entscheidende Rolle, die auch ohne systematische Behandlung anschaulich genutzt werden kann.

2. Das Grundprinzip des Messens

Dieses Prinzip steht im Mittelpunkt der folgenden Vorschläge. Daher werden seine wesentlichen Aspekte hier kurz dargestellt:

- Zur Messung einer Größe wird ein Repräsentant aus dem entsprechenden Größenbereich (Zeit, Masse, Länge, Flächeninhalt, Volumen, …) als Einheit gewählt.
- Beim eigentlichen Messvorgang bestimmt man die Anzahl ("Maßzahl") der genau in die zu messende Größe passenden Einheiten.
- Das Ergebnis ist die Maßzahl zusammen mit der gewählten Einheit.
- Es gibt zu zwei Größen des selben Größenbereichs nicht immer eine geeignete Einheit (z. B. haben die Seiten eines DIN-Blatts ein irrationales Verhältnis und sind deswegen "inkommensurabel".).

Es dürfte kein Schulbuch geben, das dieses Prinzip bei der Herleitung der Flächeninhaltsformel beim Rechteck nicht verwendet. Daher wird darauf nicht genauer eingegangen. Zwei Gedanken seien dennoch hervorgehoben:

Bei der Messung geht es um die Bestimmung einer Anzahl. Wir bestimmen also die **Anzahl** der Einheitsflächenstücke, die in einen Streifen passen und die **Anzahl** der Streifen, die das Rechteck vollständig ausfüllen. Das Produkt aus diesen beiden Anzahlen ergibt die **Anzahl** der Einheitsflächenstücke im Rechteck. Voreiliges Messen von Längen und Rechnen mit der Formel verstellen den Blick auf den wesentlichen Gedanken (hier unterscheiden sich die Lehrbücher!) (vgl. Weigand, 2009).

Zweitens sollte nicht nur und nicht zu früh mit normierten Einheiten gearbeitet werden. Dies betrifft sowohl die Form als auch (vor allem) die Größe. Im Sinn des operativen Prinzips sind Aufträge der Art "was wäre, wenn die Seiten des Einheitsflächenstücks halbiert werden?" sehr lehrreich und spielen im Folgenden beim Kreis eine Rolle (vgl. Reiss & Hammer, 2012, S. 74 ff). So kann schon frühzeitig der quadratische Zusammenhang deutlich werden, der spätestens beim Umrechnen von Einheiten wichtig wird. Einen interessanten Vorschlag zur konkreten Umsetzung des Messens mit selbst gewählten Einheiten liefert Schmidt (Schmidt, 2014).

3. Flächeninhalt des Parallelogramms

Verbreitete Herleitungen der Flächeninhaltsformel für das Parallelogramm verwenden die Verschiebung eines Teildreiecks oder das Prinzip der Ergänzungsgleichheit. Grundidee ist die Rückführung auf ein Rechteck.

Hier wird dagegen vorgeschlagen, das Prinzip des Messens zu nutzen und vorzugehen wie beim Rechteck:

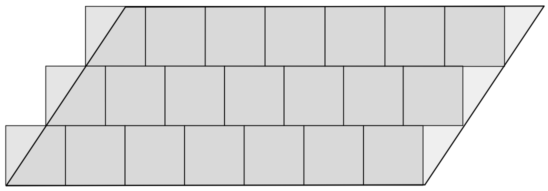

Abb. 1: Messung beim Parallelogramm

Beim Messen wird der Begriff "Flächeninhalt" durch die durchgeführte oder vorgestellte Handlung vertieft. Mir scheint wichtig, dass nicht eine spezielle Höhe verwendet wird, sondern dass "Höhe" gleichbedeutend mit "Abstand zweier Gegenseiten" ist. So wird die Gefahr der Übergeneralisierung von "Seite mal Seite" verringert. Das Problem der außerhalb des Parallelogramms liegenden Höhe kommt hier nicht vor.

Scherung des mit Quadraten ausgelegten Parallelogramms macht deutlich, dass alle Parallelogramme, die in Grundseite und Abstand der zugehörigen Gegenseiten übereinstimmen, gleichen Inhalt haben – auch das Rechteck.

4. Flächeninhalt des Kreises

Nun machen wir einen Sprung in eine höhere Jahrgangsstufe. Beim Flächeninhalt des Kreises sollten zwei Probleme beachtet werden, die mit vielen Lehrbuchdarstellungen einhergehen:

- Wenn die Flächeninhaltsformel aus der für den Umfang hergeleitet wird, muss klargestellt werden, dass so ein Zusammenhang im Allgemeinen **nicht** besteht. Andernfalls wird ein Fehlkonzept bestärkt. Im folgenden Vorschlag wird deshalb ein anderer Weg beschritten.
- Zu frühe und zu einseitige Fixierung auf den Inhalt **eines speziellen** Kreises und damit auf die Bestimmung eines Näherungswerts für π behindert das Verständnis für den entscheidenden Sachverhalt $A \sim r^2$, um den es im Folgenden gehen wird.

Wir messen näherungsweise den Flächeninhalt eines Viertelkreises:

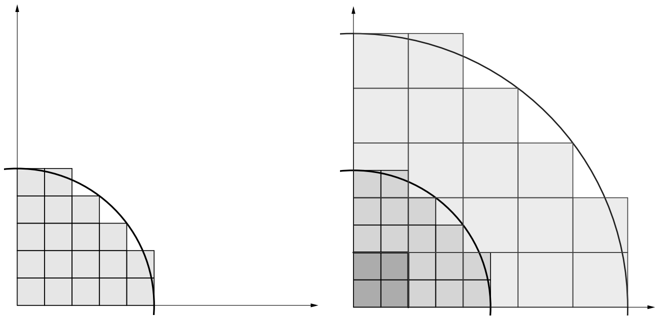

Abb. 2: Kreismessung

Dabei ist es nicht wesentlich, wie genau diese Messung ist. Verdoppelt man nun sowohl den Radius des Viertelkreises als auch die Seitenlänge der Quadrate, so bleibt deren Anzahl erhalten. In jedes der großen Quadrate passen aber vier kleine. Dieses generische Beispiel läßt sich verallgemeinern zu beliebigen Faktoren, die dem Kreisradius entsprechen, wenn man vom Einheitskreis ausgeht. Der Flächeninhalt eines Kreises ist also r^2-mal so groß wie der des Einheitskreises.

Abschließend gilt es natürlich, einen Näherungswert für den Flächeninhalt des Einheitskreises zu bestimmen. Im Grunde genügt dafür die einfache Abschätzung mit ein- und umbeschriebenen Quadraten.

Wohlgemerkt: Diese Überlegungen kann man verstehen, ohne genau über die zentrische Streckung Bescheid zu wissen. Sie zeigen einen Weg zu allgemeinen Beziehungen zwischen den Flächeninhalten ähnlicher Figuren bzw. den Rauminhalten ähnlicher Körper auf, der bis in die Hochschulmathematik reicht.

Literatur

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum

Reiss, K. & Hammer, C. (2012). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Basel: Birkhäuser

Schmidt, R. (2014). Flächenvergleich durch Stempeln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 55*, 11-14.

Stiftung Rechnen (Hrsg.). (2013). *Studie Bürgerkompetenz Rechnen – Ergebnisbericht.* http://stiftungrechnen.de/index.php/projekte/studie. [11.2.2014]

Ulfig, F. (2013). *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Weigand, H.-G. (Hrsg.). (2009). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer Spektrum.