Mutfried HARTMANN, Karlsruhe

Das Spiel „Dobble“ als Feld kreativen mathematischen Arbeitens

Spiele bieten oft sehr schöne Anlässe für mathematische Analysen. Am Beispiel der Analyse des Spiels Dobble soll hier exemplarisch aufgezeigt werden, welche Charakteristika ein solches Problem so attraktiv zur Entwicklung von Problemlösekompetenzen machen.

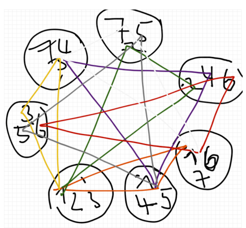
Spielstruktur und erste Beobachtungen

Das Spiel Dobble besteht aus K=55 Karten mit jeweils S_k=8 verschiedenen Symbolen pro Karte. Unabhängig von der Spielvariante läuft es immer darauf hinaus, möglichst schnell auf zwei Karten das übereinstimmende Symbol zu entdecken. Dazu wurden die Symbole von den Spieleentwicklern so geschickt auf die Karten verteilt, dass zwei Karten immer in *genau einem* Symbol übereinstimmen (*Zentrale Deckbedingung*). Hier stellt sich selbst bei nicht matheaffinen Personen die Frage: Wie geht das?

Im Rahmen zweier Workshops im WS 13/14 wurde von Schülern einer Nürnberger Schule und Studierenden der PH-Karlsruhe diese (noch recht unscharf) gestellte Frage bearbeitet. Zunächst dominierte bei beiden Gruppen die direkte Auseinandersetzung mit dem Material. Dabei wurden sehr schnell erste Beobachtungen gemacht. Sie bezogen sich teilweise auf das konkrete Deck und waren keine Folge der zentralen Deckbedingung. Z.B. wurde durch eine unzulässige Verallgemeinerung (fälschlicherweise) festgestellt, dass jedes der Symbole achtmal auftritt. Die Betreuer griffen zunächst inhaltlich nicht ein. Es erwies sich aber als nötig, heuristische Problemlösestrategien in den Prozess miteinzubringen (Link 2011).

Reduktion des Problems und Reichhaltigkeit an Darstellungen

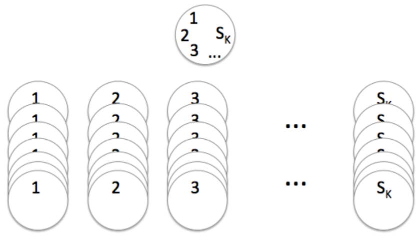
Um das Problem zu vereinfachen, wurden -um zulässige Spiele zu konstruieren- Symbole durch Zahlen ersetzt und entweder mit vorgegebener geringer Kartenanzahl K oder mit geringerer Anzahl S_K von Symbolen pro Karte Versuche durchgeführt. Dabei stellte sich heraus, dass es triviale Lösungen gibt: Jede Karte besitzt dasselbe Symbol. Um S_K zu erhöhen, können die Karten anschließend mit paarweise verschiedenen Symbolen beliebig aufgefüllt werden. Derartig asymmetrische Lösungen wurden damit zunächst als uninteressant verworfen.



Eine besondere Qualität des Problems ist die Vielfalt der Darstellungen, zu der es anregt. Dabei erweisen sich ver-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 483–486). Münster: WTM-Verlag

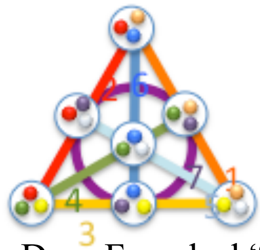
schiedene Darstellungen für unterschiedliche Ergebnisse zielführend. Am tragfähigsten zeigten sich für die Konstruktion kleinerer Decks Tabellen und im Kreis angeordnete Karten mit Zahlen als Symbolen mit farbigen Verbindungslinien, die die Verknüpfung der Karten durch bestimmte Symbole repräsentieren. Schnell wird bei dieser Darstellung auch klar, dass bei einer Symbolhäufigkeit von h_S =2 sich zu jeder Kartenzahl immer eine Lösung konstruieren lässt. Unter der Voraussetzung einer konstanten Symbolhäufigkeit h_S konnte eine wesentliche Formel sowohl aus der Interpretation als vollständiger Graph, der sich entsprechend der Symbole aus Cliquen zusammensetzt, als auch aus der Zerlegung des restlichen Decks entsprechend der Symbole 1,…, S_k einer vorher entfernten beliebigen „Masterkarte“ gewonnen werden: $K-1=S_K\cdot(h_S-1)$ *.



Unterschiedliche Zählweisen der Anzahl aller Zeichen liefert $S_K\cdot K=|S|\cdot h_S$ (S=Menge der Symbole). Die Formel * erweist sich insofern als wertvoll, indem sie viele zum Scheitern verurteilte Vorgaben wie etwa K=12 mit S_k=3 von vornherein als solche kenntlich macht. Auch offenbarte sie die fehlerhafte Annahme, Dobble hätte eine konstante Symbolhäufigkeit von h_S=8. Einen Algorithmus zur Erzeugung möglicher Decks mit $h_S>2$ zu finden, gelang dennoch nicht. Hierzu bedarf es Methoden finiter Geometrie.

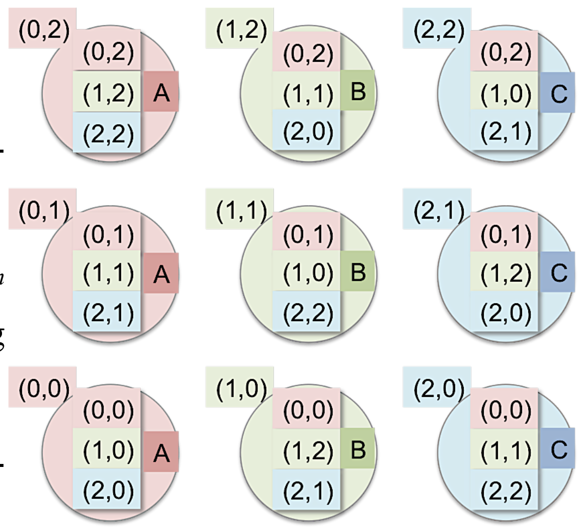
Interpretation von Dobble als „punktierte projektive Ebene“

Bereits die Darstellung der Karten als Punkte und der Verbindungen derselben durch „Symbol-Geraden“ verweisen auf eine mögliche geometrische Interpretation. Der Zusammenhang mit Geometrien wird evident, wenn man die Axiome affiner und projektiver Ebenen betrachtet. Etwa lässt sich das Axiom *„Zwei Punkte inzidieren immer mit genau einer Geraden“* als die zentrale Deckbedingung *„Zwei Karten stimmen immer in genau einem Symbol überein“* interpretieren. Weitere Axiome, die die charakteristischen Eigenschaften der projektiven bzw. affinen Ebene ausmachen, sind für die Gültigkeit eines Spieledecks nicht mehr bedeutsam. Das Kartenset entspricht sogenannten 2-(K,h_S,1)-Blockplänen -Verallgemeinerungen affiner bzw. projektiver Ebenen. Zur Konstruktion von Kartensets können insbesondere Konstruktionsverfahren affiner und projektiver Ebenen genutzt werden. Aus fachdidaktischer Sicht stellt dieses Problem damit einen attraktiven Aufhänger zur tieferen Auseinandersetzung mit finiten Geometrien und endlichen Körpern dar.



Das „Fanodeck“

Analog zur Koordinatendarstellung $\mathbb{R}^2$ der euklidischen Ebene können auch mit endlichen Körpern IF endliche Punktemengen (also Kartendecks) erzeugt werden. Aus den p^n Elementen $(n \in \mathbb{N})$ des endlichen Körpers IF_{p^n} werden dadurch p^{2n} Punkte (Karten). Für die Festlegung der Geraden, die den Symbolen auf den Karten entsprechen, orientiert man sich an der vertrauten Geradengleichung $y = mx + t \quad m,t \in IF^2$.

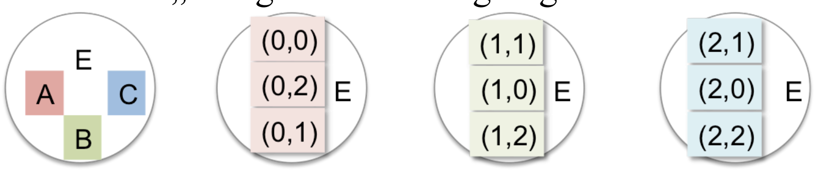


Ein „affines Kartendeck“ über IF_3

Punkte aus IF^2, die diese Gleichung erfüllen, liegen auf derselben durch das Tupel $(m,t) \in IF^2$ festgelegten Geraden. Die entsprechenden Karten besitzen also dasselbe Symbol (m,t). In obiger Abbildung wurde für einen Körper mit drei Elementen ein solches Deck erstellt. Das Symbol (1,0) entspricht dabei der „Ursprungsgeraden“, das Symbol (0,2) der waagerechten Geraden mit dem y-Achsenabschnitt 2. Durch die so erzeugten Geraden (Symbole) wird jede Karte (a,b) eines Stapels mit jeweils genau einer Karte $(\tilde{a},\tilde{b})$ der anderen Stapel verbunden. Dies ist letztlich eine Folge dessen, dass das folgende Gleichungssystem genau eine Lösung (m,t) hat, was am Rang 2 (man beachte $a \neq \tilde{a}$) der entsprechenden Matrix abzulesen ist.

$$\begin{array}{ll} I) & m \cdot a + t = b \\ II) & m \cdot \tilde{a} + t = \tilde{b} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 \\ \tilde{a} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

Da über die Geradengleichungen keine senkrechten Geraden entstehen, die Karten eines Stapels wie z.B. ((0,2), (0,1), (0,2)) also kein gemeinsames Symbol besitzen, müssen noch weitere Symbole (hier A,B,C) eingeführt werden, welche die Karten innerhalb der Stapel miteinander verbinden. Damit entsteht eine affine Ebene oder anders formuliert ein gültiges Deck mit p^{2n} Karten. Diese affine Ebene kann zu einer projektiven Ebene abgeschlossen werden. Dazu müssen die Schnittpunkte für die parallelen Geraden sowie deren verbindende „Ferngerade“ hinzugefügt werden. In der Sprache des Kartendecks bedeutet dies, dass man eine Karte mit den p



zusätzlichen Symbolen A,B,C,… erstellt und p weitere Karten, die jeweils die Symbole beinhalten, die in der ersten Koordinate übereinstimmen. Diese p+1 Karten werden dann noch durch ein weiteres Symbol miteinander verbunden. Im abgebildeten Beispiel ist das E.

Wie man sich leicht klarmacht, bleibt die zentrale Deckbedingung auch erhalten, selbst wenn man irgendwelche Karten aus dem Deck entfernt. Da das Deck von Dobble nur 55 anstelle von 57 Karten hat, kann vermutet werden, dass aus einem Deck, das einer projektiven Ebene mit 57 Punkten entsprach, durch Weglassen von zwei Karten ein unausgewogenes Deck erzeugt wurde. Durch „Schlitzen" werden projektive Ebenen zu affinen, durch das „Punktieren" geht sogar die Blockplaneigenschaft verloren.

Reichhaltigkeit an Variationsmöglichkeiten

Die Problemstellung ist für Variationen besonders ergiebig, da neben den Deckparametern S_k, h_s, K,... (vgl. die Kinderversion von Dobble) verschiedene andere Parameter variiert werden können. Die Karten könnten z.B. auch in mehr als zwei Symbolen übereinstimmen, die Symbole auf den Karten die gleichen sein, sich aber in der Farbe oder Größe unterscheiden (vgl. Das Spiel Kunterbunt) und nicht zuletzt können mit demselben Kartendeck unterschiedlichste Spielvarianten erzeugt werden. Gerade die Variation der Spielregeln in ihrer Auswirkung auf geeignete Strategien und die geforderten kognitiven Fähigkeiten zu untersuchen, bringt noch eine didaktische Komponente in die Analyse des Spiels.

Qualitätsmerkmale der Problemstellung

Die Problemstellung ist einfach, anschaulich und motivierend und kann auf vielfältige Weisen angegangen werden. Das Problem ist hinreichend komplex und Problemlösestrategien sind gewinnbringend einsetzbar. Mit vielfältigen Darstellungsmöglichkeiten sind auf unterschiedlichem Niveau motivierende Teilergebnisse möglich. Oft erzwingen diese, wie z.B. die Entdeckung trivialer Lösungen, eine Präzisierung der Fragestellung. Das Problem weist viele Querbezüge zu Standardthemen der Lehramtsausbildung auf und motiviert auf natürliche Weise zu einer Auseinandersetzung mit Themen der höheren Mathematik.

Literatur

Beutelspacher, A. (1982): *Einführung in die endliche Geometrie. Band I: Blockpläne.* Mannheim: Wissenschaftsverlag

Link, F. (2011): *Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten*.Wiesbaden: Teubner

Pickert, G. (1974): *Einführung in die endliche Geometrie*. Stuttgart: Klett-Verlag