Andrea HOFFKAMP, Berlin

Stoffdidaktik im Fokus – Das Beispiel Lineare (Un-)Abhängigkeit

Curriculumsentwicklung und (Weiter-)Entwicklung von Unterricht bedarf einer Planung, deren Hauptlast von einer „zeitgemäßen lernpsychologisch und mathematisch orientierten Stoffdidaktik getragen [wird]“ (Lambert, 2014). Exemplarisch wird im Artikel am Beispiel der Linearen (Un-) Abhängigkeit gezeigt, wie mit stoffdidaktischen Methoden Folgerungen für didaktisches Handeln und Curriculumsentwicklung in Schule und Hochschule gezogen werden können.

In den Curricula der Bundesländer wird der Begriff der Linearen (Un-)Abhängigkeit, falls er überhaupt genannt wird, zumeist ausschließlich im geometrischen Kontext gesehen. Oftmals wird der Begriff durch die geometrischen Begriffe „Kollinearität“ und „Komplanarität“ ersetzt. Er spielt auch nur dann eine Rolle, wenn es um Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen geht. Es gibt kein Curriculum, aus dem explizit hervorgeht, dass der Begriff aber auch bei Linearen Gleichungssystemen (LGS) und Lösbarkeitsfragen zentral ist. Im Gegenteil: Die Curricula suggerieren, dass LGS den Kalkülanteil darstellen, mit dessen Hilfe man Schnitt- bzw. Lageprobleme schematisch lösen kann, der aber keine strukturelle Verbindung zum Rest aufweist. Lehrende geraten deswegen schnell in die Falle der kochrezeptartigen Behandlung von Fragestellungen der analytischen Geometrie. Oftmals mangelt es an Flexibilität im Umgang mit der Materie.

Um der beschriebenen Problemlage zu begegnen, werden im Folgenden stoffdidaktische Methoden verwendet. Als Leitfaden dient dabei die Zusammenstellung stoffdidaktischer Teilprozesse von Lambert (2014).

Genetisierung – epistemologische Analyse der historischen Genese[1]

Die „Theorie der Linearität“ wurde ursprünglich im Kontext der LGS entwickelt. Dabei war Euler (1750) der Erste, der hierbei deskriptiv und qualitativ vorgegangen ist, indem er untersuchte, welcher Gestalt LGS sind, die keine eindeutige Lösung besitzen. Er verfolgte damit noch nicht das Ziel der Theorieentwicklung, sondern bezog sich auf das Lösungsparadigma. So beschreibt er die *(lineare) Abhängigkeit von Gleichungen* dadurch, dass *eine Gleichung in den anderen enthalten* ist. Außerdem trifft er Aussagen zur *Größe der Lösungsmenge*, indem er die Anzahl der „unbestimmbaren Unbekannten“ ermittelt und so zur Anzahl der Parameter gelangt, die zur

[1] Darstellung orientiert an Dorier (2000).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 543–546). Münster: WTM-Verlag

Beschreibung der Lösungen notwendig sind. Eulers Beschreibung war bis in die 2. Hälfte des 19. Jh. das dominierende Konzept von Linearer Abhängigkeit. Erst im Zusammenhang mit der Arbeit von Cramer (ca. 1840-1879) zu Determinanten entwickelten sich die theoretischen Konzepte von *Rang* und *Dualität* aus Fragen der Lösbarkeit von LGS. *Rang als Invariante* legt die Größe der Lösungsmenge (minimaler Erzeuger bzw. maximale Anzahl unabhängiger Lösungen) fest und - durch einen *Dualitätsprozess* - die minimale Anzahl der Gleichungen bzw. maximale Anzahl unabhängiger Gleichungen zur Erzeugung der Lösungsmenge. Epistemologisch mussten dabei einige Hürden überwunden werden. So musste die Möglichkeit gesehen werden, dieselbe Definition von Abhängigkeit sowohl für Gleichungen als auch für n-Tupel zu verwenden. Hierfür musste das Konzept von Dualität antizipiert werden. Ebenso musste die Invarianz (und deren Beweisbedürftigkeit) erkannt werden. Die erste rein theoretische und im heutigen Sinne moderne Formulierung der Konzepte von Rang und Dualität stammt letztlich von Frobenius (1875, S. 255):

> Mehrere particuläre Lösungen
> $A_1^{(\chi)}, \ldots, A_n^{(\chi)}, \ (\chi = 1, \ldots, k)$
> sollen daher *unabhängig* oder *verschiedenen* heissen, wenn $c_1 A_\alpha^{(\chi)} + \ldots + c_k A_\alpha^{(\chi)}$ nicht für $\alpha = 1, \ldots, n$, verschwinden kann, ohne dass $c_1, \ldots, c_k$ sämmtlich gleich Null sind, mit anderen Worten, wenn die *k* linearen Formen $A_1^{(\chi)} u_1 + \ldots + A_n^{(\chi)} u_n$ unabhängig sind.

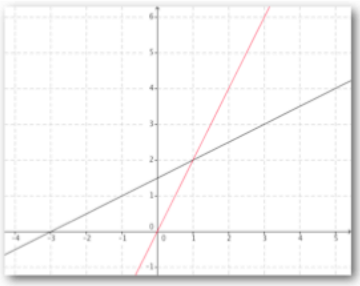
Codierung – Darstellungsebenen und individuelle Zugänge

Für die weitere Analyse betrachten wir vereinfachend quadratische LGS mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten. Solch ein LGS können wir auf drei verschiedene Weisen schreiben bzw. codieren: Als *Zeilenbild*, *Spaltenbild* und in *Matrixschreibweise* (s. Abb.). Recht „natürliche“ Fragen sind dann beispielsweise: Was ist die Lösung? Gibt es denn eine Lösung? Wie viele Lösungen gibt es? Ist das LGS immer lösbar, egal was auf der rechten Seite steht? Um diesen Fragen nachzugehen, betrachten wir Zeilenbild und Spaltenbild einmal eingehender.

Zeilenbild: Aus didaktischer Sicht steht hier der *Simultanaspekt* im Zentrum, also die Frage, ob es (reelle) x,y gibt, die die Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Insofern benötigt man aus kognitiver Sicht *prädikatives Denken* (Schwank, 1999) zur Beantwortung der Fragen. Die graphische Codierung besteht aus *sich schneidenden Geraden*, deren *Schnittpunkt die Lösung* des LGS repräsentiert (s. Abb.). Im Unterrichtsverlauf würde man die Geraden in Parameterform darstellen, so dass sich die Eindeutigkeit der Lösung dar-aus ergeben würde, dass die *Richtungsvektoren nicht parallel* sind – sie sind *linear unabhängig*.

Zeilenbild

$$2x - y = 0$$
$$-x + 2y = 3$$

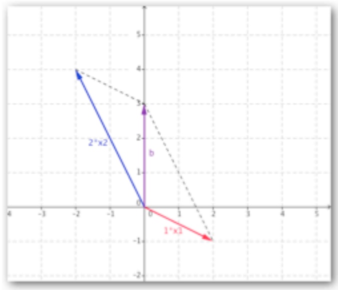


$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenbild

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Linearkombination

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Spaltenbild: Im Spaltenbild stellt sich die Situation anders dar. Hier ist der *dynamische Aspekt* zentral, denn die rechte Seite lässt sich erzeugen, indem man die *Koeffizienten* x,y ändert. Kognitiv benötigt man also *funktionales Denken* (Schwank), und graphisch liegt hier entsprechend eine *Parallelogrammkonstruktion* zur Vektoraddition vor (s. Abb.). Die *Lösung* besteht im Spaltenbild aus den *Koeffizienten der Linearkombination* und die Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich aus der *linearen Unabhängigkeit der Spalten*. Im Spaltenbild lässt sich die Frage, ob das LGS für beliebige Werte auf der rechten Seite lösbar ist, ganz einfach beantworten, denn die *Spalten bilden eine Basis*. Durch *dynamische Visualisierung* ist es im übrigen sofort einsichtig, dass zwei linear unabhängige Vektoren die ganze Ebene aufspannen. Basis lässt sich hiermit ganz einfach intuitiv als maximal linear unabhängige Teilmenge charakterisieren.

Der Vorteil des Zeilenbildes liegt zunächst in dessen Anschaulichkeit. Es knüpft auch direkt an die Sek I im Sinne eines fachlichen Aufbaus an. Der Nachteil ist die Ausbildung eines zu engen Begriffes von Linearer (Un-) Abhängigkeit („kollinear“ und „komplanar“). Das Spaltenbild verkörpert hingegen eine neue Sichtweise und knüpft nicht direkt an die Sek I an. Es hat aber den Vorteil strukturell und verallgemeinerbar zu sein. Schon bei einem 3x3-LGS liefert das Zeilenbild drei Ebenen bzw. bei nxn-Systemen n Hyperebenen und deren „Schnittgebilde“. Im Spaltenbild hingegen ist die Situation allgemein mit dem Konzept der Linearkombination „leichter“ beschreibbar. Das in der historischen Genese entwickelte Konzept der Dualität äußert sich in zwei Schreibweisen für LGS (Zeilen-/Spaltenbild), die verschiedene Sichtweisen und mathematische Erkenntnisse ermöglichen. Das Zeilenbild führt zu typischen „Schnittproblemen“ der analytischen Geometrie und das Spaltenbild zu linearen Strukturen und theoretischen Begriffen wie Basis und Linearkombination. Verbunden sind beide Sichtweisen u.a. durch den theoretischen Begriff der Linearen (Un-)Abhängigkeit.

Fazit

Kognitiv gesprochen bilden Zeilenbild und Spaltenbild Zugänge mit einer dualen Natur. Sie bauen auf vertraute Konzepte auf und sind gleichzeitig Grundlage zur Entwicklung höheren mathematischen Denkens. Im Sinne Talls (1996) stellen sie also *cognitive roots* dar, die sich mittels stoffdidaktischer Methoden beschreiben lassen. Sie beinhalten das Merkmal der Erweiterbarkeit und Weiterentwicklung als Bildungsziel. *Cognitive roots* dienen als *Orientierung zum Unterrichten in Schule und Hochschule* und als *Bindeglied zwischen Schule und Hochschule*. *Lineare (Un-)Abhängigkeit* bildet als theoretischer Begriff eine *Brücke* zwischen Arithmetik, Geometrie und strukturellem Zugang. Diese Erkenntnis ermöglicht einen flexiblen und verstehensorientierten Umgang mit linearen Strukturen. Als übergeordnete Folgerung ergibt sich hieraus, dass stoffdidaktische Methoden in der Lehramtsausbildung explizit an den Hochschulen vermittelt und geübt werden sollten. Auf die Vermittlung in der Schule und die curriculare Ausgestaltung bezogen ergibt sich, dass sich eine Vertiefung zu LGS in der Sek II strukturell an Zeilen- und Spaltenbild und Fragen der Lösbarkeit orientieren sollte, damit LGS mehr als nur den Kalkülanteil darstellt. Insbesondere sollten Simultan- und dynamischer Aspekt hervorgehoben werden, was für die Behandlung des Gauß-Verfahrens und gegen Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren spricht, da bei letzteren Gleichungen quasi „verschwinden“ und der Simultanaspekt nicht sichtbar wird.

Literatur

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *The Teaching of Linear Algebra in Question*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Euler, L. (1750). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Mémoires de L'Académie des Sciences de Berlin, 4*, 219-223.

Frobenius, G.F. (1875). Über das Pfaffsche Problem. *J. Crelle, 82,* 230-315.

Lambert, A. (2014). Teilprozesse der stoffdidaktischen Methode (Poster). *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 96,* 89.

Schwank, I. (1999). On predicative versus functional cognitive structures. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of CERME 1, Vol. II* (pp. 84-86), Osnabrück.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. Bishop et al. (Eds.), *Int. Handbook of Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 289-325.