

Thomas GÖTZ, Koblenz

## Mathematische Modellierung – zwei Beispiele aus der Unterrichtspraxis an Schule und Uni

In diesem Beitrag werden exemplarisch zwei Beispiele von Modellierungsaufgaben vorgestellt, die im Rahmen von Modellierungswochen sowohl mit Schülern der gymnasialen Oberstufe als auch mit Mathematikstudenten im Bachelor und Master bearbeitet wurden.

### Wie besteigt man einen Berg?

In Spiegel Online fand sich am 07.03.2008 ein Artikel mit dem Titel „*Die Mathematik des Bergsteigens*“. Hierin wird von zwei englischen Mathematikern berichtet, die energieoptimale Wege auf Berge untersucht haben. Ausgehend von einem empirisch gefundenen Zusammenhang zwischen der Steigung eines Weges und der dabei von einem „*typischen*“ Wanderer verbrauchten Energie wurde der hypothetische Berg „*Mount Conicus*“ – ein perfekter Kegel – untersucht. Dies war der Startpunkt der Fragestellung energieoptimale Wege auf *reale* Berge zu berechnen.

Als Daten standen zur Verfügung

- die Energieformel von Margaria (1938), verbrauchte Energie  $M$  je Meter Weglänge in Abhängigkeit von Steigungswinkel  $\alpha$  mit  $s = \tan(\alpha)$

$$M(s) = 2.635 + 17.37 s + 42.37 s^2 - 21.43 s^3 + 14.93 s^4$$

- diskrete Daten der Topographie aus einem GIS (Geoinformationssystem), typischerweise Höhendaten in Metern auf einen 10 x 10 m Raster.

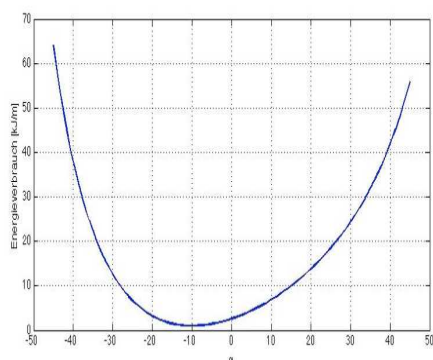


Abb.1 (links) Graph der Energieformel von Margaria (1938).

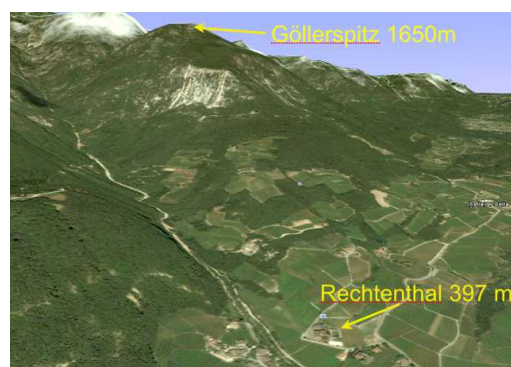


Abb.2. (rechts) Topographische Daten für die Schülergruppe in Tramin, Italien.

Dieses Problem wurde bereits mehrfach im Rahmen von Modellierungswochen eingesetzt

- Modellierungswoche Garmisch-Partenkirchen (Sek 2, LK Mathematik)

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 439–442).  
Münster: WTM-Verlag

- Modellierungswoche Tramin, Italien (Sek 2)
- Modellierungs-Proseminar, TU Kaiserslautern (Bachelor, 3.-5. Semester)
- ECMI Modellierungswoche, Wroclaw, Polen (Master, 2.-4. Semester).

Weiterhin ist zu diesem Thema eine Diplomarbeit an der TU Kaiserslautern (Rau 2010) entstanden.

Von allen Gruppen wurde zuerst die Energie je Weglänge in den Energieverbrauch je gewonnenem Höhenmeter umgerechnet und hieraus ein energieoptimaler Steigungswinkel  $\alpha_{\text{opt}} \approx 13,87^\circ$  erhalten.

Der Lösungsansatz der Schülergruppen basierte auf der folgenden Heuristik

Der Wanderer bewegt sich auf einem diskreten Rechteckgitter (vorgegeben durch die diskrete Datenstruktur der Höhendaten). In jeden Gitterpunkt wählt der Wanderer nun jene Richtung aus, in die die Steigung dem optimalen Wert  $\alpha_{\text{opt}}$  am nächsten kommt.

Bei dieser Heuristik ist jedoch unklar, ob der Gipfel überhaupt erreicht werden kann. Zu Lösung dieses Problems wurde von der Schülergruppe aus Tramin eine zweite Heuristik vorgeschlagen, siehe Abbildung 3 und 4.

Für jede der 8 möglichen Richtungen auf dem diskreten Gitter, wurde die Differenz  $(\alpha_{\text{opt}} - \alpha)$  zwischen optimaler und realer Steigung mit einem Strafterm  $f_s(\varphi)$  in Abhängigkeit von der Abweichung zwischen gewünschtem Zielpunkt (Berggipfel) und Laufrichtung gewichtet.

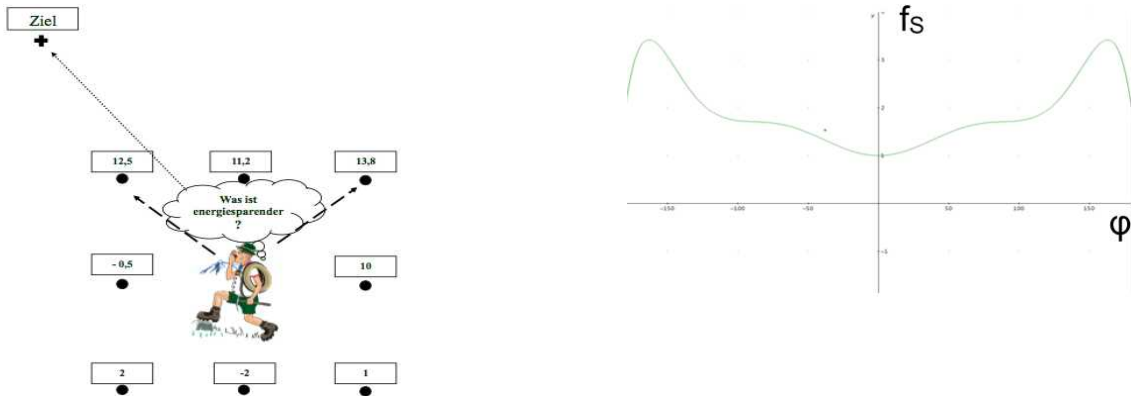


Abb 3. (links) Bewegung auf diskretem Gitter, Steigungswinkel in die acht Gitterrichtungen und Zielpunkt.

Abb 4. (rechts) Strafterm  $f_s(\varphi)$  der Schülergruppe in Tramin.

Die Schülergruppe in Garmisch-Partenkirchen verwendete eine ähnliche Idee. Resultate waren jeweils ein Computerprogramm, welches eine Berechnung des Weges basierend auf gegebenen Topographie-Daten ermöglichen, siehe. Abbildungen 5 und 6.

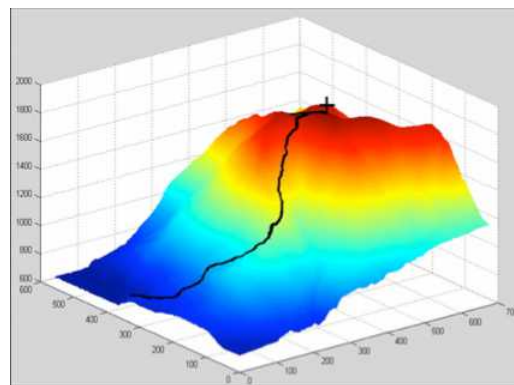
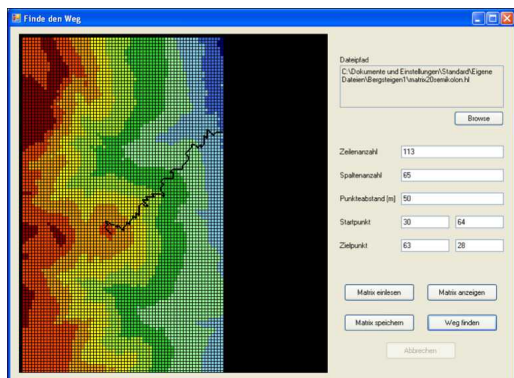


Abb. 5 (links) Screenshot des Simulationsprogramms der Schülergruppe aus Tramin.

Abb. 6 (rechts) Berechneter Optimaler Weg der Schülergruppe aus Garmisch-Partenkirchen.

Die Studentengruppen hatten im Vergleich zu den Schülergruppen mehr mathematische Werkzeuge und Techniken zur Verfügung. Hier wurden die diskreten Höhendaten als gewichteter Graph interpretiert. Die Punkte, an denen Höhendaten vorlagen bildeten die Knoten des Graphs, jeder Knoten ist mit seinen acht Nachbarn über eine Kante verbunden. Der Energieverbrauch beim Bewegen entlang einer dieser Kanten entspricht dem Kantengewicht. Der energieoptimale Weg von einem gewählten Startknoten A zu einem beliebigen Zielknoten B kann nun mit dem *Dijkstra-Algorithmus* der Graphentheorie gefunden werden. Aufgrund der Asymmetrie der Energieformel von Margaria bezüglich Auf- oder Abstieg ( $\alpha > 0$  bzw.  $\alpha < 0$ ) ergeben sich unterschiedliche energieoptimale Wege bergauf oder bergab, siehe Abbildung 7.

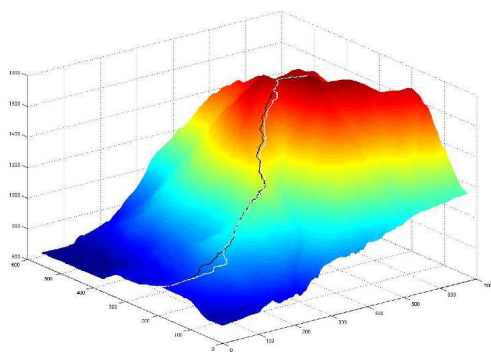


Abb 7. Energieoptimale Wege bergauf und bergab.

## Wie bewässert man einen Garten?

Um einen Garten zu bewässern kann man Bewässerungssysteme mit fest installierten, versenkbaren Regnern einsetzen. Die Planung der Anzahl und Position der einzusetzenden Regner für einen beliebigen Garten ist ein nicht-triviales mathematisches Problem. Auf der Webpage der Firma Gardena ([www.gardena.com/de](http://www.gardena.com/de)) findet man ein Online-Planungs-Tool,

welches für einen einzugebenden Gartenplan eine –in welchem Sinne?– optimale Anzahl und Positionierung verschiedener Regnertypen findet.

Die Überprüfung dieses Resultats durch einen eigenen Ansatz zur Optimalen Positionierung verschiedener Regnertypen war Ziel eines weiteren Modellierungsprojektes, welches mehrfach mit Schülergruppen (Sek 1 bzw. Sek 2) sowie im Rahmen von Modellierungs-Proseminaren an der TU Kaiserslautern durchgeführt wurde.

Von einer Studentengruppe eines Proseminars wurde folgende Lösungsheuristik vorgeschlagen

- Der gegebene Garten wird trianguliert; hierzu existiert eine Vielzahl leistungsfähiger Algorithmen.
- Für verschiedene „Standardtypen“ von Dreiecken, wie „lang & gleichschenkelig“ oder „spitzwinklig“, werden optimale Teillösungen vorab berechnet.
- Diese Teillösungen werden zusammengeführt und ggf. verschiedene, benachbarte Regner zusammengefasst.

In der folgenden Tabelle ist ein exemplarisches Resultat im Vergleich zu der „Online“-Lösung von Gardena zusammengefasst.

	GARDENA	Studenten	Einsparung
Sprinkler	17	13	23,5 %
bewässerte Fläche	267,8 m <sup>2</sup>	175,44 m <sup>2</sup>	35 %
nicht bewässerte Fläche	ca. 1%	ca. 3%	–
mehrfach bewässerte Fläche	69,3 %	13,2 %	81,3 %

## Literatur

- Dambeck, H. (2008) Die Mathematik des Bergsteigens, <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/numerator-die-mathematik-des-bergsteigens-a-539366.html>
- Margaria, R. (1938). Sulla fisiologia e specialmente sul consumo energetico della marcia e della corsa a varia velocita ed inclinazione del terreno. *Atti Accad. Naz. Lincei Memorie*, 7, 299–368.
- Rau, S. (2010). Energy optimal walking trails. Diplomarbeit TU Kaiserslautern, 64 S.