Svenja GRUNDEY, Hamburg, Christine KNIPPING, Bremen

Beweisvorstellungen und deren Einfluss auf das eigenständige Beweisen

Begründungen und Beweise spielen in der Mathematik und in den heutigen Bildungsplänen eine zentrale Rolle. Trotz dieser Bedeutung zeigen viele mathematikdidaktische Studien, dass Lernende große Schwierigkeiten mit dem mathematischen Argumentieren und Beweisen haben (z.B. Healy & Hoyles 1998, Reiss, Klieme & Heinze, 2001) und es wird versucht, Ursachen für die beobachteten Schwierigkeiten zu identifizieren. In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen, welchen Einfluss Beweisvorstellungen auf eigenständige Beweisprozesse von Lernenden haben können. Dies wird exemplarisch anhand prototypischer Fallbeispiele erläutert. Weiterhin wird ein theoretisches Konzept vorgestellt, welches einen möglichen Erklärungsansatz für beobachtete Schwierigkeiten aber auch für gelungene eigenständige Beweisprozesse liefert.

Die im Folgenden dargestellten Daten wurden im Rahmen einer Studie erhoben, bei der, angelehnt an das Dortmunder Modell der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Prediger et al. 2012), ein Designexperiment zur Förderung eines differenzierten Beweisverständnisses entwickelt und empirisch überprüft wurde.

Zur „Problematik der Sichtbarkeit“

Hemmi (2006) entwickelt einen theoretischen Ansatz, um Probleme beim Lehren und Lernen mathematischer Beweise zu erklären. Grundlage dieses Ansatzes ist die Annahme, dass mathematisches Beweisen ein Wechselspiel zwischen Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit darstellt. Unter Sichtbarkeit von Beweisen versteht Hemmi (2008), dass die Aufmerksamkeit explizit auf die Bedeutung mathematischer Beweise, etwa ihre logische Struktur oder Funktionen gerichtet wird. Damit wird der Fokus auf die Beweisebene gelegt, während die Inhalte in den Hintergrund rücken. Gleichzeitig sollen durch mathematische Beweise Inhalte, d.h. mathematische Theoreme und mögliche Zusammenhänge zwischen Theoremen vermittelt werden. Dabei rückt die Beweisebene in den Hintergrund. In diesem Fall findet eine Fokussierung auf die Inhaltsebene statt und Beweise werden hauptsächlich als Werkzeug betrachtet. Das Wechselspiel von Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit ist für Hemmi nicht nur charakteristisch für mathematische Beweise, sondern auch notwendig in mathematischen Beweisprozessen. Die Schwierigkeit für Lernende besteht ihrer Auffassung darin, dass ihnen dieses Wechselspiel häufig verborgen bleibt. Während eigener Beweisprozesse

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 463–466). Münster: WTM-Verlag

können daher Brüche und Probleme bei den notwendigen Wechseln zwischen der Beweis- und Inhaltsebene auftreten. Dies kann sowohl zu Schwierigkeiten bei der Entwicklung eines differenzierten Beweisverständnisses als auch zu Schwierigkeiten bei der Produktion eigenständiger Beweise führen. Im Folgenden werden anhand prototypischer Fallbeispiele mögliche Brüche in Beweisprozessen, wie auch gelungene Beweisprozesse beschrieben und mit Hilfe des theoretischen Ansatzes von Hemmi erklärt.

Konzeption des Designexperiments und Erhebung der Daten

Im Zentrum des Designexperiments zum Themenbereich „Analysis" stand ein Zyklus aus Beweisrezeption, Beweisdiskussion und Beweiskonstruktion. In der Studie wurde dieser Zyklus insgesamt drei Mal durchlaufen. Ausgangspunkt des Designexperiments waren bereits vorhandene Beweisvorstellungen der Lernenden. Am Ende des Designexperiments wurden ihre Vorstellungen erneut erhoben, um mögliche Veränderungen rekonstruieren zu können.

Anhand fiktiver Schülerbegründungen einer Aussage aus dem Bereich der Analysis sollten die Lernenden in der ersten Beweisrezeptionsphase für charakteristische Eigenschaften mathematischer Beweise sensibilisiert werden und sich ihrer eigenen Beweisvorstellungen bewusst werden. Die anschließende Beweisdiskussionsphase anhand der zuvor behandelten Schülerbeweise diente der expliziten Thematisierung charakteristischer Aspekte von Beweisen innerhalb der Klasse. Den Abschluss des ersten Zyklus bildete eine Phase, in der die Lernenden eigenständig eine mathematische Aussage beweisen sollten. Diese eigenständigen Beweise dienten im Anschluss als Grundlage für den zweiten Durchlauf.

Das Designexperiment umfasste 6 Unterrichtsstunden und wurde in zwei deutschen Klassen der Jahrgangsstufe 10 und zwei kanadischen Highschool-Kursen von den jeweiligen Lehrpersonen unterrichtet. Neben den schriftlichen Aufzeichnungen der Lernenden wurden zudem Audioaufnahmen während der Beweiskonstruktionsphasen gemacht. Beide Arten von Daten erlauben Einblicke in das Zusammenspiel von Beweisvorstellungen und Beweiskompetenzen, die ein zentrales Forschungsinteresse der durchgeführten Studie darstellen.

Wie bei Grundey (2010) beschrieben, verfügen die meisten Lernenden in dieser Studie zu Beginn des Designexperiments über eine algebraisch-mechanische Beweisvorstellung. In dieser Vorstellung werden durch Formeln und algebraische Umformungen mathematische Aussagen begründet und verifiziert. Auch Allgemeingültigkeit stellt ein wesentliches Kriterium für Beweise nach Auffassung der Lernenden dar.

Ergebnisse

Das erste Beispiel eines eigenständigen Beweises bezieht sich auf die Aussage, dass jede ganzrationale Funktion geraden Grades mindestens eine Extremstelle besitzt. Etliche Lernende der Studie begegnen auf der Beweisebene der Schwierigkeit, einen formal-algebraischen Ansatz für eine Polynomfunktion geraden Grades zu finden und die 1. Ableitung von dieser Funktion zu bilden. Ein solches Vorgehen entspricht ihrer Vorstellung von Beweisen, ist jedoch für sie algebraisch schwer realisierbar. Einige Lernende weichen daher aus und entwickeln stattdessen auf der inhaltlichen Ebene eine logisch korrekte Argumentation, die auf einer visuellen Vorstellung von Polynomen geraden Grades beruht. Da jedoch ihre formal-algebraischen Beweisvorstellungen an dieser Stelle des Lernprozesses noch sehr dominant sind, lehnen es die Lernenden ab, ihre korrekte Argumentation in narrativer Form zu notieren, wie der folgenden Interviewausschnitt aus einer kanadischen Klasse verdeutlicht.

> *Lehrerin: Yes. Write down in words what you just told me.*
> *Trevor: I can't.*
> *Lehrerin: Explain what you explained to me to Connor and Connor will write as you said.*
> *Trevor: Yeah but I can't…*

An dieser Stelle des Beweisprozesses wirken sich Trevors Beweisvorstellungen hinderlich auf seinen eigenständigen Beweisversuch aus. Obgleich er auf der Inhaltsebene durchaus tragfähige Beweisideen entwickelt, lässt er es aufgrund seiner Beweisvorstellungen nicht zu, diese zu realisieren.

Ein vergleichbares Beispiel findet sich bei dem Beweis- bzw. Widerlegungsversuch einer falschen Aussage. Die Lernenden sind angehalten zu beweisen bzw. zu widerlegen, dass das Schaubild eines Polynoms geraden Grades mindestens einmal die x-Achse schneidet. Ähnlich wie beim ersten Fallbeispiel gelangen die Lernenden auch hier mit Hilfe einer visuellen Vorstellung auf der Inhaltsebene zu einer Lösung. Sie stellen fest, dass die behauptete Aussage falsch ist. Auch an dieser Stelle beeinflussen jedoch die Beweisvorstellungen das weitere Vorgehen einiger Lernender. Für sie steht die Verwendung von Beispielen im Konflikt zu ihrer Auffassung von Beweisen als allgemeingültige Begründungen. Die Lernenden sind verunsichert, wie sie die Falschaussage widerlegen können. Dies zeigt sich etwa in dem folgenden Interviewausschnitt eines kanadischen Kurses:

> *Trevor: Is that good enough though to say like if* ***you show one example that doesn't work?***
> *Lehrerin: You need to.*
> *Trevor: Maybe that's a problem.*

In einem der kanadischen Kurse wurde die Möglichkeit der Widerlegung einer Aussage durch ein Gegenbeispiel explizit von der Lehrperson in der Beweisdiskussionsphase thematisiert (Grundey, 2011). Diese Lernenden verfügten neben einer Herangehensweise auf der Inhaltsebene ebenfalls über das notwendige Wissen auf der Beweisebene und führten ohne Zögern ein Gegenbeispiel zur Widerlegung an. Aufgrund der Passung beider Ebenen, konnte in diesem Fall ein positives Wechselspiel zwischen Inhalts- und Beweisebene festgestellt werden.

Fazit

Es scheint hilfreich zu sein, dass Lernende, besonders auch Lehrpersonen, ein Bewusstsein für das beschriebene Wechselspiel zwischen Beweis- und Inhaltsebene entwickeln, um beispielsweise bei Brüchen in Beweisprozessen die Ebene, auf der die Schwierigkeiten auftreten, zu identifizieren. Darauf aufbauend können gezielte Hilfestellungen auf der jeweiligen Ebene gegeben und gleichzeitig das meist unbewusst stattfindende Wechselspiel zwischen Inhalts- und Beweisebene explizit thematisiert werden. Eine weitere Notwendigkeit im Unterricht scheint darin zu liegen, den Fokus verstärkt auf die Beweisebene (z.B. auf Funktionen oder die logische Struktur) zu legen, um ein differenzierteres Beweisverständnis bei Lernenden zu fördern, welches nicht auf eine algebraische Darstellung beschränkt ist.

Literatur

Grundey, S. (2010). Eigenständige Beweisaktivitäten im Mathematikunterricht – Schülervorstellungen und Kompetenzen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010,* 361–364, Münster, WTM-Verlag.

Grundey, S. (2011). Lehrerhandeln in Beweisprozessen: auf die richtige Balance kommt es an. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011,* 323–326, Münster, WTM-Verlag.

Healy, H. & Hoyles, C. (1998). Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on a Nationwide Survey. 1998.

Hemmi, K. (2006). Approaching proof in a Community of Mathematical Practice. Stockholm, 2006.

Hemmi, K. (2008). Students‘ encounter with proof: the condition of transparency. In: *ZDM - The International Journal on Mathematics Education 2008, 40,* 413–426.

Prediger, S.; Link, M.; Hinz, R.; Hussmann, S.; Ralle, B.; Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In: *MUN –Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 2012, 65 (8),* 452–457.

Reiss, K.; Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. *Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht.