Leander KEMPEN, Paderborn

Sind das jetzt schon „richtige“ Beweise? - Ausführungen zu Grundfragen der Beweisdidaktik

In diesem Beitrag sollen vier Grundfragen der Didaktik des Beweisens thematisiert werden: (1) „Welche Implikationen ergeben sich aus dem Verhältnis von Beweisprozess und Beweisprodukt?“, (2) „Welche Bedeutung kommt der Darstellung eines Beweises zu?“, (3) „Ab wann ist ein Beweis ein Beweis?“ und (4) „Wie sind die (anschaulichen) Beweiskonzepte der Mathematikdidaktik zu bewerten?“. Die folgenden Ausführungen zu den genannten Bereichen erfolgen durch eine Synthese von Perspektiven der Fachmathematik, der Mathematikdidaktik und der Semiotik.

1. Welche Implikationen ergeben sich aus dem Verhältnis von Beweisprozess und Beweisprodukt?

Dem Produkt ‚Beweis‘ geht ein Prozess voraus, der u.a. Exploration, Überprüfung und quasi-empirische Evidenz beinhalten kann (etwa Heintz, 2000). Die Reduktion des Prozesses auf das Produkt des fertigen Beweises, wie es häufig im unterrichtlichen Geschehen passiert, kaschiert die eigentliche mathematische Tätigkeit. Will man der mathematisch-kulturellen Tätigkeit des Beweisens gerecht werden, sollte jede Beweisaktivität mit der Exploration des Sachverhalts beginnen. Eine entsprechende Betrachtung von Beispielen kann bereits zu einer Beweisidee führen und eventuell auch zu einem Beweis ausgebaut werden (vgl. „generische Beweise“ in Kempen, 2013). Innerhalb der Explorations- und Untersuchungsphase wird das Vorwissen mit neuen Erkenntnissen verknüpft, es geschieht (zumindest zunächst) eine lokale Ordnung im Sinne Freudenthals (1973, S. 142). Die zugrunde gelegte Argumentationsbasis gilt es zu explizieren, da sich die Frage nach der Zulässigkeit eines Arguments nur vor dem Wissenshintergrund der jeweiligen Community („shared-knowledge“) und der im unterrichtlichen Geschehen vereinbarten Normen beantworten lässt.

2. Welche Bedeutung kommt der Darstellung eines Beweises zu?

Eine Verabsolutierung der fachmathematischen Symbolsprache als Darstellungsmittel beim Beweisen wird aus didaktischer Sicht kritisch betrachtet, da diese bereits für viele Lernende ein Verstehenshindernis darstellt. Wie Maier (1999) ausführt, sind viele Probleme von Lernenden bei der Konstruktion von Beweisen und beim Lesen und Verstehen von Beweisen auf die formale Darstellung zurückzuführen. Es gilt hier, die Verwendung (das

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 607–610). Münster: WTM-Verlag

Schreiben und Lesen) von mathematischer Fachsprache neben dem Beweisen als eigenen Lerngegenstand aufzufassen.

Aus semiotischer Sicht konzentriert sich mathematische Tätigkeit auf den Umgang mit Diagrammen (im Sinne von Peirce, vgl. hierzu Stjernfeld, 2000) und deren Erforschung. Vor diesem Hintergrund basieren Beweise auf „einer Deutung der Situation mittels eines Diagramms und ebenso wie das *Funktionieren* eines Beweises hängt auch dessen *Konstruktion* von der gewählten Darstellung ab“ (Lenhard, 2003, S. 248; Hervorhebungen im Original). Beispiele für solche Diagrammsysteme sind etwa die formale Sprache der Algebra oder Punktmuster bei figurierten Zahlen. Somit ist auch die Verwendung von anderen Darstellungsmitteln legitim und die Untersuchung von nicht-mathematisch-symbolischen Diagrammsystemen, etwa von Punktmustern, als genuin mathematisches Tun zu bezeichnen (etwa Dörfler, 2008). Hier gilt es Stjernfelt (2000) zuzustimmen, wenn er betont: „The good formalization is one which permits manipulation in order to reveal new truths about its object“ (Ebd., S. 360). Das gewählte Diagrammsystem ist somit ausschlaggebende für das Gelingen eines bestimmten Beweises; die Güte und Angemessenheit eines Diagrammsystems ist folglich erstens vom fachlichen Inhalte her und zweitens personenbezogen zu bewerten.

3. Ab wann ist ein Beweis ein Beweis?

Die Akzeptanz eines Beweises als einen solchen geschieht durch einen sozialen Akt einer bewertenden Community (siehe z.B. Hersh, 1993). Dabei beginnt diese ‚soziale Akzeptanz‘ beim Betrachter des Diagrammsystems. Welches Diagrammsystem für den Betrachter verständlicher, anschaulicher, allgemeingültiger etc. ist, ist individuell unterschiedlich. Aufgrund des Vorwissens kann eine Argumentation in einem gegebenen Diagrammsystem für den Betrachter überzeugend sein, oder nicht. Die Frage, ob eine Argumentation „ein Beweis ist oder nicht?“, müsste somit eher lauten, ob eine Argumentation „für den Betrachter ein Beweis ist oder nicht?“ und die Antwort liegt beim Betrachter des Diagrammsystems. Lernende müssen folglich in die Lage versetzt werden entscheiden zu können, ob eine Argumentation ein ‚Beweis‘ ist, d.h. ob für den Betrachter die Validität der Behauptung allgemeingültig gezeigt wird.

4. Wie sind die (anschaulichen) Beweiskonzepte der Mathematikdidaktik zu bewerten?

Im Kontext des Beweisens war und ist es eine Bemühung der Mathematikdidaktik, das Beweiskonzept der Mathematik zu elementarisieren und anschauliche Beweisformen stärker zu legitimieren. Solche Beweisformen sind z.B. präformale Beweise, inhaltlich-anschauliche Beweise, generische Beweise etc. (vgl. Kempen, 2014). Vorteile dieser Beweiskonzepte sind u.a.: (i) Das Beweisen wird bereits Lernenden in unteren Schulstufen zugänglich gemacht, (ii) das Beweisen wird als eine kreative und forschende Aktivität verdeutlicht, (iii) sie können den Aufbau einer positiven Selbstwirksamkeit auf Seiten der Lernenden bewirken, (iv) das erklärende Moment der Beweise wird betont, (v) die Erforschung des Sachverhalts und Beispielbetrachtungen werden ausdrücklich in den Prozess der Beweisfindung/des Beweisens integriert und (vi) die Abgrenzung zu bloßen Beispielbetrachtungen kann thematisiert werden. Da die Güte eines Beweises - wie wir gesehen haben - nicht vom Grad der Formalität des Beweises abhängt, sind diese didaktischen Beweiskonzepte als wirkliche ‚Beweise' legitimierbar: Sie können einem Betrachter die Validität einer Behauptung in Bezug auf ein zugrunde gelegtes theoretisches System allgemeingültig verdeutlichen. Um die Allgemeingültigkeit der Argumentation im konkreten Sachverhalt zu gewährleisten und das entsprechende Verständnis sicherzustellen, empfiehlt es sich hier, die Argumentation zu verschriftlichen (vgl. Kempen, 2013). Diese Beweistypen sind aber nicht nur eigenständige valide Beweise, sie sind auch eine sinnvolle didaktische Zwischenstufe zum Erlernen der formalen Beweisaktivität, wie im Folgenden begründet wird.

Bei der Untersuchung von konkreten Sachverhalten (Materialien, konkrete Zahlenbeispiele oder Punktmuster) rückt die Frage nach der Allgemeingültigkeit einer Beobachtung/einer Argumentation in den Vordergrund. In diesem Kontext werden verschiedene Funktionen und Stärken der fachmathematischen Sprache deutlich. (1) Dem algebraischen Kalkül kommt eine Kontrollfunktion bei der Argumentation zu: Es kann sichergestellt werden, dass keine speziellen Eigenschaften von konkreten Zahlen o.ä. verwendet wurden, die die Gültigkeit der Argumentation auf die konkrete Situation beschränken würden. (2) Nach Betrachtung eines solchen anschaulichen Beweises kann ein eventuell weiterhin bestehender Zweifel an der Gültigkeit der Behauptung und der Allgemeingültigkeit der Argumentation durch die Formulierung eines formal dargestellten Beweises – bei einem entsprechenden Variablenverständnis - beseitigt werden (vgl. Leuders, 2010, S. 54). (3) Durch die gesicherte Allgemeingültigkeit, bei Verwendung der Algebra, tritt ihre immanente Stärke in den Vordergrund: „Expressing generality" (vgl. Mason et al., 2005, S. 2). (4) Schlussendlich kann die symbolische Fachsprache als sinnvolles Kommunikationsmedium der mathematischen Community verdeutlicht werden.

5. Schlussbemerkung

Die Beweiskonzepte der Mathematikdidaktik sind zunächst als wertvolles didaktisches Mittel für das Erlernen der formalen Beweisaktivität zu bewerten. Des Weiteren stellen sie, insofern sie eine gegebene Behauptung allgemeingültig verifizieren, wirkliche ‚Beweise' dar. Die Güte eines Beweises richtet sich dabei nicht nach dem Grad seiner ‚formalen' Darstellung, sondern nach seiner Überzeugungskraft innerhalb einer Community und nach den Funktionen, die er im (unterrichtlichen) Kontext erfüllen soll. Es gilt zu betonen, dass das Operieren in verschiedenen Diagrammsystemen die Bedeutung von mathematischen Argumenten betont und die Möglichkeit der Diskussion über gegebene Argumentationen (Qualität, Vollständigkeit, Allgemeingültigkeit etc.) bietet. Schlussendlich werden durch eine Formalisierung von Argumentationen der eigentliche Wert und die Funktion der mathematischen Fachsprache erst wirklich ersichtlich.

Literatur

Dörfler, W. (2008). Mathematical reasoning: Mental activity or practice with diagrams. In J. Böhm (Hrsg.), *Proceedings Regular Lectures ICME 10*, CD-Rom. Osnabrück: European Society for Research in Mathematics Education.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. *Band 1*. Stuttgart: Klett.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik*. Wien [u.a.]: Springer.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Kempen, L. (2014). Der operative Beweis als didaktisches Instrument in der Hochschullehre Mathematik. In T. Wassong, D. Frischemeier, P. R. Fischer, R. Hochmuth & P. Bender (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (S. 463-470): Springer Fachmedien Wiesbaden.

Kempen, L. (2013). Generische Beweise in der Hochschullehre. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (Bd. 1, S. 528-531). Münster: WTM-Verlag.

Lenhard, J. (2003). Verändert ein Beweis, was er beweist, indem er es beweist? Über die Veränderlichkeit mathematischer Objekte. In M. Hoffmann (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven* (S. 242-257). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Leuders, T. (2010). *Erlebnis Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Maier, H. (1999). Wieviel Fachsprache brauchen die Schüler im Mathematikunterricht?. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999* (S. 19-26). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005*). Developing thinking in algebra*. London: Open Univ. [u.a.].

Stjernfelt, F. (2000). Diagrams as centerpiece of a Peircean epistemology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, *36*(3), 357-384.