

Thomas KROHN, Leipzig, Karin RICHTER, Halle

## **Historische astronomische Daten und moderne CAS-Rechner Überlegungen zur Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge im Mathematikunterricht der 11. Jahrgangsstufe: Der Komet von 1618**

Die Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge ist oft mit einer typischen Aufgabe verbunden: Aus Messdaten soll ein analytischer Ausdruck abgeleitet werden, der den gegebenen Daten „gut angepasst“ ist. CAS-Rechner stellen hierfür ein leistungsfähiges Werkzeug dar.

Dieser Beitrag greift diese Situation für ein historisches Problem der Astronomie auf: Die Problemstellung der Funktionsergänzung und -anpassung für originale historische Messwerte zur Bahn eines Himmelskörpers, hier: eines Kometen des 17. Jahrhunderts, wird in den Mittelpunkt des vorgeschlagenen Projekts gestellt. Anliegen ist es, an Hand dieser realen, gut überschaubaren Datenbasis Notwendigkeit und Vorgehensweisen der Funktionsapproximation erleb- und nachvollziehbar werden zu lassen und dabei die Leistungsstärke des CAS-Rechners exemplarisch zu testen.

Die wichtigsten Lernziele für die Auseinandersetzung mit dieser Problemstellung sind:

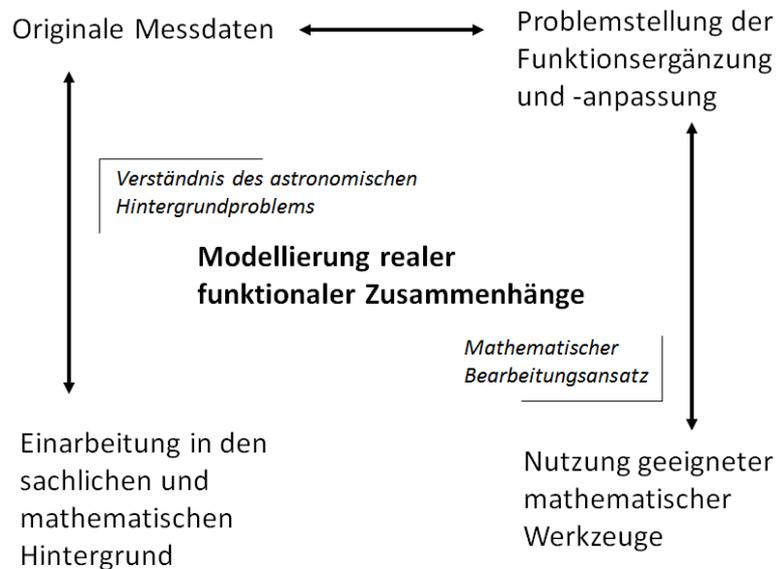
- Umgang mit realen Roh-Daten in überschaubarem Inhaltskontext
- Mathematische Modellierung (Werkzeug: sphärische Trigonometrie)
- Grafische Veranschaulichung des dreidimensionalen Realmodells Himmelskugel
- Statistische Aspekte der Datenaufbereitung
- Funktionsanpassung, -ergänzung, -auswertung zum gewählten Modell

Das im Folgenden kurz beschriebene Projekt ist dreistufig aufgebaut, wobei auch eine arbeitsteilige parallele Bearbeitung durch Expertengruppen mit anschließendem Austausch der Experten denkbar und möglich ist. Je Problembereich und Abschlussdiskussion: ca. 45 Minuten Zeitbedarf.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 671–674).  
Münster: WTM-Verlag

## Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge

Die Modellierung der funktionalen Zusammenhänge mit dem Ziel der Rekonstruktion der scheinbaren Bahn des Kometen an der Sphäre steht dabei im Spannungsfeld zwischen verschiedenen interessanten und für die Lernenden gewinnbringend bearbeitbaren Themenfeldern – inhaltlich und methodisch (vgl. Abbildung).



Daraus leiten sich folgende drei Problemkreise ab, als „Bausteine“ des Projekts, die gemeinsam eine umfassende Bearbeitung der Problemstellung zum Kometen von 1618 ermöglichen, aber jeweils auch so autark und für sich Erkenntnis und Gewinn bringend sind, dass je nach Schwerpunktsetzung einzelne Teile stärker oder weniger stark betont werden können.

### Problemkreis 1 – Astronomischer Hintergrund und originale Daten

Vermutlich nur wenige Lernende werden bereits Erfahrungen im Umgang mit astronomischen Grundbegriffen und Zusammenhängen besitzen. Daher ist es sinnvoll, auf die prinzipiellen Eigenarten von astronomischen Koordinatensystemen an der Sphäre (ähnlich den aus der Geographie bekannten irdischen) und der Positionsbestimmung von Himmelsobjekten in Länge und Breite einzugehen.

Eine gute Hilfe beim Entwickeln des Verständnisses kann das Einbeziehen von 3D-Geometriesoftware sein. Hier lassen sich wahlweise auf dem analytischen Weg oder einfacher durch Probieren und Erleben wichtige Charakteristiken der sphärischen Astronomie nacherleben.

Die Grundlage für die Modellierung der Kometenbahn an der Sphäre bilden dabei originale Daten des Wittenberger Mathematikers Erasmus

Schmidt, publiziert 1619. Diese Daten sind in einer deutschsprachigen Schrift in verbaler Form angegeben (Datum, Länge und Breite), lassen sich durch die Lernenden mit, falls nötig, geringen Hinweisen selbst herausarbeiten und gewähren ein mathematik-historisches Eintauchen in die Art des Experimentierens und der Datengüte im frühen 17. Jahrhundert.

### **Problemkreis 2 – Kartenentwürfe zum Modell der Himmelskugel**

Eine Orientierung auf der Himmelskugel mit Hilfe eines Gradnetzes, das für jeden Punkt der Sphäre eine Charakterisierung durch den zugehörigen Breiten- und Längengrad ermöglicht, stellt ein leistungsfähiges Denkmittel dar. Eine konkrete graphische Veranschaulichung ist dagegen anspruchsvoll, ja schwierig. Die Beschäftigung mit unterschiedlichen Ansätzen für ebene Bilder (Karten) zur Himmelskugel ist durch die Lernenden mit geringen mathematischen und mathematikgeschichtlichen Hinweisen und Hilfen selbsttätig leistbar und führt auf die auch für sich interessante Frage nach sinnvollen mathematischen Anforderungen an Karten.

Aus dieser Beschäftigung mit leistungsfähigen Kartenvorschlägen entwickelt sich die Frage nach einem geeigneten Entwurf für das vorliegende Datenmaterial zum Kometen von 1618 und, damit verbunden, nach der Eintragung und Ergänzung der vorliegenden Daten in der oder auch in den zur weiteren Untersuchung ausgewählten Kartenvorschlägen. Damit leitet dieser Untersuchungsbereich direkt zum Problemkreis 3 über.

Wird in der Beschäftigung mit unterschiedlichen Kartenentwürfen ein Schwerpunkt gesetzt, so bietet sich eine arbeitsteilige Auseinandersetzung mit anschließendem Expertenaustausch an.

### **Problemkreis 3 – CAS-Funktionsanpassung für die gegebenen Daten**

CAS-Rechner bieten in der Regel verschiedene Menüs, die gut geeignet sind, dieses Projekt zu bearbeiten. Mit wenigen einführenden Hinweisen und knappen Übungen zu den grundlegenden Arbeitstechniken wie Eingabe von Daten, Eingabe von Formeln, Anpassung von Funktionen und grafischen Darstellungen wahlweise in den Menüs Tabellenkalkulation, Statistik oder Geometrie können die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Lösungswege erarbeiten. Dabei kann der Schwerpunkt je nach Intention und Vorwissen der Lernenden verschoben werden.

In der Tabellenkalkulation lässt sich nach der Dateneingabe mittels Sinusregression die Kometenbahn modellieren. Zwischenpunkte ohne gegebene experimentelle Daten lassen sich bestimmen, ebenso die vorherige und weitere Kometenbahn. Dies geschieht „auf Knopfdruck“, die Parameter der Sinusfunktion werden sichtbar.

Alternativ bieten sich das Statistik- oder Geometriemenü an. Hier werden zwar ebenso die Punkte eingetragen, jedoch geht es hier vor allem um das systematische Ausprobieren, um über geeignete Diskussion der Parameter der allgemeinen Sinusfunktion eine sich harmonisch an die experimentellen Daten anschmiegende Funktion zu ermitteln.

### **Ist eine erste eigenständige Beschäftigung mit sphärischer Trigonometrie im Kontext astronomischer Beobachtungen sinnvoll?**

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass der Übergang von der 3-dimensionalen Anschauung (der Himmelskugel) zur 2-dimensionalen Wiedergabe in einem ebenen Koordinatensystem (des gewählten Kartentwurfes) ganz besondere Anforderungen an die Lernenden stellt: Zugleich anspruchsvoll, aber durch die Teilung in Problemfelder und deren schrittweiser Erarbeitung zugleich auch überschaubar und zugänglich, gelangen die Bearbeitenden mit einfachen trigonometrischen Überlegungen zu ganz grundlegenden Einsichten. Sie setzen sich kritisch mit der Aufbereitung historisch astronomischer Beobachtungsdaten auseinander und beziehen Neue Medien zielführend in die Untersuchungen ein. Die einzelnen Bausteine bilden dabei in ihrer Gesamtheit einen abgeschlossenen Rahmen des Projekts, können aber auch einzeln ihre Wirkungsfähigkeit entfalten.

Die Thematik der Beschäftigung mit Kometen, zumal im geschichtsträchtigen Jahr 1618 zu Beginn des 30jährigen Krieges, bietet über diese Ansätze hinaus weiteres großes Potenzial, um die mathematischen Untersuchungen interdisziplinär mit geisteswissenschaftlichen Komponenten aus anderen Fächern des Unterrichtskanons abzurunden.

### **Literatur**

- Krohn, T., Malitte, E., Richter, K. (2014). Historische astronomische Daten und moderne CAS-Rechner: Der Komet von 1618. In: Weigand, H. G., Behrens, R. (Hrsg.): *CAS-Rechner im Mathematikunterricht*. CASIO Edu. Projects 2014. In Vorbereitung.
- Schmidt, E. (1619). *Prodromus Conjunctionis Magnae, anno 1623. futurae. Das ist: Kurtzes und Einfeltiges [...] Bedencken*, Wittenberg: Rhöner.
- Bigalke, H. G. (1984). *Kugelgeometrie*. Frankfurt am Main: Salle.
- Hammer, E. (1916). *Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*. Stuttgart: Metzler.
- Herget, W., Malitte, E., Richter, K. (2002). *Neue Materialien für den Mathematikunterricht. Sinusfunktionen*. Hannover: Schroedel.