

Johanna HEITZER, Aachen

Lochkarten zur Primfaktorzerlegung – Plädoyer für die enaktive Rettung einer kaum zu überschätzenden Zahldarstellung

Im Zentrum dieses Beitrags steht ein auf der Primfaktorzerlegung beruhender Lochkartensatz, dessen Eigenschaften aufs Engste mit denen der natürlichen Zahlen zusammenhängen. Dieses nicht elektronische, preiswerte Medium hat eine Reihe didaktischer Vorteile: Schon in der Existenz ‚materialisiert‘ sich der Hauptsatz der Arithmetik, die Anfertigung wirft mathematisch hoch interessante Fragen auf, die Nutzung – gekrönt von der ggT-Bestimmung auf einen Blick – motiviert Entdeckungen über die multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen und schlägt Brücken zu deren auf rein formaler Ebene meist überfordernder Begründung, denn:

„Die Strukturen der Intelligenz können nur durch konkrete Aktivität gebildet werden [...] unter Einbeziehung aller Sinne und größtmöglicher Bewegungsfreiheit.“
Jean Piaget, 1968

1. Blick in den Lehrplan

Die Silbe „prim“ kommt in den KMK-Bildungsstandards und in den meisten Länderlehrplänen nicht vor. Allerdings werden (z.B. im Kernlehrplan G8 von NRW) das Bestimmen von Teilern und Vielfachen, das Anwenden einfacher Teilbarkeitsregeln und vorteilhaftes Rechnen mit ganzen und rationalen Zahlen gefordert. Das ist ohne Kenntnis von Primzahlen schwierig. Tatsächlich fallen Primzahlen implizit schon in der Primarstufe als diejenigen auf, die von keiner der nichttrivialen Einmaleinsreihen getroffen werden, und kommen in den gängigen Unterstufenbüchern vor.

2. Mathematischer Kern

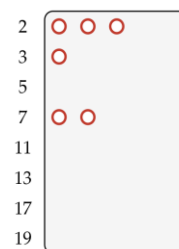
Grundlage des hier zentralen Stücks Mathematik und des Mediums Lochkarten ist der Hauptsatz der Arithmetik: Jede natürliche Zahl größer 1 kann in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden. Diese Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig. Bewiesen werden Existenz und Eindeutigkeit mittels Jagd nach dem kleinsten nicht-primen Verbrecher. Für die Existenz benötigt man die Zerlegbarkeit jeder Nicht-Primzahl in zwei kleinere Faktoren, für die Eindeutigkeit das Lemma von Euklid, nach dem jeder Primteiler eines Produkts zweier Zahlen bereits einen der Faktoren teilt. Waserdicht wurde das gut zwei Jahrtausende alte Ergebnis im 18. Jahrhundert mittels des Lemmas von Bézout bewiesen: Im Ring der ganzen Zahlen kann aus jedem Paar teilerfremder Zahlen die 1 linearkombiniert werden; letztlich durch Umkehren des Euklidischen Algorithmus.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 511–514).
Münster: WTM-Verlag

3. Behandlung in der Schule mit dem Medium Lochkarten

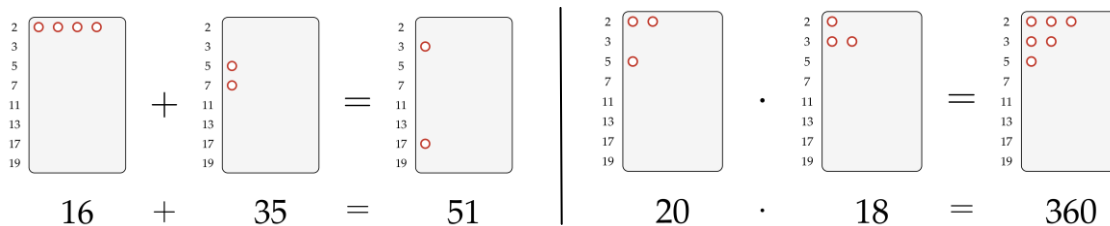
Im Unterricht wird man sich der Hauptsatzaussage eher konstruktiv und unausgesprochen nähern. Beim spielerischen Üben der Teilbarkeitsregeln etwa gewinne zu jeder vorgegebenen Zahl das Produkt mit den meisten Faktoren (die 1 natürlich ausgenommen): Zu 1176 ist dann $2 \cdot 4 \cdot 147$ besser als $8 \cdot 147$, $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 49$ noch besser und $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$ nicht zu schlagen. Systematisieren und Durcharbeiten für genügend Zahlen befördern die Überzeugung von genau einer geordneten Primfaktorzerlegung pro natürlicher Zahl: $1176 = 2 \cdot 588 = 2 \cdot 2 \cdot 294 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 147 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 49 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

Dann kann mit dem Lochkartensatz konfrontiert oder dieser unter Verweis auf die Programmierung der ersten Computer durch Lochkarten entwickelt werden: Die Zeilen gehören der Reihe nach zu den aufsteigenden Primzahlen und werden links beginnend so oft gestanzt, wie letztere in der Zerlegung vorkommen. Rechts sieht man die Karte der 1176.¹



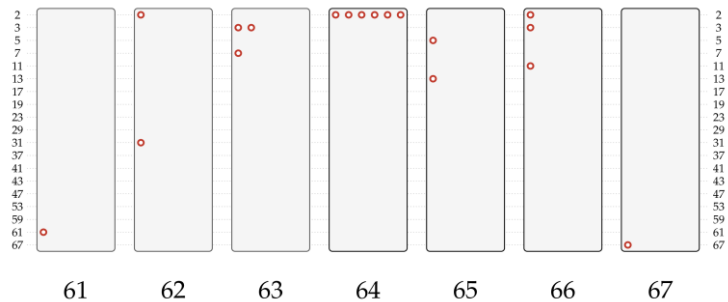
Übersetzungsübungen von der Zahl zur Karte und umgekehrt liefern Denkanstöße und Argumentationsanlässe in natürlicher Weise: Welches ist die kleinste Zahl, die auf keine Karte mehr passt? Welches die größte, die noch darauf passt? Eine Karte hat nur in einer Zeile Löcher. Was kannst du über die Zahl sagen? Woran erkennt man die Karten von Quadratzahlen? Und was ist eigentlich mit der Kein-Loch-Karte? Anschließend mag über interessante Kartenpaare nachgedacht werden: Karte A hat alle Löcher von Karte B und noch einige mehr. Zwei Karten haben nicht ein einziges Loch gemeinsam. Zwei Karten haben das gleiche Lochmuster nur in der Höhe gegeneinander verschoben. Was gilt jeweils für die zugehörigen Zahlen?

Es liegt nah, mit den Zahlenkarten auch einfache **Rechnungen** zu versuchen. Dabei zeigen sich markante Unterschiede: Für Strichrechenarten ist die Kartendarstellung äußerst sperrig. Es geht praktisch nur mittels Hin- und Rückübersetzung. Punktrechenarten dagegen sind mit den Karten einfach: Es handelt sich um das Addieren oder Subtrahieren von Löchern. Bei allen bisher bekannten Zahldarstellungen war das genau umgekehrt!



¹ Bastelanleitungen für den Demonstrationskartensatz und für Schülerkartensätze finden Sie ebenso wie Lösungen und weitere Aufgaben in [Heitzer, 2013].

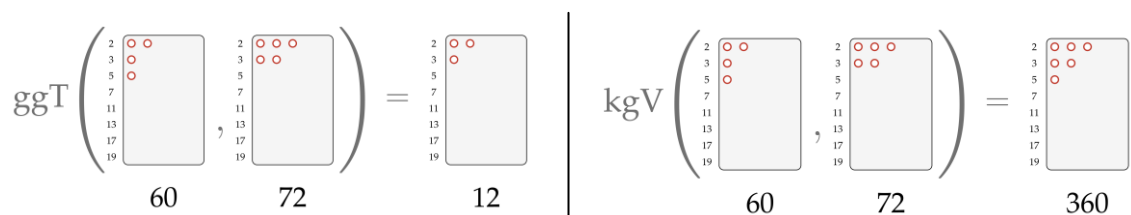
Wie ungünstig die Kartendarstellung für alles Additive ist, zeigt auch einfaches Zählen wie in der Abbildung rechts. Schlicht und regelmäßig stellen sich dagegen geometrische Folgen dar:



Stets kommt nur in der Zeile des konstanten Quotienten ein Loch hinzu.

Ihr ganzes Potential als argumentative Brücke zwischen Kardinalbedeutung und abstrakter Zahldarstellung entfalten die Lochkarten im Bereich der **Teilbarkeitslehre**. Mit elementarer Kombinatorik kann die Teilerzahl bestimmt werden: Gilt für zwei natürliche Zahlen $a|b$, so hat die Karte zu a eine sinnvolle Teilmenge der Löcher der Karte zu b . (Sinnvoll heißt dabei, dass nie eine ungestanzte Stelle links von einem Loch liegt.) Ein Teiler der vorn abgebildeten 1176 kann also in Kartendarstellung 0, 1, 2 oder 3 Löcher in der ersten, 0 oder 1 Loch in der zweiten und 0, 1 oder 2 Löcher in der vierten Zeile haben. Das sind $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ Möglichkeiten, ergo 24 Teiler der 1176. Das allgemeine Ergebnis (Produkt der Nachfolger der Primfaktorexponenten) liegt in greifbarer Nähe.

Warum gerade Löcher als Markierungen gewählt wurden, zeigt sich bei der ggT-Bestimmung: Legt man zwei Zahlenkarten passend übereinander, so gehört das frei bleibende Lochmuster zu deren ggT. Für das kgV bräuchte man transparente Lochkarten. Oder man benutzt eine Auswertungstabelle, in die nacheinander die Lochmuster beider Karten übertragen werden.



Noch interessanter sind die nicht eindeutig lösbaren Umkehraufgaben zu ggT und kgV. Hier kann man wahlweise ‚übersetzen‘ oder ausschließlich innerhalb der Kartendarstellung argumentieren:



Beim ggT sind die ‚Ergebnislöcher‘ für beide Karten Pflicht, die sonstigen Lochmengen müssen disjunkt sein. Beim kgV muss jedes ‚Ergebnisloch‘ auf mindestens einer der Karten, andere Löcher dürfen nicht vorkommen.

4. Zu den Ursprüngen der Idee

Ich habe die Lochkarten erstmals 1995 im Referendariat eingesetzt, ohne recht zu wissen, woher mir die Idee kam. Inzwischen darf ich annehmen, dass Heinrich Winter sie in einem seiner Seminare an der RWTH Aachen erwähnt hatte: Ich habe ähnliche Lochkarten auf seinen Hinweis in [Winter/Ziegler, 1969] entdeckt – dort noch motiviert von per Lochkarten programmierten Rechnern; im ersten Anlauf allerdings mit einer etwas kruden Nutzung der hochpopulären Mengendarstellung. Graphiken suggerieren, man könne zwei Mengen unterscheiden (und zum Schnitt bringen), von denen die eine vier Zweien und eine Drei, die andere je zwei Zweien und Dreien enthält. Nichtsdestotrotz: Die geniale Idee stammt von dort!

5. Zweiter Blick in den Lehrplan und Fazit

Bei genauerem Hinsehen bewegt man sich mit den Lochkarten in der Nähe wichtiger Lehrplaninhalte. Da ist zunächst die Strategie des Faktorisierens (von Zahlen, Termen, Funktionen). Dann stecken hinter der Eignung der Lochkarten für die Punktarten die Potenzgesetze, und der Euklidische Algorithmus ist einer der wenigen exemplarisch zu behandelnden. Vor allem lassen sich an der Primfaktorzerlegung hervorragend eine Reihe der geforderten prozessbezogenen Kompetenzen fördern: „Die SchülerInnen entwickeln Vermutungen und suchen Begründungen, übertragen eine Darstellung in eine andere und vergleichen. Sie argumentieren mathematisch, wählen Darstellungsformen sachgerecht aus, stellen Überlegungen unter Nutzung geeigneter Medien verständlich dar. Sie entwickeln Beweise, gehen verständlich mit Darstellungsformen um und entwickeln problemadäquat eigene.“ (KMK primar, S.7-8, SekI, S.8-9, und SekII, S.17-18)

Wer Bruners Theorie der verständnisfördernden Nutzung von Repräsentationsformen für sinnvoll hält, sollte sich für die Lochkarten begeistern können: Sie werden enaktiv genutzt, sind auf den ersten Blick ikonisch, auf den zweiten aber als „Zeichen mit Kontexten, die ihnen (Spiel-)Regeln auferlegen“ (Lambert 2012, S.18) tief symbolisch.

Literatur

- Heitzer, J. (2013). Lochkarten zur Primfaktorzerlegung. *Mathematik lehren*, 176, 14–17.
- Lambert, A. (2012). Was soll das bedeuten? Enaktiv – ikonisch – symbolisch. In A. Filler, M. Ludwig (Hrsg.): *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht* (S. 5–32). Hildesheim: Franzbecker.
- Padberg, F., Benz, C. (2010). *Didaktik der Arithmetik*, 4. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Winter, H., Ziegler, Th. (Hrsg., 1969). *Neue Mathematik, Klasse 5*. Braunschweig: Schroedel, 201–204.