

Schülerfehler in der Mathematik

Das Problem der Fehler beim Lösen von mathematischen Aufgaben ist in der Didaktik der Mathematik ein wichtiges Thema. Trotzdem kann man in der Literatur nicht viele der Analyse von Fehlern gewidmete Arbeiten vorfinden. In unserem Beitrag möchten wir uns mit einer Klasse von Fehlern beschäftigen, die ziemlich häufig bei unseren Studenten vorkommen. Es sind Fehler, die eine große Resistenz aufweisen. Es ist fraglich ob man diese Fehler als Misskonzepte auffassen kann, da in anderen Kontexten machen denselben Studenten diese Fehler nicht, und wenn befragt, geben sie meistens eine korrekte Antwort. Es geht um das Anwenden von vereinfachten Regeln, welche in einem komplexen Ausdrucke einfach mit den Komponenten arbeiten, ohne auf das Ganze Bezug zu nehmen.

1. Beispiele

Der Fehler, den wir verstehen wollen, kommt in mehreren, auf den ersten Blick unverwandten Kontexten vor. Wir werden drei von diesen Kontexten anführen, aber es existieren sicher weitere ähnliche Situationen, wo die Studenten analog vorgehen.

Der erste Kontext, den wir besprechen möchten ist der Kontext des Potenzierens und damit verwandten Wurzelziehens. In unserem ersten Beispiel kommt der Fehler klar hervor, aber dieselbe Denkweise kann man auch in vielen anderen Beispielen erkennen.

Rovnice

$$1. \sqrt{2x-9+\sqrt{3x-5}} - \sqrt{2x-9-\sqrt{3x-5}} = 2 \quad |^2$$
$$2x-9+\sqrt{3x-5} - 2x+9+\sqrt{3x-5} = 4 \quad \underline{\quad}$$

Das Problem ist nicht, wie auf den ersten Blick erscheinen könnte, mit der zweiten Potenz eines Binoms. Die Studenten kennen die korrekte Regel und derselbe Student, der diesen Fehler gemacht hat, verwenden die Regel für die Zweite Potenz eines Binoms ohne Fehler. Aber im Kontext der mathematischen Analysis, wo die Aufmerksamkeit anderswo gerichtet ist, machen sie solche Fehler.

Unsere Hypothese ist es, dass in solchen Fällen der Student das Problem nicht als eine Umformung des zusammengesetzten algebraischen Ausdruckes sieht, sondern das er ein *Schema des zweckgerichteten Loswerdens*

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 695–698).
Münster: WTM-Verlag

von *Quadratwurzeln* einsetzt. Was uns auf diesem Phänomen interessant vorkommt ist, dass es sich nicht auf das Potenzieren beschränkt. Auch in der anderen Richtung verfahren die Studenten ähnlich.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x-9} + \sqrt{3x-5} - (\sqrt{2x-9} - \sqrt{3x-5}) = 2 \\ & \cancel{2x^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}} + \cancel{3x^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}}} - \cancel{2x^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}} + \cancel{3x^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}}} = 2 \\ & 6x^{\frac{1}{4}} - 10^{\frac{1}{4}} = 2 \\ & \sqrt[4]{6x-10} = 2 \\ & \sqrt{\sqrt{6x-10}} = 2 \quad /^2 \end{aligned}$$

Das Ziel ist es der Quadratwurzel loszuwerden, egal ob durch das Potenzieren, oder wie hier, durch das verteilen des Wurzelziehens auf die einzelne Terme. Was da merkwürdig ist, ist dass die Anzeichen mit den Quadratwurzeln sich irgendwie sich distributiv verhalten. Das Minus vor der Quadratwurzel wirkt an die innere Terme. Und weiter, die Wurzeln addieren sich irgendwie, aber nur bezüglich der Variablen. Die Koeffizienten kommen 'unbeschadet' heraus.

2. Versuch einer Deutung

Wir möchten diese Verfahrensweise bei den Studenten nicht einfach als einen Fehler deuten. Es scheint uns, dass sie eine *innere Logik* oder *kognitive Kohärenz* haben. Es ist schwierig die Studenten von dieser Verfahrensweise zu befreien. Wenn sie auf das Problem aufmerksam gemacht werden, sehen sie den Fehler klar, aber trotzdem machen sie ihm wieder. Deswegen möchten wir eine allgemeinere Deutung versuchen.

Eine Möglichkeit ist die *kognitive Psychologie*, im besonderem die Theorie von Jean Piaget. In dem Buch *Psychogenesis and the history of science* (Piaget und Garcia 1983) haben die Autoren für verschiedene Theorien (Geometrie, Algebra, Mechanik) ein dreistufiges Entwicklungsmodell vorgeschlagen. Nach diesem Model kann man in der Entwicklung einer Theorie die INTRA-, die INTER- und die TRANS- Phase unterscheiden. Die Autoren haben Beispiele in der Entwicklung des Zeichens bei Kindern gegeben. Ein typisches Phänomen, welches die INTRA-Phase kennzeichnet ist, dass das Kind den Dach und den Schornstein eines Hauses korrekt zeichnen kann, aber es zeichnet den Schornstein orthogonal zum Dach. Das heißt, das Kind ist fähig die einzelne Elemente zeichnen, aber es ist noch unfähig

die Beziehungen zwischen ihnen korrekt darzustellen. Dies scheint analog zu dem oben angeführten Phänomen zu sein. Der Student ist fähig die Potenz oder die Quadratwurzel vom einzelnen Term zu bilden, aber er ist nicht in der Lage die Potenzen oder die Quadratwurzeln der verschiedenen Terme miteinander zu koordinieren, die Beziehungen zwischen ihnen korrekt darzustellen. Der Vorteil dieser Deutung liegt darin, dass sie das untersuchte Phänomen in den Kontext der kognitiven Entwicklung des Studenten einbettet. Was aber dieser Deutung widerspricht ist das die Studenten fähig sind die Regeln (zum Beispiel für die zweite Potenz eines Binoms) korrekt anzuwenden, und der Fehler kommt nur im Kontext von komplexeren Aufgaben vor. So scheint es nicht ganz plausibel das Denken der Studenten als die INTRA-Phase der Entwicklung des symbolischen Denkens zu deuten.

Der bekannte Deutsche Physiker und Physikdidaktiker hat in einem berühmt gewordenen Test mehrere hunderte Abiturienten die Frage gestellt, welche Kraft wirkt auf ein, von links oben nach rechts unten auf einer Parabelbahn fliegenden, Ball. Die meisten glaubten, dass außer der Gravitationskraft noch eine weitere 'Schwungkraft' wirkt. Dieses Ergebnis hat mit unseren Beispielen mehrere gemeinsame Züge. Vor allem, die Abiturienten beherrschten die Mechanik in genügender Masse um das Abitur erfolgreich abzulegen (so wie unsere Studenten die Regel für die zweite Potenz eines Binoms beherrschen). Nur in dem Falle des fliegendes Balles haben sie aber spontan reagiert, das heißt, Nachtigall ist es gelungen ihr angeeignetes Fachwissen abzuschalten und eine viel tiefer gelagerte Schicht des physikalischen Denkens zu berühren. Es ist ja nicht schwer in der Antwort der Studenten die Stimme der aristotelischen Physik zu erkennen. So konnten wir die uns interessierenden Fehler auch als ein Auftauchen einer archaischen Form des Denkens interpretieren. Aber auch diese Interpretation scheint nicht plausibel. Im Unterschied zur aristotelischen Physik kann man in dem *zweckgerichtetem Loswerden von Quadratwurzeln* einfach keine logische Konsistenz vorfinden. Die aristotelische Physik ist kohärent und konzeptuell konsistent, nur falsch. Das Denken das auf das Loswerden von Quadratwurzeln gerichtet ist hat keine Kohärenz und konzeptuelle Konsistenz. Es ist nicht plausibel vorauszusetzen, dass irgendwann Mathematik auf diese Weise gemacht werden konnte. Es konnte keine archaische Form des symbolischen Denkens existieren, die so operieren würde, wie unsere Studenten, weil es einfach mit der Wirklichkeit nicht im Einklang wäre. Die Erfahrung die wir mit der Geschichte der Algebra haben (siehe z. B. Kvasz 2008) macht eine Interpretation der angeführten Phänomene als ein Auftauchen einer archaischen Denkweise unwahrscheinlich.

Viel natürlicher als eine psychologische oder eine historische Deutung sollte eine *semiotische Deutung* des oben angeführten Phänomens sein. Es geht doch um Arbeit mit Zeichen, und so sollte es möglich sein die Semiotik zur Hilfe zu nehmen. In der Literatur zur Semiotik in der Mathematikdidaktik, wie (Hoffman Hrsg. 2006, oder Kadunz Hrsg. 2010) konnten wir keine Antwort auf unsere Fragen finden, und so formulieren wir das Problem die oben angeführte Beispiele des Umgehens mit Zeichen zu deuten als ein offenes Problem.

Dank

Die Autoren sind Bernhard Brockmann, Gert Kadunz, Rainer Kaenders und Ysette Weiss-Pidstrygach für nützliche Diskussion und freundliche Unterstützung zu Dank verpflichtet. Schließlich gilt Ihr Dank auch der Grantagentur der Tschechischen Republik für die Unterstützung durch den Grant GA ĀR P407/11/1740.

Literatur

- Hoffmann, M. (Hrsg. 2006): *Themenheft: Semiotik in der Mathematikdidaktik – Lernen anhand von Zeichen und Repräsentationen*, *Journal für Mathematik-Didaktik* **27**, Heft 3/4.
- Kadunz, G. (Hrsg. 2010): *Sprache und Zeichen, Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik*. Franzbecker, Hildesheim.
- Kaenders, R. und Kvasz, L. (2011). Mathematisches Bewusstsein. In: Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G. & Rathgeb, M. (Hrsg.): *Mathematik verstehen*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Kaenders, R., Kvasz, L. und Weiss-Pidstrygach, Y (2011): Recovering mathematical awareness by linguistic analysis of variable substitution. In: M. Pytlak, T. Rowland und E. Swoboda (Hrsg.), *Proceedings of CERME 7*. University of Rzeszow, Rzeszow.
- Kvasz, L. (2008): Sprache und Zeichen in der Geschichte der Algebra – ein Beitrag zur Theorie der Vergegenständlichung. *Journal für Mathematik-Didaktik* **29**, S. 108-123.
- Nachtigall, D. K. (1993): Krise des Physikunterrichts, Fünf Thesen zu einem aktuellen Thema. *Plus Lucis* 1/93, S. 5-9.
- Piaget, J. und Garcia, R. (1983): *Psychogenesis and the history of science*. Columbia University Press, New York 1989.
- Weiss-Pidstrygach, Y., Kvasz, L. und Kaenders, R. (2013): Geschichte der Mathematik als Inspiration zur Unterrichtsgestaltung. In: M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Kroemer, K. Legnink und G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess*. Springer, Wiesbaden.