

André HENNING, Berlin

## **Änderung und Änderungsraten im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I**

Die Analysis in der Schule bringt viele vermeintlich neue Begriffe und Kalküle mit sich, oftmals ohne im engen Zusammenhang mit dem bisher Gelernten zu erscheinen. Vorgestellt werden Ansätze für ein Konzept, das Leitgedanken wie Änderung und Änderungsraten spiralcurricular aufgreift und bis zur Behandlung des Grenzwertbegriffes führt bzw. diese vorbereitet.

### **Forschungsanlass und Forschungsfragen**

Vierorts kommt es, u.a. auch durch die Verkürzung der Schulzeit bis zum Abitur, zu einer starken Komprimierung der Inhalte propädeutischer Analysis am Ende der Klassenstufe 10. Den Schülern werden in Folge der inhaltlichen Reduktion in ihrer Schulzeit weniger Lernchancen auf diesem Gebiet geboten. Da grundlegende Inhalte zur Vorbereitung der Infinitesimalrechnung nicht mehr obligatorisch bzw. stark verkürzt sind, kann der in diesem Bereich geforderte (und notwendige) Kompetenzerwerb vor dem Hintergrund der ohnehin knappen Unterrichtszeit kaum geleistet werden. Vorstellungen zu Aspekten funktionalen Denkens werden nicht in ausreichendem Umfang entwickelt sein oder werden im Unterricht nicht wieder aufgegriffen. Dies widerspricht der Idee des langfristigen Aufbaus von Grundvorstellungen (u.a. vom Hofe 1995) beim Lernenden und entwickelt sich so zu einem langfristigen Problem in der verständnisorientierten Auseinandersetzung mit der Infinitesimalrechnung.

Vollrath (1989) und Malle (2000) beschreiben im Kern drei Aspekte funktionalen Denkens: den Zuordnungsaspekt, den Änderungsaspekt und den Objektaspekt. Für einen reichhaltigen Unterricht ist es wichtig, dass alle diese Aspekte berücksichtigt werden. Malle (2003) konstatiert darüber hinaus auch die Unverzichtbarkeit eines tieferen inhaltlichen Verständnisses der Differenzialrechnung und fordert eine intensive Auseinandersetzung mit den von ihm herausgearbeiteten drei Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten. Diese Forderung lässt sich auf die Forderung nach der Schaffung von Lernanlässen für die generelle Entwicklung von Vorstellungen zum funktionalen Denken erweitern.

Die beschriebene Problematik soll aufgegriffen werden und es sollen systematisch Lernanlässe zu Aspekten funktionalen Denkens, Änderung und Änderungsraten über die Sekundarstufe I hinweg aufgezeigt und ausgeführt werden. Ziel ist es, dass die Lernenden bereits ab Klassenstufe 7 nach und nach  
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 519–522).  
Münster: WTM-Verlag

nach Vorstellungen entwickeln, an die später bei der Einführung der Infinitesimalrechnung angeknüpft werden kann. Um die vollen Curricula nicht zusätzlich zu belasten, soll dabei an die ohnehin in der Sekundarstufe I zu unterrichtenden Inhalte direkt angeknüpft und es sollen diese lediglich mit einem neuen Fokus versehen werden, ohne dass dadurch der zeitliche Aufwand wesentlich erhöht wird. Die Forschungsfragen lauten dementsprechend:

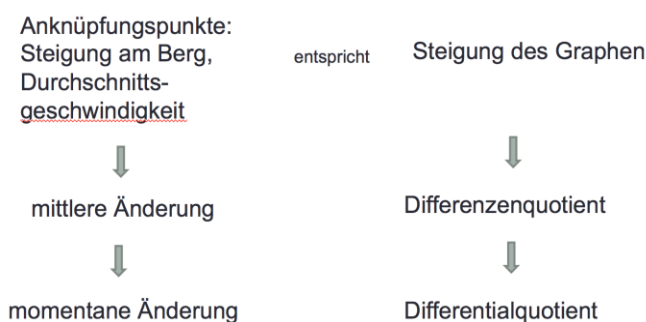
Welche Anknüpfungspunkte bietet der Kanon der Sekundarstufe I für den Aufbau adäquater Vorstellungen zur Propädeutik der Analysis?

Wie können die Anknüpfungspunkte in ein stufenübergreifendes Konzept als fachliches Ganzes gebracht werden?

Welche exemplarischen Experimente und Unterrichtsvorschläge sind zur Umsetzung eines solchen Konzeptes geeignet?

### **Anknüpfungspunkte im Kanon der Sekundarstufe I**

Welche Begriffe bringt die Analysis in der Schule mit sich, über welche Begriffe oder Konzepte sollen die Schülerinnen und Schüler also bereits Vorstellungen entwickelt haben? Einige dieser Begriffe sind „Tangente an einen Graphen“, „Sekantensteigung“, „Tangentensteigung“, „lokale Änderungsrate“, „Bestand“, „Änderung“, „Grenzwert“, „Ableitung“, „bestimmtes Integral“. Alle diese Begriffe haben auf die eine oder andere Weise mit Fragen von Bestand, Änderung und Änderungsraten zu tun. Abbildung 1 zeigt, wie ein möglicher Fokus auf den Begriff „Änderung“ aussehen könnte.



**Abbildung 1**

Es wird deutlich, dass der Aufbau reichhaltiger Vorstellungen zum Differenzenquotienten und zur mittleren Änderung unabdingbar ist, um anschließend Konzepte von momentaner Änderung und Differenzialquotient entwickeln zu können. Hierfür sollen Lerngelegenheiten geschaffen werden. Der Kanon der Sekundarstufe I bietet zu diesen Themen vielfältige Anknüpfungspunkte, einige davon werden im Folgenden vorgestellt.

## Beispiele für Lernanlässe zum Thema „Änderung“

In Klassenstufe 7 lassen sich zwei Lernanlässe identifizieren, die hier kurz vorgestellt werden. Der erste ist die Proportionalität. Proportionale Zusammenhänge lassen sich an Hand von Füllgraphen betrachten. Abbildung 2 zeigt ein GeoGebra-Applet, in welchem mit Hilfe eines Schiebereglers die vergangene Zeit  $t$  verändert werden kann. Im mittleren Fenster ist ein Würfel zu sehen, dessen „Füllstand“ mit sich veränderndem  $t$  variiert. Als Grundannahme wird eine konstante Füllgeschwindigkeit vorausgesetzt. Die vergangene Zeit ist dann proportional zur Füllhöhe, wie man auch dem Diagramm im rechten Fenster entnehmen kann, bei dem jeweils die Füllhöhe zum Zeitpunkt  $t$  mit Hilfe der Spur eines Punktes  $P(t, h(t))$  abgetragen wird. Im Gegensatz zum realen Experiment, ist der Vorgang im Applet bereits idealisiert. Anders als im Experiment kann das Gefäß im Applet tatsächlich gleichmäßig gefüllt werden. Vor dem Einsatz eines solchen Applets ist zunächst einige Vorbereitung notwendig. So ist gerade für Schüler dieser Jahrgangsstufe die Interpretation von Funktionsgraphen ein gänzlich neuer Prozess, der ebenfalls einige Übung verlangt. Die Schüler benötigen hier zunächst ein punktweises Zuordnen, bevor zur Interpretation des Graphen übergegangen werden kann.

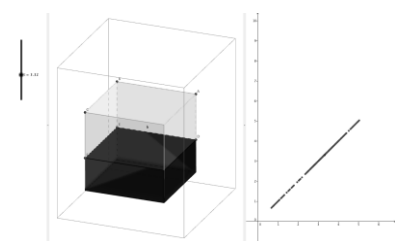


Abbildung 2

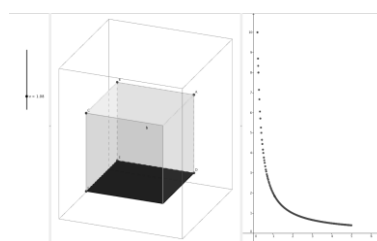


Abbildung 3

Der zweite Bereich sind die antiproportionalen Zuordnungen. Analog zu Abbildung 2 zeigt Abbildung 3 erneut den zu füllenden Würfel. Hier wird jedoch nicht die vergangene Zeit mit Hilfe des Schiebereglers manipuliert, sondern die Füllgeschwindigkeit  $v$ . Im rechten Diagramm wird die Spur des Punktes  $P(v, t_{\max}(v))$  gezeichnet, wobei  $t_{\max}$  die Zeit ist, die es dauert, den Würfel vollständig zu füllen. Um nicht direkt den Graphen zu interpretieren, wäre es hier z.B. möglich fixe Werte für die Füllgeschwindigkeit zu wählen und die Zuordnung zunächst nur punktweise abzutragen.

Beide Applets bieten die Möglichkeit, sich Füllvorgänge dynamisch anzusehen und so auch eine dynamischere Sicht auf funktionale Zusammenhänge zu entwickeln und können in höheren Klassenstufen wieder aufgegriffen werden.

In Klassenstufe 8 kommen Lineare Funktionen und Steigungsdreiecke als neue Unterrichtsinhalte hinzu. Bezogen auf Füllgraphen ermöglicht dies die

Betrachtung zusammengesetzter Körper, die stückweise lineare Füllgraphen ergeben. Diese komplexeren Graphen ermöglichen eine reichhaltigere Auseinandersetzung mit Fragen der Änderung – sowohl auf qualitativem Niveau (schneller, langsamer), als auch auf quantitativem Niveau, indem man Steigungsdreiecke zeichnet und tatsächlich die Steigung berechnet, womit die Schülerinnen und Schüler letztlich erstmals mit dem Differenzenquotienten in Kontakt kommen.

Klassenstufe 9 ermöglicht die Betrachtung noch komplexerer zusammengesetzter Gefäße, deren Füllgraphen nicht mehr nur stückweise linear sind. Das Steigungsdreieck als Werkzeug zur Bestimmung einer mittleren Änderungsrate lässt sich jetzt auch an quadratischen Funktionen einsetzen.

In Klassenstufe 10 kann dann die Anbindung an die Sekundarstufe II erfolgen. An Hand der neuen Klasse der trigonometrischen Funktionen können ebenfalls mittlere Änderungsraten thematisiert werden. Bezogen auf Füllgraphen können jetzt Fragen beantwortet werden wie „Wann hat der Füllgraph einen ‚Knick‘ und was bedeutet das?“ oder „Was passiert am Beginn des Füllvorgangs?“, die zu Grenzwertbetrachtungen und zum Übergang zu lokalen Änderungsraten führen.

### **Fazit und Ausblick**

Die vorgestellten Ansätze sind nur ein kleiner Ausschnitt der für den gewünschten Aufbau von Vorstellungen notwendigen Lernanlässe. Zu untersuchen ist u.a., inwieweit Füllgraphen und die vorgestellten Applets tatsächlich dazu geeignet sind, den Schülern zu ermöglichen, adäquate Vorstellungen zu entwickeln. Wie nah sind solche Füllvorgänge an der Lebenswelt der Schüler? Gibt es die Möglichkeit, Füllvorgänge zunächst tatsächlich experimentell durchzuführen, bevor man Applets einsetzt, die eine deutliche Idealisierung darstellen. Weitere Lernanlässe müssen gefunden und analysiert werden. Hier scheint neben der Mathematik vor allem die Physik weitere Anlässe bieten zu können.

### **Literatur**

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, 103, S. 8-11.

Malle, G. (2003). Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. *mathematik lehren* Nr. 118, S. 57-62.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10, S. 3-37.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum, Akademischer Verlag GmbH.