

Ingmar LEHMANN, Berlin

Jeder macht Vehler – na und?

Im Mathematikunterricht werden Fehler gemacht. Wir können nicht darauf hoffen, sie (alle) zu vermeiden. Erst wenn wir sie analysieren, werden wir solche Erfahrungen sammeln, um einen geeigneten und produktiven Umgang mit Fehlern zu entwickeln.

Es geht darum, Fehler zu erkennen, sie zu nutzen, ohne sie zu diffamieren, ohne den Verursacher zu blamieren. Das Fehlermachen darf im Unterricht kein Tabu sein; die Angst vor Fehlern muss abgebaut werden. Ob harmlose, ungeschickte, vertrackte oder auch tückische Fehler auftreten, sie sollten keinen beschämen, schon gar nicht sollten sie im Regelfall zu schlechten Noten führen. Für das Lernen sollten Fehler als Chance begriffen werden, erst für das Leisten geht es dann um das Vermeiden von Fehlern. Lernen und Leisten in der Sekundarstufe voneinander zu trennen, setzt den Mut voraus, nicht immer nur an die Abiturprüfung zu denken.

Will man die Ursachen aufspüren, kostet das Zeit – Zeit die nicht vergeudet ist. Das Spektrum der Fehler ist jedoch riesig; manche Fehler wird man erst einmal akzeptieren, andere sofort entlarven. Im Einzelfall sollte es auch erlaubt sein, einen Fehler zu zelebrieren und zu genießen!

Zum Umgang mit Fehlern – auch in reformpädagogischen Ansätzen oder in der konstruktivistischen Didaktik – verweise ich auf die einschlägige Literatur (Lorenz & Radatz, 1993; Althof, 1999; Furdek, 2002; Führer, 2004; Käser, 2011).

Wir werden sowohl typische als auch skurrile Beispiele aus den verschiedenen Teilgebieten betrachten und dabei auch nicht vor Fehlern oder Irrtümern zurückschrecken, die selbst großen Mathematikern unterlaufen sind:

- Fehler (nicht nur) zum Schmunzeln,
- intelligente Fehler,
- Fehler und Irrtümer berühmter (und weniger berühmter) Mathematiker,
- arithmetische und algebraische Fehler,
- geometrische Fehler,
- Fehler im Umgang mit Reihen,
- Fehler in der Differential- und Integralrechnung,
- stochastische Fehler.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 711–714).
Münster: WTM-Verlag

Die im Folgenden vorgestellten Fehler können – zum Teil ausführlich – in dem Buch *Magnificent Mistakes in Mathematics* (Posamentier & Lehmann, 2013) nachgelesen werden. Pate standen die bekannten „Klassiker“ von Lietzmann (1913; 1963) und Maxwell (1959).

Schon aus früheren Zeiten ist überliefert, dass Fehler mitunter honoriert worden sind – nämlich mit einem kaiserlicher Dukaten pro Fehler, so man einen solchen in der Logarithmentafel findet, die Georg Freiherr von Vega (1754-1802) aufgestellt hat.

Kommafehler

Die Mär vom hohen Eisenanteil des Spinats geht auf einen Schreibfehler zurück.

Rügen-Zeit

Die St. Marienkirche der Stadt Bergen auf der Insel Rügen ist wahrscheinlich die einzige Kirche in Deutschland – oder sogar weltweit, auf deren Uhr 61 Minuten angezeigt werden.

Zählfehler

Gesucht ist die maximale Anzahl von Gebieten innerhalb eines Kreises, die man erhalten kann, wenn man auf dem Kreisrand n Punkte auswählt und alle Punkte paarweise durch Strecken miteinander verbindet.

Schildbürger

1999 musste die NASA den Verlust der Sonde *Mars Climate Orbiter* beklagen. 2003/04 wurde eine neue Brücke über den Rhein gebaut. Die Bauleitung funkte in die Zentralen: „Laufenburger – wir haben ein Problem“. Was war passiert?

Kreativer Analogieschluss

Grenzwerte von Folgen aus Schülersicht

Dimensionsfehler

Sobald Größen im Spiel sind, geben uns die zugehörigen Maßeinheiten wichtige Hinweise.

Fehler und Irrtümer berühmter Mathematiker

Der Irrtum des Pythagoras (um 570 - nach 510 v. Chr.)

Der Irrtum des Galileo Galilei (1564-1642)

Der Irrtum des Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Der Irrtum des Leonhard Euler (1707-1783)

Der Fehler des William Shanks (1812-1882)

Diese Beispiele lassen sich jeder Zeit ergänzen, etwa durch Fehler und Irrtümer von Marin Mersenne (1588-1648), Pierre Fermat (1607-1665), Chevalier de Méré (1607-1684), Christian Goldbach (1690-1764), Gianfrancesco Malfatti (1731-1807), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Alphonse de Polignac (1817-1890), Henri Poincaré (1854-1912), David Hilbert (1862-1943), Albert Einstein (1879-1955), George Pólya (1887-1985), Nikolai Grigorevich Chebotarev (1894-1947) oder Enrico Fermi (1901-1954), insbesondere auch durch Fehler und Irrtümer zum *Vier-Farben-Problem* (1852).

Arithmetische und algebraische Fehler

Falsches Runden

Dezimalbrüche mit Tücken: $0,\bar{6} \cdot 0,\bar{3}$, $\frac{5}{7} - 0,\bar{75}$, $\frac{3}{7} - 0,\overline{0037}$, $1 - 0,\bar{9}$

Mutiges Kürzen: $\frac{16}{64} = \frac{\cancel{16}}{\cancel{64}} = \frac{1}{4}$, $\frac{26}{65} = \frac{\cancel{26}}{\cancel{65}} = \frac{2}{5}$, $\frac{19}{95} = \frac{\cancel{19}}{\cancel{95}} = \frac{1}{5}$, ...

Division durch null und Logarithmus-Pleiten

Taschenrechner-Unfälle: $\frac{729^{35} - 81^{52}}{27^{69}}$

Prozent-Probleme: Wie viel sind 45 % von 57 € und 57 % von 45 €?

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Unzulässiges Linearisieren – oder: Alles ist additiv?

Missverständnisse rund um die Potenz- und Wurzelgesetze

Geometrische Fehler

Ein rechter Winkel ist gleich einem stumpfen.

Jeder Winkel ist ein rechter Winkel.

Ein Dreieck besitzt zwei rechte Winkel.

Alle Dreiecke sind gleichschenkelig.

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich seinem nichtanliegenden Innenwinkel.

Das Rad des Aristoteles (384-322 v. Chr.)

Das Paradoxon des Proklos (412-485 n. Chr.)

Das Paradoxon von Heinrich C. Schumacher (1780-1850)

Jeder innere Punkt eines Kreises liegt auch auf dem Kreisumfang.

Ein in einem Quadrat einbeschriebenes Rechteck ist ebenfalls ein Quadrat.

Die Summe der zwei zueinander parallelen Seiten eines Trapezes ist null.

Fibonaccis Erbe: $64 = 65$

Eine elegante Konstruktion des Inkreismittelpunktes eines Drachenvierecks

Rollende Münzen

Gesucht ist das Bild dieses Dreiecks, das an einem gegebenen Kreis gespiegelt wird.

Thomsons Lampe – James F. Thomson (1921–1984)

Ein Dreieck im Quadrat – minimal und maximal

Zwei Pyramiden werden genau an- bzw. aufeinander geklebt.

Das Logo eines Mathematikwettbewerbes

Stolpersteine *unendlich* und *Grenzwert*, *Statistik* und *Wahrscheinlichkeit*

Literatur

Althof, W. (1999) (Hrsg.), Fehlerwelten. Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Opladen: Leske + Budrich.

Führer, L. (2004). Fehler als Orientierungsmittel. Vom respektvollen Umgang mit Fehlleistungen. *Mathematik lehren*, 125, S. 4-8.

Furdek, A. (2002): Fehler-Beschwörer Typische Fehler beim Lösen von Mathematik-Aufgaben. Books on Demand.

Käser, U. (2011). Fehler begehen – Mathematik verstehen. Über die Bedeutung von Fehlern für das Verstehen. In: M. Helmerich et al. (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven*. (S. 167-178). Wiesbaden: Vieweg und Teubner.

Lietzmann, W. (1963). *Wo steckt der Fehler? Mathematische Trugschlüsse und Warnzeichen*. Leipzig/Stuttgart: Teubner, 3., durchgesehene und erw. Aufl. [gemeinsam mit V. Trier (1913): *Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler*. Leipzig und Berlin: Teubner.]

Lorenz, J.-H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel.

Maxwell, E. A. (1959). *Fallacies in Mathematics*. Cambridge; Cambridge University Press.

Posamentier, A. S. & Lehmann, I. (2013). *Magnificent Mistakes in Mathematics*. Amherst (New York): Prometheus Books. Also available in ebook format.