Denise LENZ, Halle an der Saale

Untersuchung zum relationalen Denken als Komponente algebraischen Denkens bei Vor-und Grundschulkindern

Aus der Bedeutung der Algebra für die Mathematik einerseits und den Schwierigkeiten zahlreicher Schüler im Algebraunterricht andererseits, die zum Teil auf dessen späten Beginn zurückgeführt werden, ergibt sich die Forderung, algebraisches Denken schon im Grundschulunterricht zu fördern sowie Arithmetik- und Algebraunterricht stärker zu verbinden.
Ein wichtiger Aspekt algebraischen Denkens ist dabei das relationale Denken. In klinischen Interviews mit Vor und Grundschulkindern wurde untersucht, ob und in welcher Weise sie Beziehungen zwischen Mengen, Zahlen und Operationen herstellen. Das Untersuchungsdesign und ausgewählte erste Ergebnisse werden in diesem Beitrag vorgestellt.

Relationales Denken

Algebraisches Denken lässt sich in verschiedene Teilbereiche untergliedern, worunter auch das Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlen, Mengen und Relationen zählt (vgl. Fritzlar & Karpinski-Siebold 2012). Auch das Erkennen und Nutzen von Operationseigenschaften soll in dieser Komponente aufgehoben sein. Relational werden Terme und Gleichungen von einer strukturalen statt einer prozeduralen Perspektive betrachtet. Damit hilft relationales Denken, ein tieferes Verständnis der Arithmetik aufzubauen. Außerdem stellt es eine Voraussetzung für den verständnisvollen Umgang mit der Algebra in den späteren Schuljahren dar (vgl. Carpenter et al. 2003, S.40; Steinweg 2004, S.573).

Forschungsdesign

Jeweils knapp 30 Kindergartenkinder kurz vor dem Schuleintritt, sowie Schüler der zweiten und vierten Grundschulklassen wurden in klinischen Interviews Aufgabenstellungen zur Bearbeitung gegeben. Die Grundschulkinder erhielten dabei in einem ersten Teil Termvergleichs- und Platzhalteraufgaben, mit denen das Erkennen und Nutzen von Relationen zwischen Zahlen und Operationen untersucht wurde. Alle drei Altersgruppen erhielten zudem einen Aufgabenteil, in dem Mengen in Form von kleinen Kisten und Murmeln präsentiert wurden. Dabei wurde untersucht, welche Relationen die Kinder zwischen den teils unbekannten Mengen beschreiben und welche Bearbeitungswege sie im Umgang mit den Aufgaben nutzen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 723–726). Münster: WTM-Verlag

Der Untersuchungsgruppe wurde zunächst eine kleine Rahmengeschichte von den Kindern Tino und Anna erzählt, die Kisten und Murmeln bekommen, wobei gleichfarbige Kisten immer gleich viele Murmeln enthalten. Die Kinder sollen dann bestimmen, wie viele Murmeln sich in den Kisten befinden müssen, damit beide Kinder insgesamt gleich viele Murmeln haben. Dabei ist es bei den ersten Aufgaben möglich, mit konkreten Mengenangaben zu antworten. Später müssen dann für eine allgemeingültige Antwort Beziehungen zwischen zwei unbekannten Mengen hergestellt werden.

Die folgende Aufgabe stellt einen wichtigen Übergang zwischen beiden Aufgabenformaten dar, da noch mit konkreten Mengenangaben zu antworten ist (in den grünen Kisten ist jeweils eine Murmel). Gleichzeitig befindet sich in beiden Schalen eine rote Kiste, deren Inhalt den Kindern nicht bekannt ist.

Folgende Frage wurde den Kindern gestellt: „Wie viele Murmeln müssen in einer grünen Kiste sein, damit beide Kinder gleich viele Murmeln haben?“

Erste Ergebnisse

Bei der Auswertung der Aufgabenbearbeitungen der Kinder zeigten sich bestimmte Vorgehensweisen, von denen drei exemplarisch an oben genannter Aufgabe dargestellt werden.

Strukturieren

Beim Strukturieren werden gleichwertige bekannte und auch unbekannte Teilmengen in Beziehung zueinander gesetzt. Dabei werden je gleiche Mengen benannt und/oder gezeigt. Anhand diesen Zuordnungen ermitteln die Kinder die Anzahl der Murmeln in der gefragten Kiste. Dabei können gleiche Mengen jeweils benannt, gezeigt oder auch aus den Schalen herausgenommen werden.

<u>Anton, Klasse 4</u>
Anton: „Eine.“ Interviewer: „Wie bist du darauf gekommen?“ Anton: „Also...gleicher Wert (*tippt gleichzeitig beide roten Kisten an*)...gleicher Wert (*tippt gleichzeitig die hinteren grünen Kisten an*)...gleicher Wert (*nimmt aus jeder Schale je eine Murmel in die Hand*)...dann müsste das gleicher Wert sein (*behält Tinos Murmel in der linken Hand und tippt damit auf Annas vordere grüne Kiste*).“

Anton bezieht sich jeweils gleichzeitig auf gleichwertige Mengen und ordnet diese einander zu. Daran schlussfolgert er, dass sich in Annas vorderer grünen Kiste eine Murmel befinden muss.

Strukturnutzendes Rechnen

Kinder, die den Bearbeitungsweg des strukturnutzenden Rechnens zeigen, strukturieren einen Teil der präsentierten Mengen, greifen aber in ihrer Erklärung auf die Angabe einer Rechnung zurück. Diese Rechnung wird auf einer Argumentationsebene angegeben, um die Lösung zu legitimieren. Mit Unbekannten wird wie beim Strukturieren als solche operiert. Die roten Kisten mit unbekanntem Inhalt werden dabei als gleich angesehen.

<u>Robin, Klasse 4</u>

Auf die Frage, wie er auf die Lösung, dass sich in den grünen Kisten eine Murmel befindet, gekommen ist, erklärt Robin:

„Weil... (*schaut 10s. zwischen den Schalen hin und her)* eins *(zeigt auf Annas hintere grüne Kiste*) plus eins (*zeigt auf Annas vordere grüne Kiste*) plus die eine Kugel (*zeigt auf Annas Murmel*) drei sind und hier (*zeigt auf Tinos grüne Kiste*) is ja auch eine Kugel drin und (*zeigt auf Tinos Kugeln*) plus zwei lose Kugeln und das is ja dann gleich (*zeigt von Annas roter Kiste auf Tinos rote Kiste*)."

Robin beginnt die Beschreibung seiner Bearbeitung mit „weil...", was eine Argumentationsebene eröffnet. Dann berechnet er die Teilsummen, die sich bei Anna und Tino aus dem Inhalt der grünen Kisten und den einzelnen Murmeln ergeben. Die beiden roten Kisten stellt er als „gleich" heraus. Die angegebene Rechnung scheint Robin nur zur Legitimation seiner Lösung anzugeben, wobei unklar bleibt, wie er seine Lösung letztlich ermittelt hat.

Zahlengebundenes Arbeiten

Beim zahlengebundenen Arbeiten beschreiben die Kinder eine rechnerische Lösungsfindung. Dabei werden alle Kisten mit Anzahlen belegt und die Gesamtsummen der Murmeln beider Kinder berechnet. Im Vergleich zu den anderen beiden Bearbeitungswegen wird auch für die roten Kisten mit unbekanntem Inhalt ein Zahlenwert angegeben.

<u>Doreen, Klasse 4</u>

„Da sind gleich viel (*zeigt gleichzeitig auf beide rote Kisten*). Ich schätze mal, da sind drei drinne. […] Nee, da ein, da zwei (*tippt Annas rote Kiste an*). Zwei (*tippt Tinos rote Kiste an*), das sind vier (*zeigt auf Tinos einzelne Murmeln*). Da ein (*zeigt auf Tinos grüne Kiste*), da doch eine, das sind fünf (*zeigt auf Tinos Schale*). Eine (*hebt Annas einzelne Murmeln kurz an*), zwei...drei (*tippt Annas rote Kiste an*), vier (*tippt Annas hintere grüne Kiste an*), fünf (*tippt Annas vordere grüne Kiste an*). Müssten in den grünen eine sein und in der roten zwei.“

Doreen stellt zunächst die roten Kisten als gleich heraus, belegt diese dann aber mit einem Zahlenwert, den sie anschließend noch ändert. Anhand der angenommenen Werte (zwei Murmeln für die roten Kisten, eine Murmel für die grünen Kisten) berechnet sie die Gesamtsumme von fünf Murmeln bei beiden Kindern. Ebenso wie bei Robin bleibt unklar, wie Doreen die Zahlenwerte - besonders den richtigen Wert der grünen Kisten - ermittelt hat. In ihrer Beschreibung beruft sie sich aber auf diese Zahlenwerte, um die geforderte Gleichheit der Murmelsummen beider Kinder anzugeben.

Ausblick

Nachfolgend steht die Untersuchung an, welche Bearbeitungswege die Kinder im Umgang mit den Aufgaben zeigen, bei denen Beziehungen zwischen unbekannten Mengen in beiden Schalen hergestellt werden müssen und deshalb Antworten mit konkreten Anzahlen nicht mehr möglich sind. Dabei wird die These untersucht, dass Kinder, die vorwiegend strukturierend vorgehen, eher in der Lage sind Beziehungen anzugeben, als Kinder, die Unbekannte mit Zahlenwerten belegen. Ebenso wird untersucht, welche Zahl-und Operationsbeziehungen die Grundschulkinder im Umgang mit dem ersten formalen Aufgabenteil nutzen.

Literatur

Carpenter, T., Franke, M. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School*. Portsmouth: Heinemann.

Fritzlar, T. & Karpinski-Siebold, N. (2012). Algebraisches Denken und mathematische Begabungen im Grundschulalter. In: BzMU 2012, S. 261-264.

Steinweg, A.-S. (2004) Vom Reiz des Ausrechnen-Wollens oder Warum 25+4 auch 54 sein kann... In: BzMU 2004, S. 573-576.