Edith LINDENBAUER, Linz

Mathematikunterricht mit Technologieeinsatz zur Unterstützung des funktionalen Denkens in der Sekundarstufe 1

„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 1989, S. 6). Der Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten wiederum ist typisch für die Mathematik. Malle formuliert (2000) folgende Aspekte des funktionalen Denkens:

- **Zuordnungsaspekt**: Jedem Argument x wird genau ein Funktionswert f(x) zugeordnet.
- **Kovariationsaspekt**: Wird das Argument x verändert, so ändert sich der Funktionswert f(x) in einer bestimmten Weise und umgekehrt.

Kovariationsaspekt von Funktionen

Für das praktische Arbeiten mit Funktionen ist der Kovariationsaspekt sehr wichtig. Empirische Untersuchungen zeigen jedoch, dass vor allem dieser Aspekt des funktionalen Denkens bei Schülerinnen und Schülern unterentwickelt ist (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Malle, 2000; Hoffkamp, 2011).

Im Unterricht kommen Funktionen, die nicht explizit durch Terme dargestellt werden, selten vor. Die Termdarstellung betont dabei den Zuordnungsaspekt von Funktionen. Zudem werden Funktionsgraphen im Unterricht häufig nur statisch betrachtet und dadurch die dynamische Sichtweise, die der Kovariationsaspekt beinhaltet, nicht gefördert.

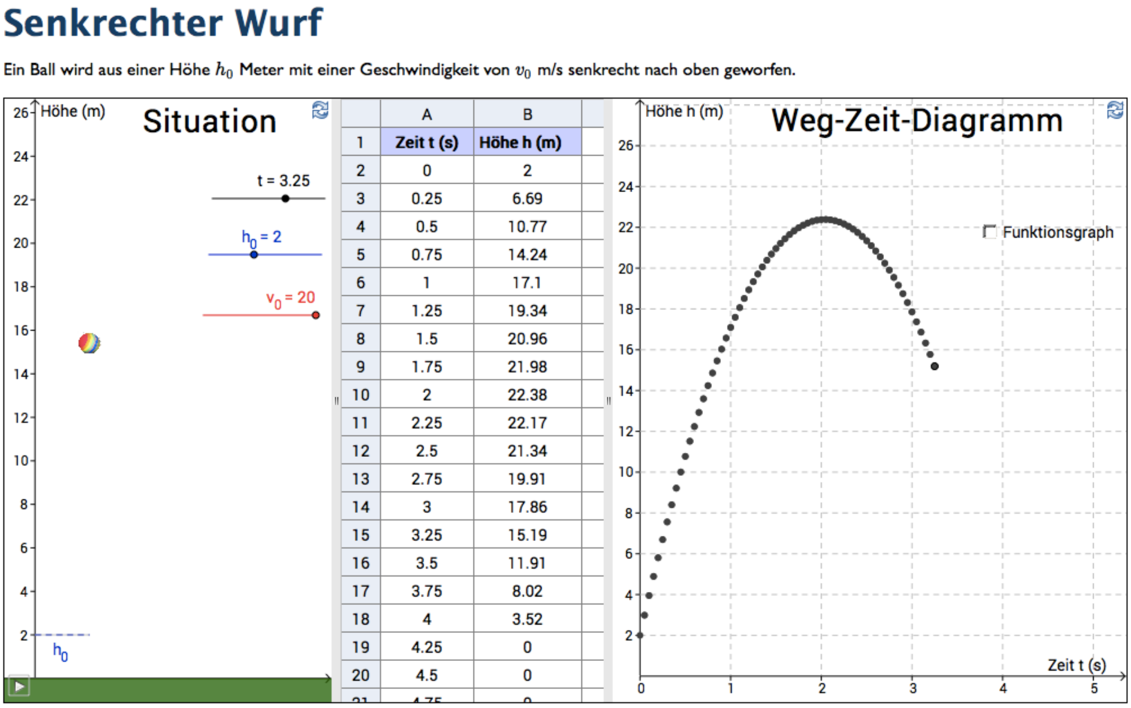
Empirische Untersuchungen scheinen darauf hinzudeuten, dass der Kovariationsaspekt in situativen Einkleidungen leichter erwerbbar ist als im Rahmen von abstrakten Aufgabenstellungen (Malle, 2000; De Bock u.a., 1998).

Dynamische Mathematiksoftware (DMS) wie GeoGebra vereint dynamische Geometrie, Tabellenkalkulation sowie Computeralgebra und ermöglicht die Förderung des funktionalen Denkens (Hohenwarter, 2006). Sie eignet sich durch ihre interaktiven Darstellungen besonders, um den Kovariationsaspekt von Funktionen hervorzuheben. Dadurch soll die Entwicklung des funktionalen Denkens und der Erwerb von Kompetenzen im Zusammenhang mit Funktionen unterstützt werden.

Die folgende Abbildung zeigt die Simulation eines senkrechten Wurfs. Für die Darstellung werden drei Fenster gewählt: eine Situationsdarstellung sowie eine Darstellung der Funktion in Form einer Tabelle und eines Funk-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 743–746). Münster: WTM-Verlag

tionsgraphen. Während die Animation abläuft entsteht parallel dazu im Koordinatensystem eine Darstellung des Funktionsgraphen. Dadurch wird sowohl der Zuordnungsaspekt als auch der Kovariationsaspekt ersichtlich.

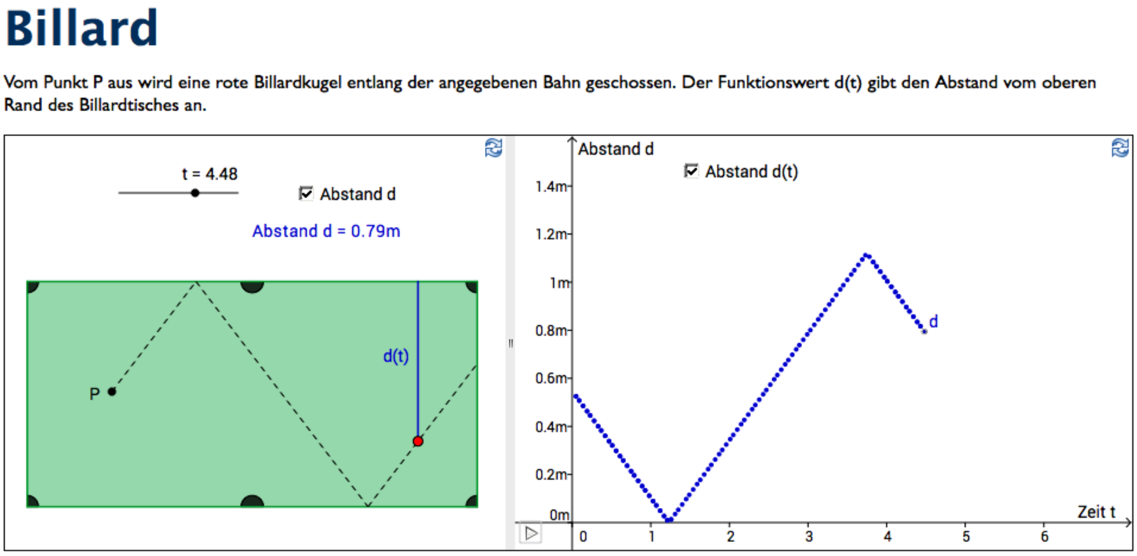


Dieses Applet (siehe http://ggbtu.be/b95856) ermöglicht die Variation innerhalb dieser Anwendungssituation als auch, durch Verändern der Ausgangswerte mit Hilfe der Schieberegler, die Variation der Situation. Ganz bewusst wird dabei nicht die Funktionsgleichung in den Mittelpunkt der Betrachtungen gestellt.

Graph-als-Bild Fehler

Ein mangelhaft entwickelter Kovariationsaspekt von Funktionen ist unter anderem auch erkennbar am Auftreten des Graph-als-Bild Fehlers (Clement, 1989; Schlöglhofer, 2000; Hoffkamp, 2011). In diesem Fall sehen Schülerinnen und Schüler Funktionsgraphen als photographisches Abbild einer Realsituation. Derartige Fehler werden durch den dargestellten Sachkontext entsprechend provoziert und treten daher situationsabhängig auf.

Durch eine bewusste Auseinandersetzung mit solchen Aufgaben soll das Verständnis für die Interpretation von Funktionsgraphen vertieft werden. Ausgangspunkt für ein weiteres dynamisches Arbeitsblatt ist eine Aufgabe von Schlöglhofer (2000).



Dieses GeoGebra-Applet (siehe http://ggbtu.be/b95856) enthält sowohl eine Situationsdarstellung als auch ein Grafikfenster mit dem zugehörigen Funktionsgraphen. Durch eine entsprechende Umsetzung haben Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, zuerst nur die Bewegung der Billardkugel zu betrachten und anschließend eine Hypothese über den Verlauf des Funktionsgraphen zu bilden. Zum Abschluss kann der Funktionsverlauf im Koordinatensystem angezeigt und damit die gebildete Hypothese überprüft werden.

Illusion of linearity

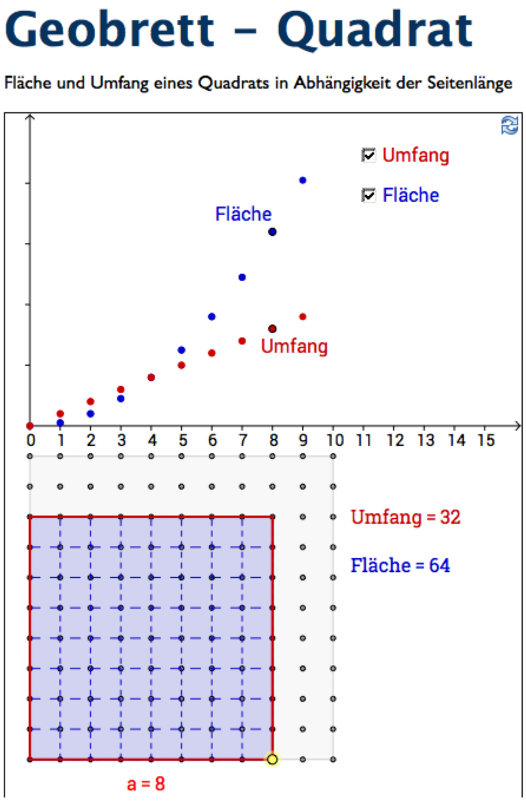
Eine weitere Schwierigkeit von Schülerinnen und Schülern ist die sogenannte „Illusion of linearity". Damit ist gemeint, dass lineare oder direkt proportionale Modelle bevorzugt für die Beschreibung von Relationen verwendet werden (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002; Hoffkamp, 2011). Vielfältige Erfahrungen mit diesen Modellen, vor allem in der Sekundarstufe 1, führen zu der Fehlvorstellung, dass lineare Modelle sozusagen universal anwendbar sind.

Diese Fehlvorstellung der „Illusion of linearity" kann einigermaßen leicht überwunden werden, wenn es um Aufgaben in einem realistischen Kontext geht (De Bock u.a., 1998). Auch hierzu eignen sich die oben beschriebenen dynamischen Arbeitsblätter.

Förderung funktionalen Denkens

Als Vorstufe zum Arbeiten mit Funktionen können bereits in der Primarstufe beziehungsweise zu Beginn der Sekundarstufe 1 funktionale Abhängigkeiten etwa an geometrischen Objekten betrachtet werden.

Im "Geobrett" Applet (siehe http://ggbtu.be/b95856) wird durch Variation der Seitenlänge die Abhängigkeit des Flächeninhalts bzw. des Umfangs eines Quadrats von seiner Seitenlänge dynamisch betrachtet. Damit können Erfahrungen zum Kovariationsaspekt gesammelt werden und durch die Betrachtung des Flächeninhalts zudem ein nichtlinearer funktionaler Zusammenhang untersucht werden.



In einer nun folgenden empirischen Studie möchte ich den Einfluss derartiger dynamischer Arbeitsblätter auf die individuellen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe 1 untersuchen.

Literatur

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1-2),* 77–87.

De Bock, D., Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35(1),* 65–83.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50(3),* 311–334.

Hoffkamp, A. (2011). *Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen: Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse.* Unveröffentlichte Dissertation, Technische Universität Berlin.

Hohenwarter, M. (2006). Funktionales Denken mit der dynamischen Mathematiksoftware GeoGebra. In R. Grothmann (Hrsg.), *Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik.* Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt, Deutschland.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren, 103,* 8–11.

Schlöglhofer, F. (2000). Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *Mathematik lehren, 103,* 16–17.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10*, 3–37.