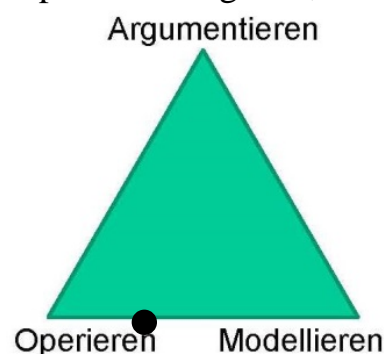


Elementare mathematische Handlungsaspekte

In aktuell diskutierten Kompetenzmodellen zum Mathematikunterricht zum Lehrplan 21 in der Schweiz, zur gemeinsamen Reifeprüfung in Österreich werden jeweils drei Handlungsaspekte aufgeführt. Hier wird gezeigt, wie sich mit den drei Aspekten Operieren, Argumentieren und Modellieren Mathematikaufgaben typologisieren lassen. Dabei bedienen fokussierte Aufgaben nur jeweils einen Handlungsaspekt, komplexere Aufgaben, zum Beispiel Problemlöseaufgaben, umfassen alle Handlungsaspekte.

Instrument für die Typologisierung ist das „mathematische Handlungsdreieck“. Dieses zeigt an den drei Eckpunkten die „elementaren mathematischen Handlungsaspekte“ (Elmhas). Eine Aufgabe lässt sich als Punkt in der Fläche dieses Dreiecks darstellen.



1. Mathematische Handlungsaspekte

Im letzten Jahrzehnt wurden in der Schweiz, Österreich und Deutschland Kompetenzmodelle für den Mathematikunterricht verabschiedet. Diese enthalten jeweils inhaltliche Leitideen und prozesshafte Kompetenzen, jeweils mit wechselnden Bezeichnungen und Anzahlen. Im Folgenden werden die Tätigkeiten mit „Handlungsaspekten“ bezeichnet. Der zurzeit in der Schweiz diskutierte Lehrplan 21 enthält 3 Handlungsaspekte: „Operieren und Benennen“, „Mathematisieren und Darstellen“ und „Erforschen und Argumentieren“. Das für das Standardsetting für die österreichische Reifeprüfung diskutierte Modell (Siller et al 2014) enthält die drei Aspekte „Operieren“, „Argumentieren“ und „Modellieren“. Hier zeigt sich eine weitgehende Übereinstimmung. Im österreichischen Modell werden das Kommunizieren und das Darstellen in die anderen Handlungsaspekte bewusst integriert. Sie müssen bei jeder Aufgabe mitgedacht werden. Im Schweizer Modell sind diese Handlungen in die doppelt bezeichneten Aspekte integriert.

Wichtig ist ein weiterer Unterschied: Mathematisieren umfasst in der Schweiz auch innermathematische Situationen, Modellieren in Deutschland und Österreich nicht. Die innermathematischen Situationen sind im österreichischen Modell ins Argumentieren integriert.

2. Elementare mathematische Handlungsaspekte

In Siller et al (2014) wird ein Kompetenzstufenmodell für die österreichische Reifeprüfung vorgeschlagen. Die Stufen orientieren sich wie bei Meyer (2007) an der Komplexität der Handlungen und der Selbststeuerung. Insbesondere die erste Stufe kann als erste Definition für die Elmhas verwendet werden:

Stufen	Operieren	Argumentieren	Modellieren
1	<ul style="list-style-type: none"> - Identifizieren der Anwendbarkeit eines gegebenen bzw. vertrauten Verfahrens - Abarbeiten / Ausführen einer gegebenen bzw. vertrauten Vorschrift 	<ul style="list-style-type: none"> - Einfache fachsprachliche Begründungen ausführen - das Zutreffen eines Zusammenhangs oder Verfahrens bzw. die Passung eines Begriffes auf eine gegebene (innermathematische) Situation prüfen 	<ul style="list-style-type: none"> - Durchführung eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation - Verwendung vertrauter und direkt erkennbarer Standardmodelle zur Beschreibung einer vorgegebenen Situation mit entsprechender Entscheidung

Die weiteren Stufen benötigen typischerweise ein Zusammenspiel mehrerer Handlungsaspekte. Zu beachten ist, dass die Elmhas nicht einfach verschiedene Handlungsaspekte der Modelle mit mehr Handlungsaspekten zusammenfassen, vielmehr teilen sich die Handlungsaspekte auf: So wird der Kompetenzaspekt „Wissen, Erkennen und Beschreiben“, aus dem Schweizer HarmoS-Modell in die drei Elmhas integriert: Beim Elhma Operieren wird beispielsweise die Kenntnis von Verfahren benötigt, beim Elhma Argumentieren das Wissen um Begriffe und Sätze.

3. Komplexe mathematische Handlungsaspekte

In Bruder (2014) wird vorgeschlagen, Kompetenztrainingslager einzurichten, in denen sich bewusst mit Argumentieren, Modellieren und Problemlösen beschäftigt wird. Bei dieser Methode der Kompetenzentwicklung werden typischerweise mindestens zwei Elmhas angesprochen, wie prototypisch am Beispiel des Problemlösens gezeigt werden soll.

Problemlöseaufgaben beginnen typischerweise mit einer Situation. Ist diese innermathematisch, wird das Argumentieren angesprochen, ist sie aussermathematisch das Modellieren. Aus dieser Situation ergibt sich eine mathematische Darstellung, die mit den für das Problemlösen typischen Heuristiken (z.B. Polya 1995) bearbeitet wird. Hier wird argumentiert und operiert. Schliesslich werden die Ergebnisse interpretiert, also nach den obigen Darlegungen wieder argumentiert bzw. modelliert. Hier zeigt sich ein Vorteil des Modells des Lehrplans 21: Beginn und Ende der Problemlöseaufgabe wären hier eindeutig im Mathematisieren zu verorten.

4. Handlungsdreieck

Durch die Einfachheit des vorgeschlagenen Modells lassen sich die drei Elmhas in einem Dreieck graphisch darstellen. Die Bearbeitung einer Auf-

gabe kann nun als Punkt innerhalb dieser Handlungen beschrieben werden. Dies wird im Folgenden an Beispielen diskutiert.

Handytarife, (KMK 2014)

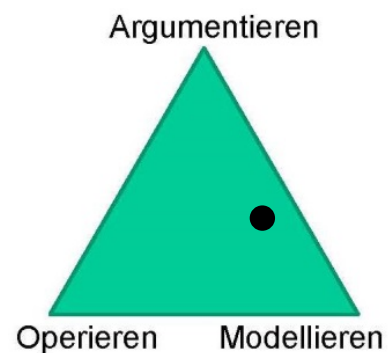
„Katja kauft sich ein Handy. Ihr werden verschiedene Tarife angeboten:

Normaltarif N: Monatsgrundpreis 10,95 €, Kosten pro Minute 0,15€, sekundengenaue Abrechnung

Spezialtarif S: Monatsgrundpreis 0€ Kosten pro Minute 0,39€, sekundengenaue Abrechnung.

... c) Berate Katja bei der Wahl des Tarifs.“

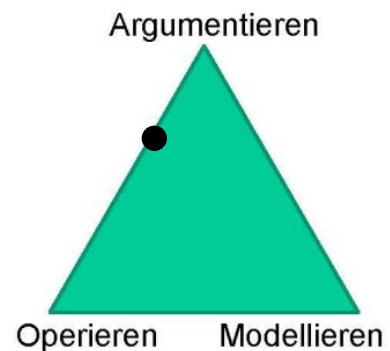
Es braucht eine Modellierung der Gesprächsgewohnheiten von Katja, diese wird bezogen auf die Tarife (modellieren). Dabei wird operiert, bei der Entscheidung dann argumentiert. Diese Aufgabe ist also eine komplexere Aufgabe, die mehrere Handlungsaspekte anspricht, mit Schwerpunkt auf dem Modellieren.



Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen

Ist die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen durch drei teilbar?

Hier muss zunächst experimentiert werden, ob die Aussage bestätigt werden kann (Operieren, 1). Dann wird entschieden, wie die Aufgabe bearbeitet werden soll, beispielsweise operativ durch Betrachtung dreier verschieden hoher Säulen, oder durch allgemeine Beispiele. Schliesslich muss eine Beweisidee gebracht werden – Argumentieren.



Im Schweizer HarmoS-Modell wäre der erste Entscheidungsprozess Mathematisieren, die Mathematisierung müsste also, um die Aufgabe eindeutig einem Handlungsaspekt zuzuordnen, die Mathematisierung vorgeben und ausserdem das Experimentieren zu Beginn einschränken – Das Handlungsdreieck kann dazu dienen, das Profil einer Aufgabe in der Diskussion zu schärfen. In HarmoS (Linneweber, 2009) wird die folgende Variante der Aufgabe formuliert, die vollständig in der Ecke Argumentieren liegt:

„Die Summe $n+(n+1)+(n+2)$ ist immer durch 3 teilbar. (...) Zeige, dass die Behauptung für alle Zahlen stimmt.“

4. Ausblick

In der jetzigen Form kann das Handlungs-dreieck in Aus- und Weiterbildungen eingesetzt werden, um den Blick auf Handlungsaspekte zu richten. Klassenarbeiten können darauf untersucht werden, ob sie verschiedene Elmhäse abdecken. Die Einfachheit des Modells sollte die Akzeptanz erhöhen. Zurzeit sind die Setzungen des Handlungs-dreiecks rein normativ. Das ist, wie in Siller et al (2014) argumentiert wird, zunächst notwendig. Mit den im Frühjahr 2014 in Österreich im Rahmen der schriftlichen Reifeprüfung eingesetzten Aufgaben steht aber eine empirische Prüfung eines Modells mit drei Handlungsaspekten bevor. Zu beobachten wäre dabei, wie sich das innermathematische Mathematisieren einordnen lässt – eher nahe beim Modellieren oder nahe beim Argumentieren.

Literatur

- Bruder, R., Bergmann, L., Krüger, U.-H. (2014): LEMAMOP - ein Kompetenzentwicklungsmodell für Argumentieren, Modellieren und Problemlösen wird umgesetzt. Erscheint in: In J. Roth & J. Ames (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Münster: WTM-Verlag
- Eidgenössische Erziehungsdirektorenkonferenz EDK (2011): Grundkompetenzen für die Mathematik. Nationale Bildungsstandards.
http://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf (14.01.2014)
- Deutschschweizer Erziehungsdirektorenkonferenz D-EDK (2013): Vernehmlassungsentwurf Lehrplan 21 Mathematik.
http://konsultation.lehrplan.ch/downloads/check_pdf.php?b2=1&b3=1&code=5|0&druckzyklus=0 (07.03.2014)
- KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. In: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf. (20.03.2014).
- Linneweber, H., Wälti, B., Moser-Opitz, E. (2009): HarmoS Mathematik. Wissenschaftlicher Kurzbericht und Kompetenzmodell.
http://www.edudoc.ch/static/web/arbeiten/harmos/math_kurzbericht_2009_d.pdf (07.03.2014)
- Meyer, H. (2007). Leitfaden Unterrichtsvorbereitung. Berlin: Cornelsen Scriptor
- Siller, H.-S., Bruder, R., Linnemann, T., Hascher, T., Sattlberger, E., Steinfeld, J., Schodl, M. (2014): Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II – Konkretisierung einer Stufenmodellierung. Erscheint in: In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Münster: WTM.