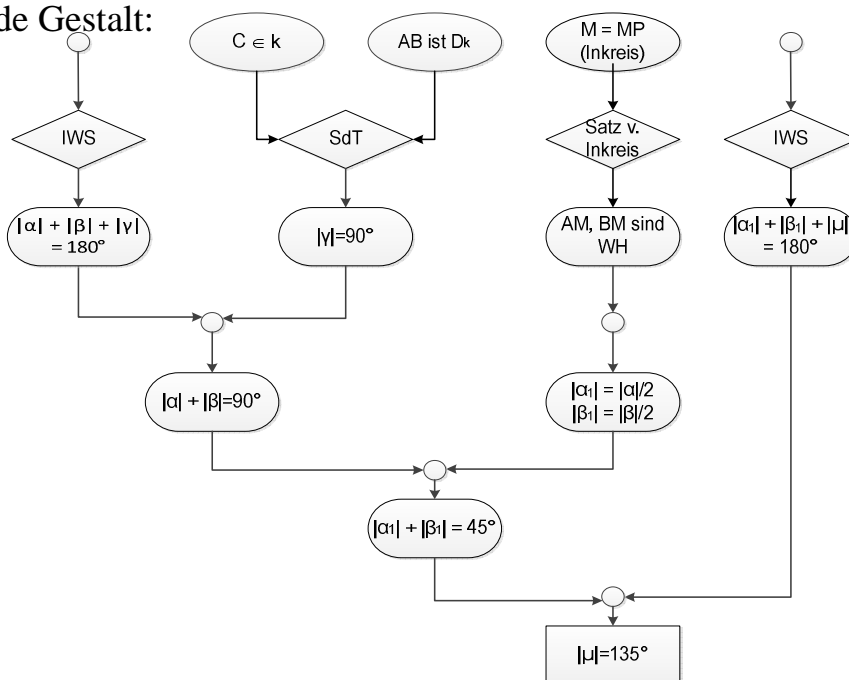


## Gegenüberstellung von Bearbeitungsergebnissen und –prozessen von K10 im HeuRekAP-Projekt

Zur Strukturierung der Bearbeitungsergebnisse sowie –prozesse der Probanden werden Lösungsgraphen sensu Pólya (1919) und König (1992) verwendet. Dies sind gerichtete Multigraphen, in denen mittels Knoten und Kanten Operatoren, Teilziele und Verknüpfungen zwischen diesen dargestellt werden. Die Startgrößen werden dabei durch Ellipsen, die Operatoren mittels Rauten, die Teilziele durch sogenannte Parovale und der Zielzustand als Rechteck dargestellt.

Mittels Transformation der Probandenlösungen in einen normierten Musterlösungsgraphen kann eine Vergleichbarkeit dieser gewährleistet werden. Der Musterlösungsgraph, in denen die meisten der 119 schriftlich erhobenen Schülerlösungen der TIMSS-Aufgabe K10 einbetten, hat folgende Gestalt:

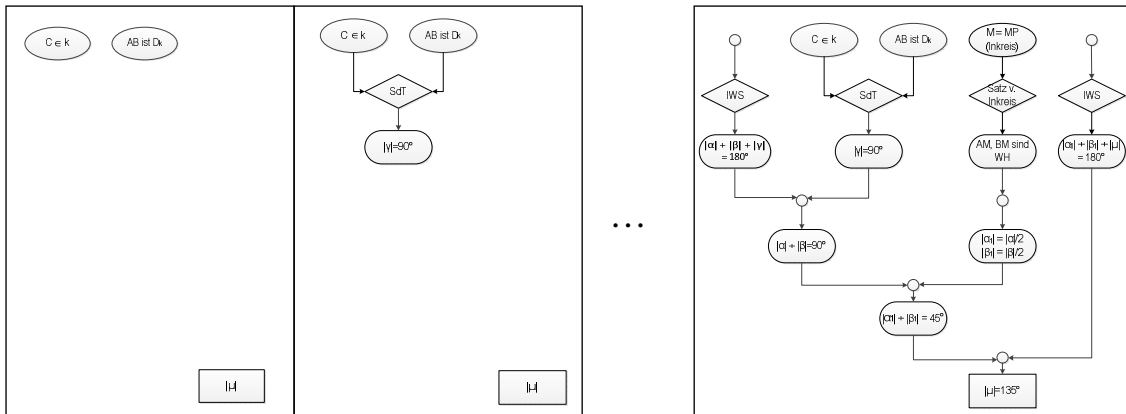


IWS bezeichnet die Innenwinkelsumme und SdT den Satz des Thales.

Die Bearbeitungsergebnisse der schriftlichen Erhebung wurden in diesem Sinne in Lösungsgraphen transformiert.

Analog dazu können die videographierten Lösungen in Lösungsgraphenfolgen transformiert werden. Dabei wird bei jedem Phasenwechsel (Pilous in diesem Band) der bereits bestehende Lösungsgraph um die im Lösungsweg neu hinzukommenden Elemente und/oder Verknüpfungen erweitert.

Diese werden in den Lösungsgraphen aufgenommen, sofern der Proband diese laut ausspricht und /oder verschriftlicht:



Anschließend erfolgt die Bewertung der erhobenen Schülerdaten an Hand des Lösungsgraphen (bei nur schriftlicher Erhebung) bzw. der Lösungsgraphenfolge (bei videografiertem Erhebung). Hierbei werden Punkte für die im Lösungsgraphen vorhandenen Elemente und Verknüpfungen vergeben.

Jeder richtige Knoten wird mit einem Punkt bewertet, jedes teilweise erreichte Teilziel mit einem halben Punkt und bei falschen, fehlenden, zusammenhangslosen oder zusätzlichen Knoten werden keine Punkte vergeben. Ebenso wird jede korrekte Verknüpfung mit einem Punkt bewertet, jede korrekte Verknüpfung zwischen Voraussetzung und Resultat bei fehlendem Operator wird mit einem halben Punkt bewertet und bei ungeeigneter, zusätzlicher oder falscher Verknüpfung werden keine Punkte vergeben.

Somit können maximal 15 Punkte für die Knoten und 20 Punkte für die Kanten erreicht werden, insgesamt 35 Punkte. Bei den Bearbeitungsprozessen mit lautem Denken erhalten wir auf Grundlage der Lösungsgraphenfolge eine Punktfunktion in Form einer Treppenfunktion. Im Gegensatz dazu resultiert aus den schriftlichen Bearbeitungsergebnissen ausschließlich ein Gesamtpunktwert.

Um den Stellenwert der Lösungsgraphen zu verdeutlichen, seien im Folgenden die Eigenproduktionen des Probanden D11 aus beiden Erhebungsformaten gegenübergestellt.

Zunächst scheinen diese beiden Bearbeitungen wenig gemeinsam zu haben, erst die genaue Durchsicht des videografierten Lösungsprozesses sowie die genaue Betrachtung beider Bearbeitungen lassen auf einen ähnlichen Lösungsweg schließen.

Aufgabe 2:

AB ist der Durchmesser eines Halbkreises & C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B), und M ist der Mittelpunkt des Inkreises von ABC. Bestimme den Betrag des Winkels  $\angle AMB$ .

$\delta = 135^\circ$

Nr.	Schritt	Begründung
1	Bestimmen der Höhenlinien (siehe Skizze)	Höhenlinien
2	$\angle F = 90^\circ$	S.d.T.
3	$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$	Z. u. S.
4	Gleichheit von allen Seiten ermitteln $r = r' = r''$	Radius von k
5	$\angle 1$ Winkelhalbierende	W
6	$\angle 1 + \angle 2 = 45^\circ$	W u. S. 1
7	$\angle 2 = 180^\circ - 45^\circ$	W u. S. 6
8	$\angle 2 = 135^\circ$	7 a.e.d.

**schriftliche Erhebung**

Aufgabe 2:

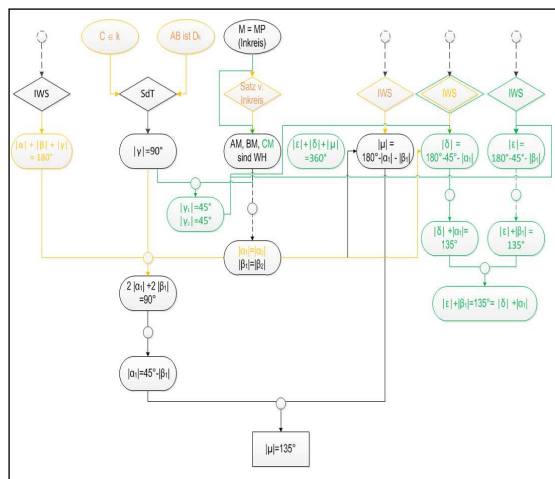
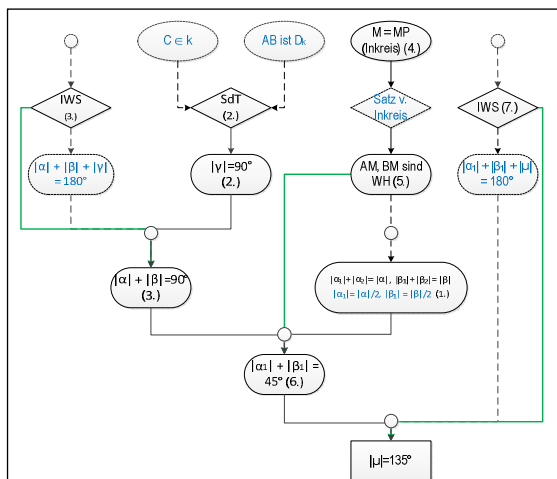
AB ist der Durchmesser eines Halbkreises & C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B), und M ist der Mittelpunkt des Inkreises von ABC. Bestimme den Betrag des Winkels  $\angle AMB$ .

$\angle \gamma = 180^\circ - 45^\circ - |\alpha_1|$   
 $\angle \delta = 180^\circ - 45^\circ - |\beta_1|$   
 $\angle \epsilon = 180^\circ - 45^\circ - |\alpha_1|$

$|\alpha_1| + |\beta_1| = 90^\circ$   
 $|\delta_1| + |\epsilon_1| = 90^\circ$   
 $|\delta_1| = 180^\circ - 45^\circ - |\beta_1|$   
 $|\epsilon_1| = 180^\circ - 45^\circ - |\alpha_1|$   
 $|\delta_1| = 135^\circ$

**videographierte Erhebung**

Betrachtet man hingegen den Lösungsgraphen der nur schriftlichen Erhebung sowie den finalen Lösungsgraphen der Lösungsgraphenfolge des videographierten Prozesses, so ist sofort ersichtlich, dass es sich um einen ähnlichen Lösungsweg handelt.



Alle sich im Lösungsgraphen befindlichen Linien, die nicht durchgezogen sind, symbolisieren die im Musterlösungsgraphen vorgesehenen Elemente und/ oder Verknüpfungen, die vom Probanden nicht genannt oder verschriftlicht wurden. Die orange eingefärbten Graphenelemente symbolisieren vom Probanden gewusste, jedoch erst auf Nachfrage (Teil 2 der videographierten Erhebung) kommunizierte Elemente und/ oder Verknüpfungen. Grüne Elemente hingegen symbolisieren zusätzliche Graphenelemente,

welche zwar mathematisch korrekt sind, jedoch nicht zur Erreichung des Zielzustandes verwendet wurden.

Unter Berücksichtigung dieser Konventionen wird ersichtlich, dass der Proband wahrscheinlich bereits bei der schriftlichen Erhebung die Voraussetzungen für den Satz des Thales gekannt hat. In der videographierten sowie schriftlichen Erhebung benennt der Proband diese zwar nicht, auf Nachfrage seitens des Versuchsleiters („Erkläre mir, was du an dieser Stelle gemacht hast.“) erfolgt jedoch eine umfassende Erklärung („Also ich habe das, mir das Dreieck angeschaut und da es ein Halbkreis ist heißt das dass A und B ein Durchmesser sein muss und das heißt dass laut dem Satz des Thales der Winkel bei C neunzig Grad sein muss. Denn der Satz des Thales sagt aus dass wenn A und B ein Durchmesser des Kreises ist der Winkel bei C sofern er auf dem Kreis liegt und verschieden von A und B ist ein neunzig Grad Innenwinkel hat wenn man das Dreieck zeichnet.“). Selbiges gilt für den Satz vom Inkreis. Auch hier lässt sich vermuten, dass der Proband über dieses Hilfsmittel bereits bei der schriftlichen Erhebung verfügte.

Es ist deutlich zu erkennen, dass der Proband im Rahmen der schriftlichen Erhebung erheblich mehr Teilziele mit einander verknüpft hat. Grund dafür könnte zum einen das veränderte Erhebungsformat oder auch die bei der schriftlichen Erhebung verwendete Systematisierungshilfe in Form des Zwei-Spalten-Beweises sein. Dieser Sachverhalt schlägt sich vor allem bei der Bewertung der Lösungsgraphen nieder. Bei der schriftlichen Erhebung erreichte der Proband insgesamt 20 Punkte (jeweils 10 Punkte für Knoten und Kanten), bei der videographierten Erhebung hingegen erreicht der Proband 16,5 Punkte (10 Punkte für die Knoten und 6,5 Punkte für die Kanten). Die zusätzlichen grün markierten Knoten und Verknüpfungen, haben keinen Einfluss auf den hier notierten Punktwert, da diese zwar mathematisch korrekt sind, vom Probanden jedoch nicht für den endgültigen Lösungsweg verwendet wurden. Das Notieren dieser zusätzlichen Elemente entspricht einer heuristischen Strategie des Probanden („Also eigentlich. Früher hab ich immer erst mal die ganzen Formeln hingeschrieben damit ich schon mal einen ersten Überblick bekomme und hab mir dann überlegt wie ich weiter arbeiten kann.“). Folglich erfahren diese eine gesonderte Betrachtung und werden als heuristische Elemente gewertet.

## Literatur

- König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. In: *Der Mathematikunterricht*, 38 (3). S. 24-38.
- Pólya, G. (1919). Geometrische Darstellung einer Gedankenkette. *Schweizerische pädagogische Zeitschrift*, 29(2), 53–63.