

Sebastian MUNGENAST, Würzburg

## **Ein Modell zur Beschreibung metakognitiver Aspekte beim mathematischen Begriffsverständnis**

Im Rahmen des gleichnamigen Promotionsprojektes wurde ein Modell entwickelt, das den Metakognitionsbegriff in drei Komponenten gliedert, die für das Lernen und Anwenden von Mathematik – dabei besonders im Bereich des Begriffsverständnisses – von Bedeutung sind.

Diese Komponenten sollen im Rahmen einer empirischen Untersuchung sowohl eigenständig, als auch in Wechselbeziehung zueinander untersucht und ihre Auswirkungen auf mathematische Performanz im Bereich der Grundbegriffe der Analysis anhand eines Leistungstests erhoben werden, um somit die Tragfähigkeit des entwickelten Modells zu überprüfen.

Da auf mathematischer Seite der Bereich der Analysis – und dabei speziell der Ableitungsbegriff – im Mittelpunkt stehen, bieten sich Schülerinnen und Schüler ab der zehnten Klassenstufe des Gymnasiums als Zielgruppe für eine Untersuchung an.

Eine vielfach diskutierte Frage in der Mathematik-Didaktik ist die nach Umfang und Strenge der Behandlung des Grenzwertbegriffs und in Folge dessen auch des Ableitungsbegriffs (vgl. etwa Weigand 1993, Danckwerts & Vogel 2006). Dies betrifft beispielsweise die Integration verschiedener Sichtweisen des Begriffs (so z.B. als Grenzwert des Differenzenquotienten, geometrisch als Steigung der Tangenten oder als momentane Änderungsrate und physikalisch als Geschwindigkeit) und deren Zusammenhänge, sowie allgemein die Frage, welche Bedeutung für den Lernenden stärker intuitive Zugänge im Vergleich zu formalen Konzepten haben, bzw., wie beide Herangehensweisen sich verbinden lassen. Es ergibt sich insbesondere die Frage, wie Schülerinnen und Schüler sich dieser unterschiedlichen Aspekte bewusst sein können (vgl. etwa Weigand 1993).

Unabhängig von konkreten mathematischen Begriffen sollten im Umgang mit Mathematik darüber hinaus ein Bewusstsein für den eigenen Lernfortschritt und eigene Stärken und Schwächen entwickelt werden, sowie die Fähigkeit, entsprechend zu handeln und sich fehlende Informationen und Methoden eigenständig zu erarbeiten.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 843–846).  
Münster: WTM-Verlag

Kenntnisse wie die genannten lassen sich dem Bereich der Metakognition – Wissen über eigenes Wissen und eigene Fähigkeiten – zuordnen (vgl. etwa Flavell, Miller & Miller 2002).

Unter „Metakognition“ werden im Allgemeinen Wissen über eigene kognitive Vorgänge sowie die Fähigkeit, diese zu überwachen und zu regulieren, verstanden. Eine mögliche Unterscheidung in der Psychologie ist hierbei die zwischen deklarativem, prozeduralem und konditionalem Metawissen (Veenman 2012).

In dem vorliegenden Modell wurden drei Kategorien/Komponenten identifiziert, die das Wirken von Metakognition im Bereich der Mathematik beschreiben.

Ausgehend von der ursprünglichen – sehr allgemeinen – Definition des Metakognitionsbegriffs als „Wissen über Gedächtnis“, bzw. über Wissen (Flavell 1976) wird hier ebenfalls eine Definition gewählt, die den Begriffsumfang über die Anteile Planung, Steuerung und Reflexion hinaus um eine **„fachbezogene“ Komponente** erweitert, die im Wesentlichen für „Wissen/Denken über Fachwissen“ und daraus abzuleitende Konsequenzen für den Umgang mit diesem steht.

Hierbei geht es vor allem um die Reflexion über Begriffe und ihre Zusammenhänge. Metakognition besteht hier darin, sich bewusst und kritisch mit entsprechenden Inhalten auseinanderzusetzen, „gedankliche Konflikte“ als solche zu erkennen und eigene Vorstellungen zu entwickeln, zu hinterfragen und zu erweitern. Es geht darum, Antworten zu finden, die einem Bedürfnis nach Verständnis gerecht werden, dabei insbesondere die Wechselbeziehung zwischen Formalismus und intuitiven Vorstellungen aufzeigen, sich also nicht in der formal-logischen Richtigkeit mathematischer Aussagen erschöpfen.

Metakognitive Aspekte sollen insbesondere im Rahmen des Begriffslernens (Stufenschema nach Vollrath 1984) untersucht werden, da Begriffe den Kern des mathematischen Denkens darstellen (siehe etwa Wittenberg 1957). Der Prozess der Begriffsbildung lässt sich in einem Stufenschema zum Begriffsverständnis darstellen, wobei sich das Begriffsverständnis über ein intuitives, inhaltliches, integriertes und kritisches Begriffsverständnis entwickelt (Vollrath 1984).

Metakognitive Fähigkeiten lassen sich vor allem mit der Stufe des Kritischen Begriffsverständnisses identifizieren. Dies bedeutet die bewusste, kritische Auseinandersetzung mit den eigenen Kenntnissen und Kompetenzen, die durch die anderen Stufen des Stufenschemas beschrieben werden. Metakognition zeigt sich hierbei in der Tendenz, über fachliche Inhalte und

eigenes Wissen nachzudenken und über im Unterricht erworbene Fachkenntnisse hinaus Fragen zu stellen, die diese Kenntnisse erweitern und vertiefen können; des Weiteren darin, für mathematische Sachverhalte eigene Vorstellungen zu entwickeln, indem nach Möglichkeiten gesucht wird (durch Reflexion), diese aus anderem Blickwinkel zu betrachten.

Auf einer teils überfachlichen Ebene steht die **subjektbezogene Komponente**, bei der es um die Fähigkeit zur Selbsteinschätzung geht. Metakognition besteht hierbei im Wissen um eigene Stärken und Schwächen (in Bezug auf die Mathematik), der Beurteilung der eigenen „Kompetenz“, sowie der gezielten Suche nach Verständnismängeln und der Fähigkeit, selbstständig Möglichkeiten zu deren Überwindung zu finden und zu entwickeln.

Bei der **überfachlichen Komponente** geht es um die übergeordnete Steuerung von Prozessabläufen – z.B. Arbeits-, Lernprozesse, Klausurvorbereitung, Organisation von Projekten. Unter Einbeziehen der bereits erwähnten Komponenten und diesbezüglicher Informationen werden hierbei (längere) (geistige) Prozesse geplant, überwachend begleitet (Monitoring) und im Anschluss reflektiert und beurteilt. (vgl. etwa Cohors-Fresenborg 2001)

Überfachlich	Subjektbezogen	Fachbezogen
<ul style="list-style-type: none"> <li>•Organisation von Lern- und Arbeitsprozessen</li> <li>•nicht mathematikspezifisch</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Bewertung eigener mathematischer Fähigkeiten</li> <li>•Kenntnis von Lerntechniken</li> <li>•Gefühl für eigenes Verständnis</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Analyse mathematischer Ausgangslage und Auswahl von Strategien</li> <li>•Kritisches Hinterfragen, Reflexion von mathematischem Wissen</li> </ul>

Zur Stützung des entwickelten Modells ist eine empirische Untersuchung angedacht, die in der nächsten Phase des Projekts entwickelt werden soll.

Überlegungen hierzu sind bisher vor allem im Bereich der fachbezogenen Komponente angestellt worden.

Zur Evaluation der fachbezogenen Komponente ist es geplant, eine Sammlung von Aufgaben mit zugehörigen Musterlösungen zu erstellen, die von Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Dabei soll die jeweils vorliegende Aufgabe mit Lösung analysiert und erläutert werden, Ungenauigkeiten und Fehler in der Lösung erkannt und problematisiert/korrigiert werden, sowie die (möglichen) Denkschritte und -fehler der Verfasserin/ des Verfassers interpretiert werden. Damit soll untersucht werden, inwieweit Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, mathematische Texte zu

lesen und zu entscheiden, ob diese für sie Sinn ergeben, ob also ein Bewusstsein für Folgerichtigkeit und Plausibilität der vorliegenden Lösung und das eigene Verständnis besteht; außerdem die Fähigkeit, die Gedanken einer anderen Person nachzuvollziehen und deren Strategien (Fehl-)Vorstellungen zu erkennen. (s. auch Grotzer & Mittlefehldt 2012)

Zum Feststellen planerischer, überwachender und reflektorischer Tätigkeiten sind dabei entsprechende Schlüsselbegriffe zu beobachten. (vgl. etwa Cohors-Fresenborg 2007)

Im Anschluss an die genannten Untersuchungen soll ein Leistungstest durchgeführt werden, um zu klären, inwieweit sich Auswirkungen metakognitiver Aktivität auf die Performanz im fachwissenschaftlichen Bereich feststellen lassen.

## Literatur

- Cohors-Fresenborg, E. (2001). Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht, 2001*, 145-148. Hildesheim: Franzbecker
- Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. (2007). Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile. In: Peter-Koop, A., Bikner-Ahsbals, A. (Hrsg.): *Mathematische Bildung – Mathematische Leistung*, (S.233 – 248). Hildesheim: Franzbecker.
- Danckwerts, R., Vogel, D. (2006), *Analysis verständlich unterrichten*, München
- Friedrich, H. (2001). Eine Kategorie zur Beschreibung möglicher Ursachen für Probleme mit dem Grenzwertbegriff. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 22, 207-230
- Flavell, J.H. (1976). Metacognitive Aspects of problem solving. In: Resnick, L.B. (Hrsg.). *The nature of intelligence* (S. 231-235). Hillsdale: Erlbaum
- Grotzer, T., Mittlefehldt, S. (2012). The Role of Metacognition in Students' Understanding and Transfer of Explanatory Structures in Science. In: Zohar, A., Dori, Y.J. (Hrsg.). *Metacognition in Science education: Trends in Current Research*, 79-99, Contemporary Trends and Issues in Science Education 40. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer
- Veenman, M.V.J. (2012). Metacognition in Science Education: Definitions, Constituents, and Their Intricate Relation with Cognition. In: Zohar, A., Dori, Y.J. (Hrsg.). *Metacognition in Science education: Trends in Current Research*, 21-36, Contemporary Trends and Issues in Science Education 40. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett
- Weigand, H.-G. (1993). *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*, Überarbeitete Habilitationsschrift. Mannheim: BI
- Wittenberg, A. I. (1957). *Vom Denken in Begriffen*. Birkhäuser