

Dagmar MELZIG, Essen

Vom Konkreten zum Abstrakten. Der Variablenbegriff im Mathematikunterricht

In diesem Beitrag gebe ich anhand eines Fallbeispiels einen Einblick in Teilergebnisse meiner Dissertation (Melzig 2013). Hierbei nehme ich den Nutzen von konkretem Anschauungsmaterial bei der Einführung des Variablenbegriffs in den Fokus.

Die Aufgabe „Knack die Box“

Die folgende Aufgabe nutzt konkretes Material zur Darstellung einer Gleichung mit zwei Unbekannten. Schwarze und weiße Boxen sind im gegebenen Kontext Stellvertreter für ihre gesuchten, unbekannt Befüllungen mit Bohnen – also die Symbole für die Unbekannten in der materiell repräsentierten Gleichung. Getrocknete weiße Bohnen werden als Zählobjekte verwendet. Die Idee zu dieser Aufgabe stammt aus dem mathbu.ch 7 (Affolter, W. u. a. 2003, S. 32 f.). Dort liegt sie in ähnlicher Form vor.

Legt mit Bohnen und leeren Boxen die beiden folgenden Anordnungen:

Anordnung A	Anordnung B
■ ■ ····	□ □ □ ···

Nehmt Bohnen aus dem Bohnenvorrat und füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

- *In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammgezählt).*
- *In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen.*

Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen?

Erfindet selbst solche Paare von Anordnungen! Versucht die Boxen so zu füllen, dass die beiden Bedingungen von oben erfüllt sind. Gibt es immer (mehrere) Möglichkeiten die Boxen entsprechend zu füllen?

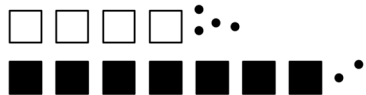
Vielleicht helfen Euch Tabellen der folgenden Art beim übersichtlichen Aufschreiben Eurer Ergebnisse!

Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box					
Anz. der Bohnen in einer weißen Box					

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 803–806).
Münster: WTM-Verlag

Ein Fallbeispiel

Im Folgenden sollen Transkriptausschnitte der Arbeitsphase einer Jungengruppe einer siebten Klasse eines Gymnasiums näher betrachtet werden, in der sich die Schüler mit einer selbsterdachten Boxensituation beschäftigen. Die Schüler haben ihre Boxensituation mit konkreten Boxen (Streichholzschachteln) und Bohnen auf ihrem Tisch aufgebaut, wobei sie die beiden Anordnungen in zwei Zeilen gelegt haben:



Die Schüler verwenden ein systematisches Verfahren zur Ermittlung der Lösungen, welches durch folgende Schritte gekennzeichnet ist:

- Anzahl der Bohnen in einer schwarzen Box festlegen;
- Gesamtzahl der Bohnen in der Anordnung mit den schwarzen Boxen bestimmen;
- die vier einzelnen Bohnen aus der Anordnung mit den weißen Boxen von dieser Gesamtzahl abziehen;
- überprüfen, ob sich die verbliebene Anzahl Bohnen glatt auf die vier weißen Boxen aufteilen lässt und ggf. das Ergebnis der Aufteilung ermitteln.

Die Schüler nutzen hier zwar keine symbolische Darstellung, wenden aber ein sehr elaboriertes Verfahren zur Lösung des Problems an. Wenn sie eine Festlegung für die Befüllung der schwarzen Boxen treffen, arbeiten sie hypothetisch, da sie noch nicht wissen können, ob diese Befüllung tatsächlich zu einer Lösung führen wird. Anhand ihrer Wortwahl lässt sich belegen, dass ihnen dabei bewusst ist, dass ihre Festlegung zunächst hypothetisch ist und sich noch bewähren muss, auch wenn man zunächst einfach mit ihr arbeitet (vgl. Melzig 2013, S. 115 f.).

Anhand von zwei Transkriptausschnitten soll im Folgenden der Umgang der Schüler mit dem Material näher betrachtet werden. Wir beginnen mit der Äußerung von Nils, in welcher er eine erste Lösung findet. Während dieser Äußerung liegen auf jeder schwarzen Box zwei Bohnen. Zunächst wird nur der verbale Anteil der Äußerung wiedergegeben:

Nils: „Ok, wieviel sind das, zwei, 14, 16 minus vier 12, dann muss hier drei. Zwei, drei.“

Auf der sprachlichen Ebene gibt es hier keine expliziten Verweise auf das Material – es wird nicht von Boxen und / oder Bohnen gesprochen. Ledig-

lich indirekte Verweise durch ein Demonstrativ-Pronomen („das“) und ein ortsbestimmendes Adverb („hier“) sind zu finden. Dass diese tatsächlich auf das Material verweisen, lässt sich auch nur aus unserem Vorwissen schließen – aus der Äußerung allein kann man nicht auf die Existenz von irgendwelchem Material schließen. Um das Gesagte für Mit-Lernende und Beobachterin also überhaupt erst interpretierbar zu machen, müssen die auf das Material bezogenen Gesten und Handlungen mitbetrachtet werden. Also noch einmal die diesbezüglich vervollständigte Äußerung:

Nils: „Ok, wieviel sind das (*macht neben der Anordnung mit den schwarzen Boxen eine kreisende Handbewegung*), zwei (*zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen*), 14 (*zeigt entlang der schwarzen Boxen; legt eine Bohne, die offenbar auf die Nachbarbox gekullert ist, wieder zurück, so dass auf allen schwarzen Boxen je zwei Bohnen liegen*), 16 (*zeigt auf die Anordnung mit den schwarzen Boxen*) minus vier (*zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den weißen Boxen*) 12, dann muss hier drei (*zeigt auf eine weiße Box*). Zwei, drei.“

Es lässt sich feststellen, dass das Material stark in die Äußerung miteinbezogen wird. Die Situation mit zwei Bohnen auf jeder schwarzen Box wurde im Vorfeld handelnd hergestellt und wird nun durch Alltagssprache und Zeigegesten miteinbezogen. So lässt sich nun die verbale Äußerung nachvollziehen, lassen sich die Bezüge der indirekten sprachlichen Hinweise erkennen.

In der anschließenden Szene möchte Nils ausprobieren, ob drei Bohnen pro schwarzer Box eine Lösung liefern, und beginnt je eine dritte Bohne auf jede schwarze Box zu legen. Er bricht seine Aktion jedoch ab (bei # im folgenden Beitrag von Nathan), nachdem er auf vier schwarze Boxen Bohnen gelegt hat, da Nathan in der Zwischenzeit begonnen hat, gedachte Bohnen zu zählen:

Nathan: „Mit dre. Ok, dre, drei, sechs, neun, zwölf, 15 #, 18, 21 (*zeigt nacheinander auf die schwarzen Boxen*) minus zwei (*zeigt auf die einzelnen Bohnen neben den schwarzen Boxen*) sind“¹

Auch hier lassen sich Zeigegesten beobachten. Allerdings haben diese einen anderen Charakter als jene im ersten Beitrag. Dort zeigte Nils auf die Bohnen und bezog sich auch auf die Bohnen. Hier jedoch zeigt Nathan auf die Boxen, ermittelt aber die Gesamtzahl der Bohnen. Seine Geste ist also in einem übertragenen bzw. abstrakten Sinne zu verstehen. Daher spreche

¹ Nathan macht am Ende einen Fehler, der für die hier vorgenommene Erörterung aber nicht relevant ist.

ich in diesem Zusammenhang von *am Material verankerten abstrakten Zeigegesten* (abgeleitet von *abstrakten Zeigegesten* nach McNeill (2005, S. 40) und unter Einbeziehung der Idee des *material anchor* (Hutchins 2005); vgl. Melzig 2013, S. 120 f.).

Sowohl im ersten Beitrag als auch hier wird deutlich, dass die Möglichkeit zu gestikulieren, den Schülern die Kommunikation im Lösungsprozess wesentlich erleichtert, da sie keine sprachlichen Ausdrucksmittel finden müssen. Diese Verringerung des kognitiven und sprachlichen Aufwands durch Gestik wird in der Gestik-Forschung betont. Gesten werden aus diesem Grund von Goldin-Meadow (2005, S. 57) als Eingangstor zu neuen Lerngebieten bezeichnet.

Die Schüler nutzen das konkrete Material zum einen also in großem Umfang als Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe, ihnen wird zum anderen aber auch schnell klar, dass es letztlich nicht um die konkreten Boxen und Bohnen geht, sondern um die durch sie dargestellte Struktur. Sie betrachten die Boxensituation metaphorisch (i. S. der Metapher als Denkfigur nach Lakoff & Núñez (2000, S. 39)), lösen sich vom Auslegen der Bohnen und arbeiten mit gedachten Bohnen bzw. auf der Zahlenebene weiter. Vor diesem Hintergrund werden die Boxen zu Metaphern für eine sich entwickelnde Vorstellung von Variablen als gesuchte Unbekannte und Platzhalter (vgl. Melzig 2013, S. 119). Die Gestik ermöglicht die metaphorische Verwendung der Boxen und verankert den sich entwickelnden Variablenbegriff am Material, wodurch wiederum die Box als Metapher gestärkt wird. Auf diese Weise kann die Verwendung der Boxen zu einer Fundierung des Variablenbegriffs beitragen.

Literatur

- Affolter, W. u. a. (2003). mathbu.ch 7. Schulverlag blmv AG und Klett und Balmer AG, Bern/Zug.
- Goldin-Meadow, S. (2005). *Hearing Gesture. How our hands help us think.* The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, und London, England.
- Hutchins, E. (2005). Material anchors for conceptual blends. *Journal of Pragmatics*, 37, 1555–1577.
- Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From. How the embodied mind brings mathematics into being.* Basic Books, New York.
- McNeill, D. (2005). *Gesture and Thought.* The University of Chicago Press, Chicago und London.
- Melzig, D. (2013). *Die Box als Stellvertreter. Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff.* Dissertation Universität Duisburg-Essen. Verfügbar über: <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=32831>