

Alexander MEYER, Dortmund

## **Aktivitäten des regelgeleiteten Umformens in Algebra – was macht sie aus?**

Schülerinnen und Schüler müssen aus verschiedenen Gründen das regelgeleitete Umformen von algebraischen Ausdrücken erlernen. So ist das regelgeleitete Operieren z.B. ein Element von Algebra und bietet Schülerinnen und Schülern Zugang zu innermathematischen Argumentationen.

Das regelgeleitete Umformen von algebraischen Ausdrücken ist jedoch kein mechanisches Manipulieren. So stellt etwa Kieran heraus, dass es stattdessen eine Ressource für das Herstellen von Bedeutungen in Algebra ist (Kieran 2004). Hefendehl-Hebeker zeigt auf, dass in Algebra Probleme mithilfe interpretationsfreier regelgeleiteter Umformungen bearbeitet werden können, d.h. durch das Resultat einer Umformung können Schlussfolgerungen über ein gegebenes Problem gezogen werden (Hefendehl-Hebeker 2001). Wenn ein Problem entsprechende Strukturen bereitstellt, kann das regelgeleitete Umformen auch durch diese Strukturen angeleitet werden (Meyer & Fischer 2013). Die beiden letztgenannten Studien stellen einen Bezug zwischen regelgeleitetem Operieren und strukturgebenden Elementen her. Was aber leitet die regelgeleiteten Umformungen von Schülerinnen und Schülern an, wenn keine strukturgebenden Elemente vorgegeben sind? Dieser Frage soll hier nachgegangen werden. Es wird herausgearbeitet, was kognitive Aktivitäten des regelgeleiteten Umformens kennzeichnet, die unter alleinigen Bezug auf die Strukturen von Termen und von Umformungsregeln erfolgen.

### **1. Was macht das Umformen algebraischer Ausdrücke aus?**

Das regelgeleitete Umformen algebraischer Ausdrücke wird zum einen durch Symbolsinn und zum anderen durch Struktursinn angeleitet. Schülerinnen und Schüler mit Symbolsinn können sich die möglichen Symbol- und Termbedeutungen erschließen, die ein algebraischer Ausdruck annehmen kann. Dies kann dann das Umformen anleiten (Arcavi 1994). Weiter gefasst beinhaltet Symbolsinn auch das situationsadäquate Vorhersehen der Beschaffenheit eines algebraischen Ausdrucks beim regelgeleiteten Umformen. Erst dies ermöglicht zielgerichtete Umformungen (Boero 2002).

Struktursinn wird hier aufbauend auf Hoch & Dreyfus (2005) und Rüede (2005) als ein spiralförmiger Prozess konzipiert, in dem Schülerinnen und Schüler abwechselnd die *Elemente eines Terms* und die *Termstruktur* individuell rekonstruieren (vgl. Abb. 1).

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 815–818).  
Münster: WTM-Verlag

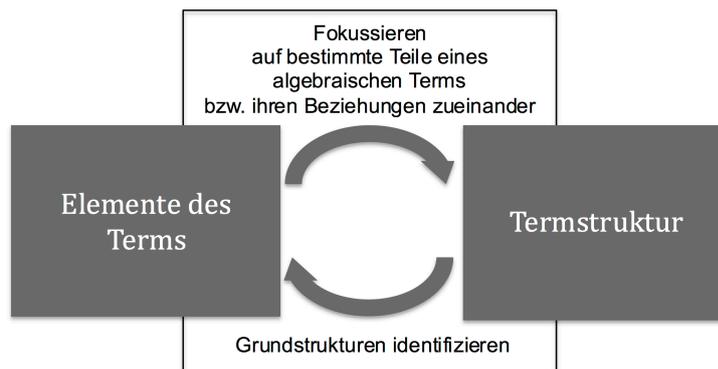


Abbildung 1: Kognitive Aktivitäten bei der individuellen Rekonstruktion der Struktur von Ausdrücken

Die Aktivität des Rekonstruierens der *Elemente eines Terms* wird durch die Identifikation von Grundstrukturen angeleitet. Eine Grundstruktur ist eine fachlich tragfähige ‚kleinste‘ Struktur, auf die Strukturen in algebraischen Ausdrücken zurückführbar sind, z.B.  $a(b + c) [= ab + ac]$ . Wie in diesem Term kann eine Grundstruktur zugleich mit einer Umformungsregel verknüpft sein, hier signalisiert durch die eckigen Klammern. Wenn eine Schülerin oder ein Schüler eine Grundstruktur unpassend mit einer Umformung verbunden hat, kann dies dazu führen, dass auch die *Elemente eines Terms* unpassend rekonstruiert werden.

Die Aktivität des Rekonstruierens der *Termstruktur* wird hingegen durch das Fokussieren auf bestimmte Teile eines algebraischen Ausdrucks bzw. ihren Beziehungen untereinander angeleitet. Wenn beispielsweise die Regel  $ab + ac = a(b + c)$  auf den Ausdruck  $ab + ac + ad$  übertragen werden soll, so kann man darauf fokussieren, dass der Teilterm den gleichen Status wie die übrigen beiden Teilterme hat. Auf diese Weise kann die *Termstruktur* als eine Beziehung von drei Teiltermen rekonstruiert werden.

Der Struktursinn besteht somit aus zwei Aktivitäten:

1. Das Identifizieren von Grundstrukturen, um eine Vorstellung von den *Elementen des Terms* und ihren Beziehungen zu gewinnen.
2. Das Fokussieren auf bestimmte Elemente eines Terms, um eine Vorstellung von der *Termstruktur* zu gewinnen.

Während die *Termstruktur* bzw. die *Elemente des Terms* als individuell rekonstruierte Vorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern vorliegen, stellen diese beiden Aktivitäten die Schnittstellen zum Fachlichen dar, an denen eine Anbahnung von Struktursinn ansetzen kann. Das hier entworfene Modell des Struktursinns erlaubt es, im Folgenden die kognitiven Aktivitäten des regelgeleiteten Umformens im Hinblick auf Struktursinn zu analysieren. Der Symbolsinn steht hier nicht im Fokus der Analysen.

## 2. Designexperiment zu Aktivitäten des Rekonstruierens der Struktur von algebraischen Ausdrücken

Die oben aufgeworfene Frage wurde im Rahmen einer Entwicklungsforschung durch zwei aufeinander aufbauende Designexperimente adressiert. In einem Laborsetting nahmen im ersten Experiment drei, im zweiten Experiment vier Schülerinnen und Schüler teil. Diese Schülerinnen und Schüler waren zum Zeitpunkt des Experiments in der achten Klasse einer Gesamtschule. Sie wurden vom Lehrenden aufgrund ihres regelmäßigen Engagements ausgewählt. In Absprache mit dem Lehrenden wurden die Designexperimente genau nach Behandlung der Gleichheit von algebraischen Ausdrücken im Kontext geometrischer Darstellungen vorgenommen. So konnten die Schülerinnen und Schüler beim regelgeleiteten Umformen auf geometrische Darstellungen zurückgreifen, um einem Ausdruck Bedeutung zu geben. Die Experimente wurden videografiert und das entstandene Material transkribiert. Die Daten wurden durch eine sequentielle Interpretation qualitativ analysiert.

Im Designexperiment werden zunächst Umformungsregeln eingeführt: „Vertauschen“, „Klammern auflösen oder einbauen“ und „gleiche Terme zählen“. Diese Regeln werden durch algebraische Symbole dargestellt. Die Aufgaben beinhalten algebraische Ausdrücke, die den eingeführten, symbolsprachlich formulierten Umformungsregeln ähnelten. Die erste eigenaktive Auseinandersetzung mit regelgeleiteten Umformungen in der zweiten Aufgabe des Designexperiments wird gestützt durch bestimmte Aufgabenelemente wie z.B. eine Tabelle. In dieser Aufgabe sollen Schülerinnen und Schüler mit den Grundstrukturen hinter den Umformungen vertraut werden. Die dritte Aufgabe erfordert das operative Durcharbeiten von strukturähnlichen, aber schwieriger werdenden algebraischen Ausdrücken. Diese Aufgabe soll die Aktivität des Fokussierens anleiten.

## 3. Empirische Einsichten in die individuellen kognitiven Aktivitäten des Übertragens einer Umformungsregel

Im folgenden Transskriptauszug sind Daniela, Bianca und Andreas aus dem ersten Designexperiment zu sehen. Sie haben gerade den Ausdruck  $ab + ac$  zu  $a(b + c)$  umgeformt. Nun arbeiten sie am Ausdruck  $ab + ac + ad$ . Andreas schlägt eine korrekte Umformung vor und begründet sie.

351 Andreas: a mal Klammer auf b plus c plus d. [...]

355 Andreas Das ist das Gleiche wie a mal Klammer auf b plus c nur eine Zahl mehr halt. Das geht auch.

Mithilfe des Modells wird sichtbar, wie Andreas eine regelgeleitete Umformung vornimmt und wie dabei sein Struktursinn aktiv wird. In Zeile 355

identifiziert Andreas eine Grundstruktur, indem er einen Bezug zu einer vorherigen Umformung herstellt („Das Gleiche wie...“). Dies führt dazu, dass er die Teilterme  $ab$ ,  $ac$  und  $ad$  als drei zueinander gleichartige *Elemente des Terms* identifizieren kann („... nur eine Zahl mehr halt“). Er fokussiert darauf, dass diese drei Elemente den gleichen Status haben, was ihm erlaubt, die *Termstruktur*  $a(b + c + d)$  zu rekonstruieren. Hier zeigt sich also die folgende kognitive Aktivität: ‚Umformen durch Analogieherstellung, angeleitet durch das Betrachten des Status der Teile des Ausdrucks und unter Berücksichtigung einer identifizierten Grundstruktur‘.

#### 4. Diskussion und Ausblick

Die Analysen der Designexperimente zeigen auf, dass beim regelgeleiteten Umformen von algebraischen Ausdrücken verschiedenartige kognitive Aktivitäten ablaufen. Dabei sind die in der Analyse gefundenen kognitiven Aktivitäten im Vergleich zu den recht einfach strukturierten algebraischen Ausdrücken in den beiden Aufgaben erstaunlich verschiedenartig. Das Modell des *Fokussierens* und *Grundstruktur-Identifizierens* hat sich für die Herausarbeitung derjenigen kognitiven Aktivitäten des regelgeleiteten Umformens bewährt, die primär auf Struktursinn fußen. Es stellt sich in folgenden Untersuchungen die Frage, wie die Schnittstellen zum Fachlichen durch geeignete Unterstützungsmaßnahmen besser adressiert werden können. Auch ist offen, wie Schülerinnen und Schüler im Aktivieren ihres Symbolsinns unterstützt werden können.

#### Literatur

- Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Boero, P. (2002). Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Hrsg.), *Perspectives on School Algebra* (Vol. 22, S. 99-119): Springer Netherlands.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2001). Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt* (S. 83-98). Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' Difficulties with Applying a Familiar Formula in an Unfamiliar Context. In H. L. Chick (Hrsg.), *Proc. of the 29<sup>th</sup> Conf. of the IG-PME*. (Vol. 3, S. 145-153). Melbourne: University of Melbourne.
- Meyer, A. & Fischer, A. (2013). Wie algebraische Symbolsprache die Möglichkeiten für algebraisches Denken erweitert – eine Theorie symbolsprachlichen algebraischen Denkens, *JMD*, 34(2), 177-208.
- Rüede, C. (2012). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *JMD*, 33, 113-141.