

Renate NITSCH, Regina BRUDER, Darmstadt

## **Diagnoseinstrument zum Aufdecken von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge**

Der Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen im Bereich funktionaler Zusammenhänge und der Wechsel zwischen diesen werden als mathematische Schlüsselfähigkeit angesehen. Dennoch zeigen Schülerinnen und Schüler vielfältige Schwierigkeiten in diesem Bereich (Bossé, Adu-Gyamfi & Cheetham, 2011). Aus diesem Grund besteht das Ziel des Projekts CODI (COncceptual DIfficulties in the field of functional relationships) darin, ein Diagnoseinstrument zum Aufdecken von Lernschwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler in den Jahrgangsstufen 9 und 10 im Kompetenzbereich der Darstellung funktionaler Zusammenhänge zu entwickeln. Das Diagnoseinstrument soll im Unterricht flexibel einsetzbar sein und die Lehrkräfte bei der individuellen Diagnose und Förderung im Bereich typischer Lernschwierigkeiten unterstützen. In Anlehnung an die Ergebnisse des Projekts HEUREKO (vgl. Nitsch et al., 2014) werden zur Strukturierung des Inhaltsbereichs verschiedene Darstellungswechsel unterschieden: Der Wechsel zwischen Graph und situativer Beschreibung (GS), der Wechsel zwischen situativer Beschreibung und Gleichung (SA) und der Wechsel zwischen Graph und Gleichung (GA).

### **Konzeptuelle Lernschwierigkeiten**

Konzeptuelle Lernschwierigkeiten können durch die Analyse systematischer Fehler aufgedeckt werden. Systematische Fehler zeichnen sich dadurch aus, dass sie im Gegensatz zu Flüchtigkeitsfehlern, die zufällig auftreten und meist aufgrund von Konzentrationsmangel entstehen, reproduzierbar sind und meist auf fehlerhaften Vorstellungen und Konzepten beruhen (Radatz, 1980). Diese werden im Bereich der Naturwissenschaften auf individuelle Alltagsvorstellungen der Schülerinnen und Schüler zurückgeführt, in der Mathematik sind jedoch auch innermathematische Fehlvorstellungen denkbar. In jedem Fall weisen sie charakteristische Eigenschaften auf: Sie zeigen sich wiederholt über mehrere strukturell gleiche Aufgaben hinweg, sie sind über einen längeren Zeitraum stabil und sie sind zu einem gewissen Grad robust gegenüber äußeren Einflüssen (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1999).

### **Design und Methode**

Das Ziel besteht in der Entwicklung eines Online-Tools, das eine automatische Auswertung ermöglicht. Zukünftig soll dies eine direkte Rückmeldung

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 855–858).  
Münster: WTM-Verlag

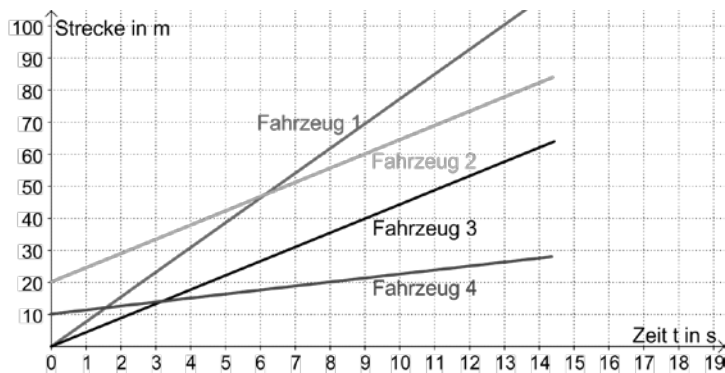
der Ergebnisse sowohl an die Schülerinnen und Schüler als auch an die Lehrkräfte ermöglichen. Dementsprechend werden vor allem Multiple-Choice-Aufgaben eingesetzt, wobei diese das Format „1 von 4“ besitzen, das heißt von vier gegebenen Antwortmöglichkeiten ist genau eine richtig. Zur Generierung der Distraktoren wurden zum einen bereits existierende Studien zu Lernschwierigkeiten herangezogen, zum anderen wurden vorliegende Schülerlösungen aus dem Projekt HEUREKO analysiert. Die Distraktoren wurden so gewählt, dass möglichst jeder Distraktor für genau einen systematischen Fehler steht, sodass eine möglichst präzise Diagnose möglich ist. Um zu kontrollieren, ob die Distraktoren der Multiple-Choice-Aufgaben keine Fehler provozieren, die ohne die Angabe solcher Distraktoren gar nicht oder nur vereinzelt auftreten würden, wurden zusätzlich zu jedem Bereich Aufgaben mit offenem Antwortformat eingesetzt.

Für eine Diagnose von Lernschwierigkeiten sind neben der Identifikation häufig auftretender systematischer Fehler auch stabile Phänomene wie Fehlvorstellungen von Interesse. Aus diesem Grund wurden für jeden Darstellungswechsel und Funktionstyp mehrere strukturell gleiche Aufgaben entwickelt, um über auftretende Fehlermuster Rückschlüsse auf mögliche Fehlvorstellungen ziehen zu können. Zu den Darstellungswechseln GA und SA wurden jeweils Aufgaben zu linearen und quadratischen Funktionen entwickelt. Beim Darstellungswechsel GS wurden direkt zwei in der Literatur referierte Fehlvorstellungen fokussiert: Der Graph-als-Bild-Fehler und der Slope-height-Fehler. Beim Graph-als-Bild-Fehler wird der Graph als reales Situationsabbild interpretiert. In der Beispielaufgabe wird in diesem Fall Graph C ausgewählt, weil der Verlauf des Graphen exakt dem Verlauf des Skihangs entspricht.

*In folgendem Bild ist ein Skifahrer zu sehen, der den Hang hinunter fährt. Welcher Graph beschreibt die Situation am besten? Der Funktionswert  $v(t)$  gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  an.*

Beim Slope-height-Fehler geht man davon aus, dass Steigung und Höhe verwechselt werden. In der Beispielaufgabe würde das bedeuten, dass an der Stelle  $t=5$  nicht die Gerade mit der maximalen Steigung fokussiert wird (Fahrzeug 1), sondern stattdessen die Gerade mit dem maximalen Funktionswert an dieser Stelle ausgewählt wird (Fahrzeug 2).

Welches der vier Fahrzeuge ist zum Zeitpunkt  $t = 5$  am schnellsten?



Die entwickelten Aufgaben wurden in einer Pilotierung mit  $N=93$  Schülerinnen und Schülern aus Klasse 9 und 10 erprobt. Zusätzlich wurden mit  $N=16$  Schülerinnen und Schülern diagnostische Interviews geführt. Die Ziele der Pilotierung bestanden darin, die Distraktoren der Multiple-Choice-Aufgaben hinsichtlich der vermuteten systematischen Fehler und Fehlvorstellungen zu überprüfen, die häufigsten systematischen Fehler und Fehlvorstellungen zur weiteren Fokussierung des Diagnose-Instruments zu identifizieren und die Angemessenheit der Testzeit, des Schwierigkeitsniveaus sowie die Verständlichkeit der Aufgabenstellungen zu überprüfen.

### Erste Ergebnisse

Die Aufgaben wurden dichotom kodiert und anschließend rasch-skaliert. Dabei wurde – in Anlehnung an das in HEUREKO entwickelte Kompetenzstrukturmodell – ein 3-dimensionales Modell zugrunde gelegt, wobei die Dimensionen den Darstellungswechseln GS, SA und GA entsprachen. Alle Items zeigten zufriedenstellende Fitwerte (T-Wert und  $wmnsq$ ). Auch die moderaten latenten Korrelationen (zwischen 0,5 und 0,75) sprechen für das Modell. Die Interviewanalysen zeigten, dass die Schülerinnen und Schüler die Angemessenheit der Aufgabenstellung, der Testzeit und auch der Aufgabenschwierigkeiten bestätigten. Eine Fehleranalyse bei den Aufgaben mit offenem Antwortformat ergab, dass die bei den Multiple-Choice-Aufgaben häufig beobachteten Falschlösungen auch bei den Aufgaben mit offenem Antwortformat einen hohen Fehleranteil ausmachten. Weitere quantitative Analysen sind für den Haupttest mit einer größeren Stichprobe geplant. Im Folgenden werden besonders häufig beobachtete Fehlermuster berichtet, die einen ersten Einblick in typische Lernschwierigkeiten geben: Beim Darstellungswechsel GA in Verbindung mit linearen Funktionen wählten 21% der Schülerinnen und Schüler über beide Aufgaben hinweg den Distraktor, der in der Funktionsgleichung  $y=mx+b$  statt der Steigung  $m$  die Nullstelle  $x_0$  der Geraden enthielt:  $y=x_0x+b$ .

Beim Darstellungswechsel SA bei quadratischen Funktionen zeigten 17% der Lernenden bei zwei Aufgaben einen Vorzeichenfehler bei der Verschiebung der Parabel in positive x-Richtung. Die Interviewanalysen zeigten hier, dass vollständig innerhalb der Situation argumentiert wurde. Bei der Modellierung einer Wurfparabel wurde z.B. erklärt, dass man den Ball „ja nach vorne wirft und nicht nach hinten“. Interessanterweise argumentierten alle Lernenden, die die Aufgabe richtig lösten, mithilfe der graphischen Darstellungsform.

Den Graph-als-Bild-Fehler zeigten über drei Aufgaben hinweg 17% der Probanden. Sie argumentierten innerhalb der Situation und scheiterten bei der Übertragung auf die graphische Darstellungsform. Die Analysen zum Slope-height-Fehler erwiesen sich als besonders aufschlussreich. Während 44% der Schülerinnen und Schüler diesen Fehler bei obiger Beispielaufgabe zeigten, in der ein *Zeitpunkt* fokussiert wird, zeigten nur 13% den Fehler auch in einer weiteren Aufgabe, in der nach einem *Zeitintervall* gefragt wurde. Die Interviewanalysen ergaben, dass den Probanden zwar im Allgemeinen die globale Unterscheidung zwischen Steigung und Höhe möglich ist, die Betrachtung der Steigung an einem Punkt jedoch Probleme bereitet. Es liegt die Vermutung nahe, dass es sich hierbei um eine epistemologische Hürde handelt. Das bedeutet, dass der Aneignungsprozess nicht linear verläuft, sondern bestimmte Denkhürden bzw. Brüche, die sich aus dem genetischen Aufbau des Stoffes ergeben, von einer Vielzahl der Lernenden überwunden werden müssen. In diesem Fall haben sie die Steigung bisher über ein Steigungsdreieck bestimmt, d.h. die Betrachtung einer Steigung an einem Punkt ist ihnen fremd. Auch die Alltagsvorstellung einer Steigung bezieht sich immer auf eine Strecke und kollidiert mit der mathematischen Betrachtungsweise. Aus diesem Grund wurden zu dieser Fehlvorstellung weitere Aufgaben entwickelt, die im Rahmen des Haupttest eine noch differenzierte Diagnose ermöglichen sollen.

## Literatur

- Bossé, M., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6 (3), 113-133.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M.K.. Functions, Graphs, and Graphing (1990): Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, T., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2014). Students' Competencies in working with Functions in Secondary Mathematics Education – Empirical Examination of a Competence Structure Model. *International Journal of Science and Mathematics Education*.
- Radatz, H. (1980). Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.