Andreas OBERSTEINER, München

Reaktionszeiten und Blickbewegungen beim Größenvergleich von Brüchen

1. Theoretischer Hintergrund

Der sichere Umgang mit Brüchen ist ein bedeutender Inhaltsbereich mathematischer Kompetenz. Gleichzeitig gehören Brüche zu den wohl problematischsten Lerninhalten für viele Schülerinnen und Schülern. Schwierigkeiten treten offenbar nicht erst bei komplizierten Rechnungen auf, sondern beziehen sich bereits auf ein mangelndes Grundverständnis für Brüche (z. B. Wartha & Wittmann, 2009). Ein wesentliches Problem scheint zu sein, dass Brüche nicht als *eine* (rationale) Zahl, sondern dass Zähler und Nenner eines Bruchs als *zwei* getrennte (natürliche) Zahlen angesehen werden, deren Beziehung zueinander nicht erkannt wird. Deutlich wird dies in Aufgabenstellungen, bei denen der Rückgriff auf die von einem Bruch repräsentierte Bruchzahl einer algorithmischen Herangehensweise überlegen ist, beispielsweise, wenn das Ergebnis von 12/13 + 7/8 schnell abgeschätzt werden soll. In einer US-amerikanischen Studie mit Achtklässlern wählten mehr als die Hälfte der befragten Schülerinnen und Schüler nicht etwa 1 oder (das richtige Ergebnis) 2, sondern 19 oder 21 aus (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist & Reys, 1981). Es ist plausibel anzunehmen, dass eine komponentenweise Betrachtung der Brüche zu diesen Ergebnissen führte. Ähnliche Ergebnisse sind in der Literatur vielfach belegt (vgl. Padberg, 2009). Auch beim Größenvergleich zweier Brüche wurde gefunden, dass sich Schülerinnen und Schüler dabei häufig auf die Komponenten der Brüche stützen, anstatt die Bruchzahlen selbst zu berücksichtigen, dass sie also beispielsweise 1/4 als größer als 1/3 einschätzen, weil 4 größer ist als 3 (Van Hoof, Lijnen, Verschaffel & Van Dooren, 2013).

In jüngeren Studien wurde versucht, die psychologischen Hintergründe für Fehlvorstellungen bei Brüchen zu ergründen. Eine dafür relevante Frage ist, ob beim mentalen Verarbeiten von Brüchen automatisch Größenvorstellungen zu den Komponenten der Brüche aktiviert werden. Eine solche Annahme kann damit begründet werden, dass natürliche Zahlen lange vor rationalen Zahlen gelernt werden, wodurch möglicherweise automatisierte Verarbeitungsprozesse erworben werden (Hubbard, Piazza, Pinel & Dehaene, 2005). In der Literatur ist umstritten, ob die mentale Verarbeitung von Brüchen ausschließlich durch die getrennte Verarbeitung der Komponenten oder auch holistisch erfolgen kann. In computerbasierten Experimenten kamen Bonato, Fabbri, Umiltà und Zorzi (2007) zu dem Schluss, dass die Reaktionszeiten beim Bruchzahlvergleich von der Differenz der Kompo-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 867–870). Münster: WTM-Verlag

nenten, nicht aber von der Differenz der Bruchzahlen abhingen, was eine *komponentenbasierte* Vergleichsstrategie nahelegt. In dem Experiment wurden allerdings überwiegend Stammbrüche verwendet, so dass diese Schlussfolgerung nicht verallgemeinert werden kann. Für Brüche ohne gleiche Komponenten fanden Schneider und Siegler (2010) dagegen, dass die Reaktionszeiten besser durch die Differenz der Brüche als durch die Differenz der Komponenten vorhergesagt werden konnte, was eine *holistische* Strategie nahelegt. Meert, Grégoire und Noël (2010) schlugen dagegen ein hybrides Modell vor, das sowohl holistische als auch komponentenbasierte Elemente enthält. Eine entscheidende Einschränkung der genannten Studien ist, dass ausschließlich oder teilweise Spezialfälle von Brüchen oder Vergleichsaufgaben (Stammbrüche, gleiche Komponenten, besonders bekannte Brüche wie 3/4) verwendet wurden. Bisher wurde nicht systematisch untersucht, welche Strategien für verschiedene Typen von Bruchzahlvergleichen angewendet werden. Insbesondere ist damit noch nicht geklärt, ob es überhaupt möglich ist, holistische Verarbeitungsstrategien beim Vergleich von Brüchen erfolgreich einzusetzen.

2. Fragestellung

In den beiden im Folgenden vorgestellten Experimenten wurde untersucht, ob Personen mit hoher Expertise in Mathematik beim Bruchzahlvergleich „komponentenbasierte“ oder „holistische“ Strategien anwenden. Die Hypothese war, dass holistische Strategien nur dann zum Einsatz kommen, wenn die zu vergleichenden Brüche keine gleichen Komponenten besitzen. Haben die Brüche dagegen gleiche Komponenten, so sind komponentenbasierte Strategien effektiver und sollten von Personen mit hoher Expertise auch tatsächlich eingesetzt werden.

3. Experiment 1

An diesem Experiment nahmen 44 Personen (22–54 Jahre; 11 weiblich) teil, die einen universitären Abschluss in Mathematik hatten und am Mathematischen Institut einer (belgischen) Universität beschäftigt waren (26 als Doktoranden, 12 als Postdocs, 6 als Professoren). In Einzelsitzungen wurden diesen Personen nacheinander insgesamt 90 Bruchpaare an einem Computerbildschirm gezeigt. Die Probanden sollten per Tastendruck so schnell und korrekt wie möglich entscheiden, welcher von beiden Brüchen der größere ist. Reaktionszeiten und Lösungsraten wurden dabei vom Computer erfasst. 36 Bruchpaare hatten gleiche Komponenten (18 gleiche Zähler, 18 gleiche Nenner), die übrigen 54 hatten keine gleichen Komponenten.

Die Analyse der Lösungsraten zeigte zunächst, dass fast alle Aufgaben ($M = 97\%$) korrekt gelöst wurden. Hinsichtlich der Reaktionszeiten gab es aber deutliche Unterschiede: Aufgaben mit gleichen Komponenten wurden systematisch schneller gelöst (M = 1919 ms) als Aufgaben ohne gleiche Komponenten (M = 4145 ms), was die Verwendung unterschiedlicher Strategien nahelegt. Lineare Regressionsanalysen zeigten, dass nur für Brüche ohne gleiche Komponenten die Reaktionszeiten signifikant von der numerischen Distanz der Brüche abhingen, $R^2 = .47$, $B = -6739$; $p < .001$, – was auf eine holistische Strategie hindeutet –, nicht aber bei Brüchen mit gleichen Komponenten, $R^2 = .02$; $B = -363$; $p = .370$. Es zeigte sich aber auch, dass die Reaktionszeiten durch weitere Aufgabenmerkmale beeinflusst wurden (für Details zu dieser Studie siehe Obersteiner, Van Dooren, Van Hoof & Verschaffel, 2013).

4. Experiment 2

Das Erfassen von Strategien beim Größenvergleich von Brüchen ist aus methodischer Sicht problematisch. Die Erfassung von Reaktionszeiten wie in Experiment 1 ist sicherlich einer direkten Befragung überlegen, sie stellt aber nur ein indirektes Maß für die tatsächlich angewendeten Strategien dar. In Experiment 2 wurde deshalb überprüft, ob die Methode des Eye-Trackings geeignet ist, Strategien beim Bruchzahlvergleich abzubilden. Als Vergleichsaufgaben wurden 32 der in Experiment 1 verwendeten Aufgaben ausgewählt (jeweils 16 mit bzw. ohne gleiche Komponenten). An dem Experiment nahmen acht Personen teil (19–42 Jahre; 5 weiblich), davon sechs Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter der Technischen Universität München mit Universitätsabschluss im Fach Mathematik und zwei Studierende der Mathematik.

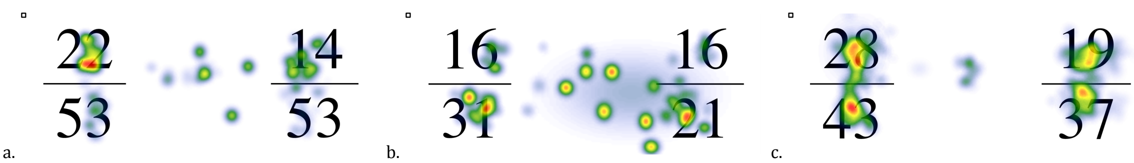

Abbildung 1: Heatmaps für Beispielitems mit gleichen Nennern (a.), gleichen Zählern (b.) bzw. ohne gleiche Komponenten (c.)

Zur Auswertung der Blickbewegungen wurden zwei gleich große rechteckige Areas of Interest (AOIs) definiert, welche die beiden Zähler beziehungsweise die beiden Nenner der zu vergleichenden Brüche umschlossen. Die Auswertung der Fixationszeiten in diesen AOIs zeigte wie erwartet, dass bei Brüchen mit gleichen Nennern die Zähler signifikant länger betrachtet wurden als die Nenner, Wald $\chi^2(1, N = 7) = 21.47$, $p < .001$. Bei Brüchen mit gleichen Zählern war es umgekehrt, Wald $\chi^2(1, N = 7) = 5.76$, $p = .016$. Bei den Brüchen ohne gleiche Komponenten bestand kein signifikanter Unterschied zwischen den Fixationszeiten für Zähler und Nenner, Wald $\chi^2(1, N = 7) = 2.28$, $p = .131$. Abbildung 1 illustriert dieses Ergebnis exemplarisch an drei Beispielitems.

5. Diskussion

Sowohl die Analyse der Reaktionszeiten in Experiment 1 als auch die der Blickbewegungen in Experiment 2 zeigen deutlich, dass mathematisch versierte Erwachsene beim Bruchzahlvergleich wie erwartet eine komponentenbasierte Strategie anwenden, wenn die Brüche gleiche Komponenten haben, aber eine holistische, wenn dies nicht der Fall ist. Die vorliegenden Ergebnisse deuten einerseits auf die Existenz holistischer Verarbeitungsstrategien hin, andererseits auf die Eignung der Methode des Eye-Trackings zur Differenzierung der angewendeten Strategie auf individueller Ebene. In weiteren Analysen könnte der Frage nachgegangen werden, inwiefern die Strategiewahl von individuellen Faktoren und von weiteren Aufgabenmerkmalen abhängt.

Literatur

Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C. & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 33*, 1410–1419.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M. & Reys, R. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P. & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience, 6*, 435–448.

Meert, G., Grégoire, J. & Noël, M.-P. (2010). Comparing 5/7 and 2/9: adults can do it by accessing the magnitude of the whole fractions. *Acta Psychologica, 135*, 284–292.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction, 28*, 64–72.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schneider, M. & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 36*, 1227–1238.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education, 15,* 154–164.

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (109–122). Weinheim. Beltz.