Agnes PETERS, Aachen

Von Mickey Mouse bis Buzz Light Year – Mathematische Entdeckungen im Anwendungsfeld Computeranimationen

In der klassischen Aufgabe der Oberstufenanalysis wird den Schülern (mal mit, mal ohne Anwendungskontext) eine Funktion vom Typ $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, vorgegeben, die sie dann auf verschiedene Eigenschaften und Charakteristika untersuchen sollen. Modellierungskompetenz wird im Rahmen dieser Aufgaben meist (nur) bezüglich der Interpretation einzelner Ergebnisse verlangt, während es sich bei den Anwendungskontexten oft um Einkleidungen handelt.

In realen Anwendungssituationen hingegen ist häufig die Funktion zur Modellierung der Situation unbekannt. Zudem reichen Funktionen obigen Typs in den meisten Fällen nicht aus. Es muss auf das allgemeinere Konzept der Kurven zurückgegriffen werden.

Vor diesem Hintergrund beschäftigt sich dieser Beitrag mit einer Anwendungssituation aus dem Bereich Computeranimation, in dessen Mittelpunkt die Modellierung eines funktionalen Zusammenhangs steht. Dabei werden zentrale Themen des Oberstufenunterrichts, wie der Funktions- und der Ableitungsbegriff, aufgegriffen und ein intuitiver und anschaulicher Zugang zu Parameterdarstellungen von Kurven aufgezeigt. Nicht zuletzt werden damit auch Querverbindungen zur analytischen Geometrie geschaffen.

1. Computeranimationen

Computeranimationen stellen heutzutage einen zentralen Bestandteil vieler Kinofilme dar und haben der Film- und Werbeindustrie in den letzten Jahren ganz neue Möglichkeiten eröffnet. Animiert werden dabei nicht nur Bewegungen in der Ebene oder im Raum, sondern auch Parameter wie die Farbe, die Größe oder die Form eines Objekts.[1] Dazu wurden und werden verschiedene Animationstechniken entwickelt, von denen meist mehrere gleichzeitig zum Einsatz kommen. Herausgestellt werden sollen hier die Basistechniken der Pfadanimation und des Keyframings. Sie beruhen auf elementaren mathematischen Ideen und sind somit auch auf Schulniveau zugänglich.

Bei der **Pfadanimation** bewegt sich das Objekt entlang einer vorgegebenen Kurve. Da bei Animationen die Abhängigkeit der Bewegung von der Zeit

---

[1] Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf Bewegungen in zwei Dimensionen. Sie sind aber analog auf drei Dimensionen sowie auf andere Parameter übertragbar.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 887–890). Münster: WTM-Verlag

von zentraler Bedeutung ist, liegt die Parameterdarstellung der Kurve als Darstellungsform nahe. Die Bewegungsbahn eines Objekts im zweidimensionalen Raum in Abhängigkeit von der Zeit kann mathematisch also beschrieben werden durch

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Einfache Kurven, wie Kreise, Ellipsen oder Spiralen, können in diesem Zusammenhang thematisiert und deren Parameterdarstellung erkundet werden. Parameterdarstellungen von allgemeinen Kurven sind jedoch nur selten bekannt und auch nicht leicht herzuleiten. In diesen Fällen hilft die zweite erwähnte Animationstechnik, das Keyframing, weiter.

2. Keyframing – Idee

Was wir am Ende auf der Leinwand oder auf dem Bildschirm sehen, sind in Wirklichkeit keine flüssigen Bewegungen, sondern eine Abfolge von vielen Einzelbildern. Erst die Trägheit unseres Auges erzeugt aus dieser schnellen Abfolge die Illusion einer Bewegung, ein Phänomen, das Lernende durch Daumenkinos selbst erfahren können. Daraus resultiert jedoch auch ein enormer Produktionsaufwand für Animationsszenen: Bei einer Standardbildrate von etwa 25 Bildern/sec benötigt man für die Produktion eines 30-sekündigen Werbespots bereits 700 Einzelbilder.

Hinter der Animationstechnik des Keyframings verbirgt nun sich die Idee, dass nicht jedes dieser Einzelbilder vom Animator erzeugt wird, sondern dass dieser nur gewisse Schlüsselbilder (Keyframes) anfertigt. Diese zeigen markante Szenen des Bewegungsablaufs, reichen jedoch nicht aus, um den Eindruck einer flüssigen Bewegung zu erzeugen. Mit Hilfe der Schlüsselbilder bestimmt deshalb der Computer Zwischenbilder (Inbetweens), weshalb die Technik manchmal auch als Inbetweening bezeichnet wird. Grundlage dessen sind zum einen die Positionen des zu animierenden Objekts in jedem einzelnen Keyframe, zum anderen die Zuordnung der Keyframes, und damit der Positionen, zu bestimmten Zeitpunkten.

3. Keyframing – Mathematischer Kern

Die mathematische Situation lässt sich am Beispiel eines springenden Balls verdeutlichen.[2] Für die Wahl der Positionen des Balls in den Keyframes bieten sich als markante Punkte der Bewegung die Positionen maximaler Auslenkung an. Mit Hilfe eines Koordinatensystems kann die Position des Balls in jedem einzelnen Keyframe genau beschrieben werden. Zudem

[2] Die Verformung des Balls wird an dieser Stelle vernachlässigt.

wählt der Animator für jedes Keyframe einen Zeitpunkt auf der Zeitachse aus, d.h. er ordnet einem bestimmten Zeitpunkt eine konkrete Position des Balls zu.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Zwischenbilder ist somit eine Wertetabelle nebenstehender Form. Die Bewegung des Balls vor Augen ist die Idee einer interpolierenden Kurve naheliegend. Aufgrund der Zuordnung der durch zwei Koordinaten beschriebenen Positionen zu Zeitpunkten stößt man auf Kurven in Parameterform.

Zeitpunkt	t_0	t_1	t_2
x-Koordinate	x_0	x_1	x_2
y-Koordindate	y_0	y_1	y_2

In der Computergrafik werden zur Lösung des Problems im Regelfall stückweise zusammengesetzte Kurven verwendet. Für die Abhängigkeit der Raumrichtungen von der Zeit werden zwischen zwei Datenpunkten dabei häufig Polynomfunktionen dritten Grades angesetzt. Die Gründe hierfür lassen sich vor allem anhand dreier Kriterien einsehen: Komplexität, Glattheit und Kontrolle. Hinter dem Kriterium der **Komplexität** verbirgt sich der Anspruch, bei der Entwicklung eines mathematischen Modells die Situation möglichst einfach, aber dennoch adäquat zu beschreiben. Polynomfunktionen gehören zu den mathematisch gut handhabbaren Funktionstypen. Der Grad 3 lässt zudem genügend Flexibilität zur Modellierung des Bewegungsverlaufs zu und erlaubt, falls erforderlich, Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder sogar stetige Differenzierbarkeit auch in den Stützpunkten zu erzeugen, was unter dem Kriterium der **Glattheit** zusammen gefasst wird. Darüber hinaus ist eine lokale **Kontrolle** über die Kurve, d.h. die Möglichkeit, lokal Einfluss auf den Verlauf der Kurve nehmen zu können, ein sehr wichtiger Aspekt während der Erstellung einer Animation. Bei stückweise zusammengesetzten Kurven wirkt sich die Änderung eines Datenpunktes nur auf die angrenzenden Kurvenstücke aus, nicht aber auf die gesamte Kurve, so dass das Kriterium zumindest in gewissen Grenzen erfüllt ist.

4. Umsetzung mit Schülern

Schüler entdecken die Parameterdarstellung von Kurven bei dieser Anwendungssituation auf eine sehr intuitive Weise, da die Zuordnung der Positionen zu Zeitpunkten diese Darstellung unmittelbar impliziert. Der Funktionsbegriff kann durch die Abgrenzung zum Kurvenbegriff reflektiert und in einen größeren Zusammenhang gesetzt werden. Das Interpolationsproblem kann für den Unterricht dahingehend vereinfacht werden, dass die Raumrichtungen unabhängig voneinander betrachtet werden. Es können verschiedene Interpolationsmethoden, wie die lineare Interpolation, die Interpolation durch eine einzige Polynomfunktion oder die Interpolation durch eine stückweise, aus Polynomfunktionen dritten Grades zusammengesetzte Funktion, deren Ableitungen in den Stützpunkten vorgegebenen werden (Hermiteinterpolation), thematisiert werden. Mit Hilfe der vorgestellten Kriterien können diese daraufhin diskutiert werden.

Vor allem bei der Hermiteinterpolation ist aber die Rückkehr zur Darstellung in der x-y-Ebene erforderlich, erweist sich dabei aber auch als überaus fruchtbar. Über die Tangentenvektoren in den Stützpunkten kann der Verlauf der Kurve beeinflusst werden. Da die x- bzw. y-Komponente des Tangentenvektors in einem Punkt der Kurve gleich der entsprechenden Ableitung der x- bzw. y-Funktion zum zugehörigen Parameterwert ist, eröffnet dies die Möglichkeit, den Ableitungsbegriff zu vertiefen.

Abgerundet werden kann die Behandlung des Themas durch die Erstellung einer eigenen kleinen Animation, in der das Erlernte in einem echten Animationsprogramm angewendet wird. Die Autorin hat dafür das 2D-Animationsprogramm Synfig gewählt, da die Einarbeitung in das Programm vergleichsweise einfach ist und für die Interpolation verschiedene Methoden zur Auswahl stehen. Die Interpolationskurven werden grafisch dargestellt, sodass hier eine Brücke zwischen der realen Anwendung und deren mathematischen Hintergrund geschlagen wird. Darüber hinaus kann das Programm kostenlos auf der zugehörigen Internetseite heruntergeladen werden und ist für alle gängigen Betriebssysteme verfügbar.

Erfahrungsgemäß zeichnet sich das Thema Animationen vor allem durch seinen hohen motivationalen Charakter aus. Aufgrund der großen Anschaulichkeit bietet es einen optimalen Rahmen, um die Modellierungskompetenz der Lernenden zu fördern und sie zu eigenständigen Entdeckungen anzuregen. Es verbindet nicht nur innermathematisch Themen der Analysis mit solchen der analytischen Geometrie, sondern auch fächerübergreifend Aspekte der Mathematik, Informatik und Kunst.

Literatur

Bender, M. & Brill, M. (2006). Computergrafik. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch. 2. Aufl., München: Hanser.

Dunn, F. & Parberry, I. (2011). 3D Math Primer for Graphics and Game Development. Boca Raton: CRC Press.

Filler, A. (2006). Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II im Stoffgebiet Analytische Geometrie. Habilitation, Universität zu Berlin. Verfügbar unter http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/3D/habilita/Filler-Habilitation.pdf [12.02.14]

Parent, R. (2002). Computer Animation. Algorithms and Techniques. San Diego: Academic Press.