Guido PINKERNELL, Heidelberg

Studierende erklären Zusammenhänge zwischen dynamisch verbundenen Repräsentationen von Funktionen

Mit dem computerbasierten Erkunden multipler Repräsentationen von Funktionen ist die Erwartung verbunden, dass ein aspektreicher Begriff von Funktionen entsteht. Aber hat das Gelernte auch immer mathematische Substanz? Analysen von Interviews mit Studierenden zeigen, auf welche Weise sich Lernende die beobachteten Zusammenhänge erklären können. Die theoretische Basis dieser Analysen bilden fachspezifische Theorien, die das Lernen als ein Abstrahieren von Oberflächenmerkmalen beschreiben.

Ein Fallbeispiel

Die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Standardrepräsentationen von Funktionen ist ein gängiges Einsatzgebiet mathematischer Software. Wenn zusätzlich eine dynamische Verlinkung der multiplen externen Repräsentationen möglich ist (dMER, vgl. Ainsworth 1999), dann steuert z. B. ein mittels Schieberegler variierbarer Parameter die drei Repräsentationen einer von diesem Parameter abhängigen Funktion gleichzeitig. Abb. 1 zeigt eine typische Aufgabe:

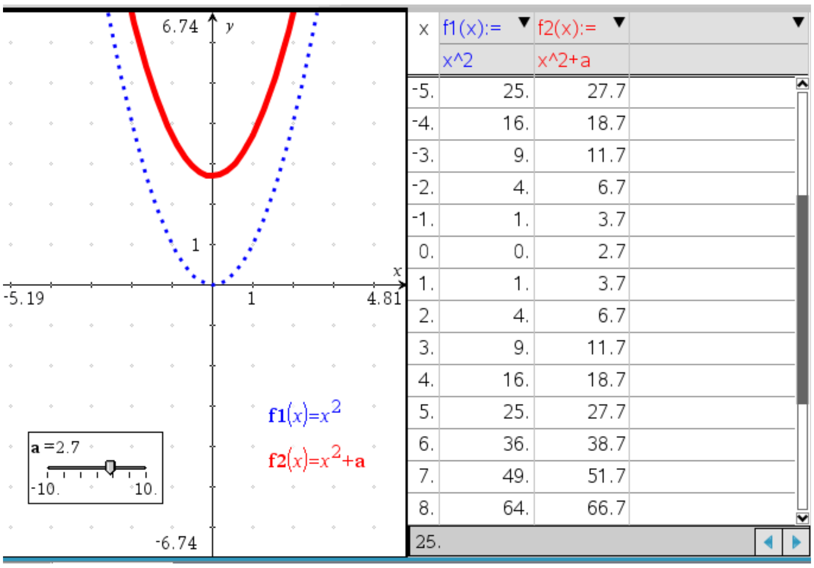

Abb. 1: Eine typische Aufgabe für den Einsatz von dMER: „Untersuche, wie sich Änderungen des Parameterwertes a in $f(x) = x^2 + a$ auf Gestalt und Position des Graphen von f auswirken.“

Man sollte erwarten, dass Lernende schnell zu einer korrekten Beschreibung der Zusammenhänge kommen, denn die visuelle Information scheint eindeutig: Wird a größer bzw. kleiner, dann wird der Graph parallel zur y-Achse nach oben bzw. nach unten verschoben. Informelle Interviews mit Studierenden des Lehramtes Mathematik an der Pädagogischen Hochschule

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 899–902). Münster: WTM-Verlag

Heidelberg haben dagegen gezeigt, dass eine durchaus korrekte Beschreibung des Beobachteten ein Verstehen der Zusammenhänge nicht impliziert:

S: [bewegt den Regler nach rechts] also die Parabel wird über die y-Achse nach oben verschoben ... die ähm wie heißt des die Breite [bewegt beide Handflächen wiederholt aufeinander zu wie beim Klatschen]

I: Jaja, klar

S: verändert sich ... auf jeden Fall wenn man es nach rechts her zieht ... in in die Plusrichtung [bewegt dabei den Regler soweit nach rechts, dass die Parabel fast aus dem Fenster verschwindet] ... und wenn man es nach unten zieht in die Minusrichtung [bewegt den Regler nach links, dass der Scheitelpunkt der Parabel fast den unteren Fensterrand erreicht] und da wird die Parabel breiter bleibt aber immer noch nach oben geöffnet.

I: Können Sie sich erklären, warum die Parabel sich nach oben bzw. nach unten verschiebt, wenn man den Schieberegler verändert [weist mit dem Kugelschreiber auf den Schieberegler]

S: [betrachtet den Schieberegler, spricht leise, fast unverständlich] hm was bedeutet a ... was ... bedeutet a [lehnt sich zurück, spricht laut] a ist ja ... a war ja auch irgendwas ... a is ja ... die y-Richtung.

Dass sich die „Breite“ des Graphen verändert ist mit Blick auf den Term eine falsche Deutung der Wirkung von a. Er beschreibt in geometrischer Interpretation eine Translation. Trotzdem kann die Veränderung des Graphen als eine Art Streckung oder Stauchung erscheinen, wenn man die kürzesten Abstände zwischen dem Original und dem veränderten Graphen betrachtet (Abb. 2).

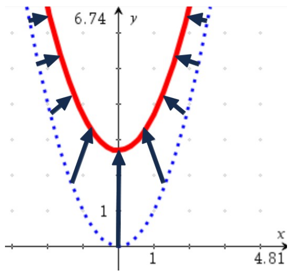

Abb. 2: Nur verschoben oder auch gestaucht?

Beide Deutungen – Verschiebung und Stauchung – sind begründbar, wenn man nur dem Anschein folgt. Der Term allerdings lässt die Deutung der Wirkung von a als Stauchung nicht zu. Auch wenn der Student nur die Verschiebung erwähnt hätte, wäre doch unklar geblieben, ob er nur dem visuellen Eindruck gefolgt ist. Korrektes Antwortverhalten muss also nicht heißen, dass der Sachverhalt verstanden ist. Man läuft Gefahr, eine durchaus korrekte Beschreibung von bloßen Oberflächenmerkmalen mit dem Verstehen des Sachverhalts zu verwechseln, Schüler wie Lehrer.

Zusammenhänge nicht nur erkunden, sondern auch verstehen

Dabei birgt der Einsatz von dMER große Chancen für einen verständigen Zugang zu Funktionalen Zusammenhängen. Man muss nur klar benennen, was Verstehen hier bedeutet. Ein Lernender muss beim Vergleich zwischen den veränderbaren Repräsentationen strukturelle Analogien zwischen den Repräsentationsformen aufzeigen: In allen drei Repräsentationen der Funktion f beschreibt der Parameterwert a eine Differenz zwischen dem ursprünglichen und dem neuen Funktionswert. Weil der Graph sich als geometrischer Repräsentant von f aus Punkten mit den Koordinaten (x;f(x)) zusammensetzt, ändert sich mit a nur die zweite Koordinate jedes Punktes, wie deutlich an der Wertetabelle ersichtlich ist. Diese zweite Koordinate bestimmt die Höhe des Kurvenpunktes über der horizontalen Achse. Weil sie für alle Graphenpunkte gleichermaßen um a verändert wird, ist die Wirkung von a als Translation des gesamten Graphen zu deuten.

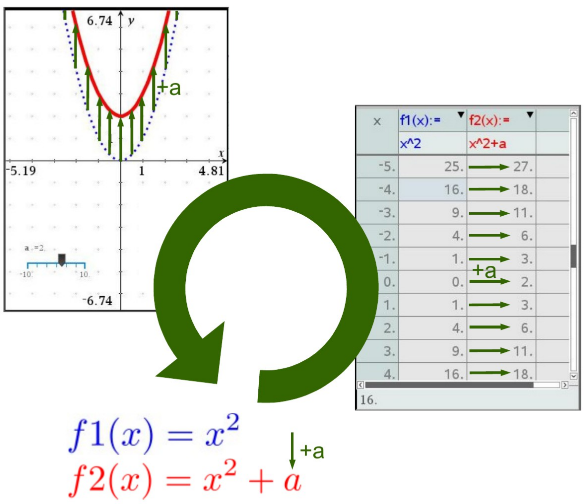

Abb. 3: Die Wirkung des Parameter a auf die drei Repräsentationsformen von f als Invariante

Diese Wirkung von a auf die drei Repräsentationen von f ist selbst nicht visualisiert. Sie wird deutlich, wenn man sie als strukturell analoge Eigenschaft innerhalb und zwischen den Repräsentationsformen erkennt. Die „Änderung um a“ erscheint so als eine Invariante in der dMER mit einer je spezifischen Ausdrucksform in jeder Repräsentationsform. Die Wirkung von a auf Term, Tabelle und Graph von f verstehen heißt also, von jedem Repräsentationskontext zu abstrahieren und dabei die Priorität der algebraischen Repräsentation als deutungsleitend zu erkennen (Pinkernell 2014).

Wie Studierende ihre Beobachtungen begründen

Zusammen mit dem eingangs analysierten Interview wurden vermittels der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2010) weitere Interviews mit dem Ziel analysiert, Begründungstypen von besonderem theoretischen Interesse zu identifizieren, wobei drei Lehramtsstudierende als Kodierer zum Einsatz kamen. Neben den vorgegebenen Kategorien „Begründung mit Regelbezug“ und „Begründung mit Strukturbezug“ kam im Laufe der drei Kodiervorgänge die Kategorie „Begründung mit Beispielbezug“ hinzu. Zudem wurde das bekannte Toulminsche Argumentationsschema dem Kategorienmodell zugrunde gelegt, um deutlicher zwischen der Beschreibung der Wirkung von a und einer Begründung mit Regelbezug unterscheiden zu können. Abb. 4 zeigt das Modell. Die Beobachtung und jede der drei Kategorien ist durch Aussagen aus den Interviews illustriert worden, die von allen vier Beteiligten gleichermaßen kategorisiert wurden. Zur Verwendung als „a posteriori“ Ankerbeispiel im Kategorienmodell wurden sie sprachlich geglättet.

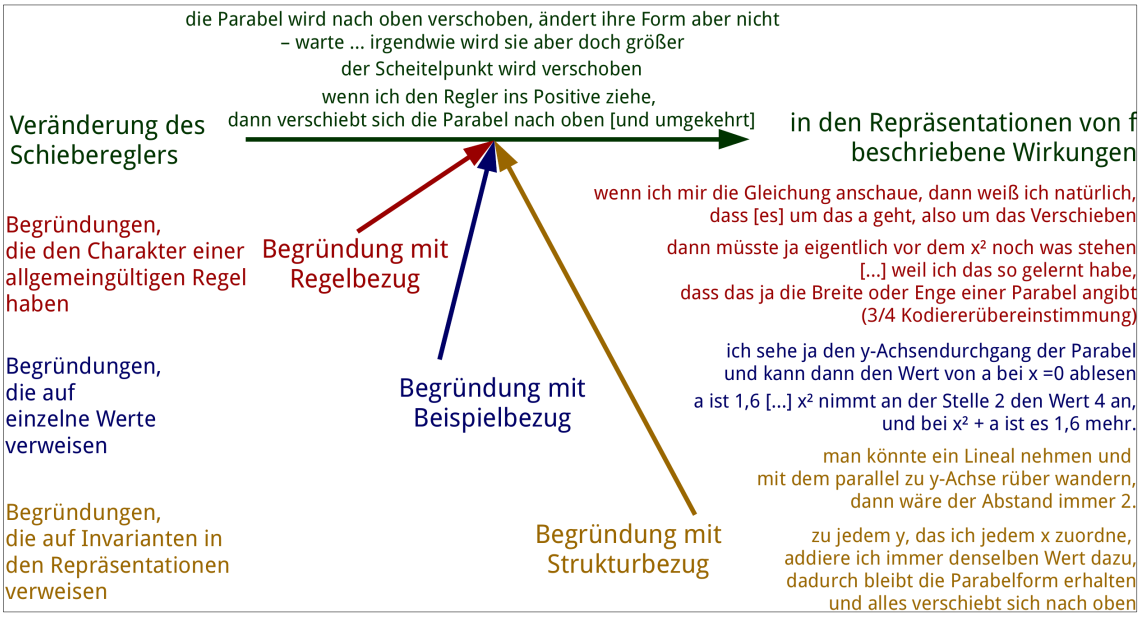

Abb. 4: Ein theoriebasiertes Kategoriensystem für Begründungen beim Lernen mit dMER

Das Modell kann eine aus fachlicher Perspektive notwendige Reflexionstiefe verdeutlichen, außerdem kann es mögliche Fehldeutungen im Umgang mit dMER deutlich werden lassen, und zwar als Oberflächenbezüge, die als (unverstandene) Regelbezüge im Widerspruch zu Strukturbezügen stehen. Die Entwicklung eines standardisierten Diagnoseinterviews auf Basis dieses Modells erfolgt in kommender Zeit.

Literatur

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. Computers & Education, 33, 131–152.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse* (11th ed.). Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Pinkernell, G. (2014). Mathematisches Grundwissen und Computeralgebra im Unterricht. *Der Mathematikunterricht* (1).