Melanie PLATZ, Engelbert NIEHAUS, Landau

Maßtheorie mit mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern - Chancen und Grenzen

Die Wahl des Weges kann entscheidenden Einfluss auf das Risiko haben, welchem sich Personen aussetzen. Risikowahrnehmung und qualitatives räumliches Verständnis von Risiken kann mit Integralrechnung verbunden werden. Durch die Auswertung der Risikofunktion entlang eines Weges entstehen Wegintegrale, die im Themenkanon der Sek.-analysis im Kontext der Integration behandelt werden können. Empirische Forschung mit SuS mit besonderen naturwissenschaftlichen Begabungen wird durchgeführt.

1. Einleitung

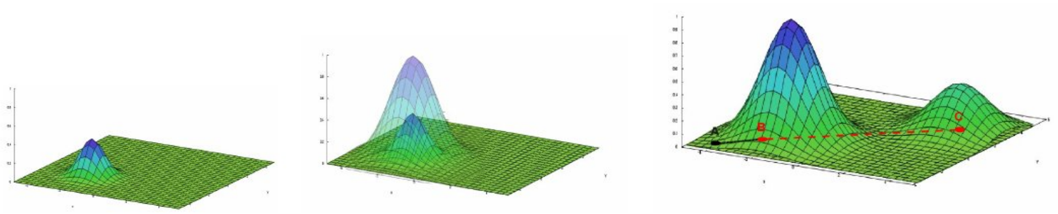

Abb. 1: Entwicklung epidemiologischer Risiken (Platz, 2014, S. 91)

Risiko kann mit einer Risikokarte visualisiert werden. Eine Risikokarte ordnet einem geographischen Ort ein Risiko zu. Auf der linken Seite in Abb. 1 ist eine vereinfachte Risikokarte, welche das Risiko für die Infektion mit einer Krankheit zeigt, dargestellt. In der Mitte ist die erwartete Entwicklung des Risikos visualisiert, wenn sich die Krankheit konzentrisch weiter ausbreitet. Die Wahrnehmung von Risiken („weit entfernt vom Risikogebiet bin ich sicher“) widerspricht aber oft der tatsächlichen räumlichen Entwicklung der Ausbreitung ansteckender Krankheiten: Obwohl der Euklid. Abstand zwischen den Punkten A und B kleiner ist als zwischen B und C, ist das Risiko an Punkt C höher als an Punkt A. Im Fall von „Flughafenmalaria“, reisen infizierte Moskitos oder infizierte Personen mit dem Flugzeug ein. Übertragen auf unser Beispiel wären dann Flughäfen an den Punkten B und C positioniert. Das Netz von Flugverbindung verändert epidemiologische Distanzen, die nicht notwendigerweise deckungsgleich mit den Euklid. Entfernungen im Raum sind. Diese epidemiologischen Abstände erfüllen mathematisch u. U. auch nicht mehr die Eigenschaften einer Metrik, da u. a. die Symmetrie-Eigenschaft nicht erfüllt ist, falls z. B. mehr Reisende von B nach C als von C nach B fliegen würden. Folglich müssen topologische Räume verwendet werden, da epidemiologische Abstände im Gesundheitsbereich existieren, die nicht notwendigerweise mehr Euklidisch sein müssen. Das Risiko, dem eine Person ausgesetzt ist, ist von deren räumlichen Aktivitäten im Risikogebiet abhängig. Wegintegrale ermögli-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 907–910). Münster: WTM-Verlag

chen die Berechnung des Risikos für einen bestimmten Weg und können durch einen enaktiven Zugang (vgl. Rapp et al. 2014) auf die Integralrechnung in der Sek. II zurückgeführt werden. Mathematisch begabte SuS können bereits während der Schulzeit an der Universität Koblenz-Landau ein Frühstudium aufnehmen („Schüleruni"). Sie nehmen an regulären Lehrveranstaltungen teil und können Leistungsnachweise erwerben. (www.uni-koblenz-landau.de/landau/landau/fb7/mathematik/projekte/schueleruni).
Die Veranstaltung zur Schüleruni im WS 2013/2014 fand im mathematischen Umweltlabor (UWL) statt. Im UWL arbeiten SuS mit besonderen naturwissenschaftlichen Begabungen an Fragestellungen aus den Umweltwissenschaften, die gleichzeitig mathematische Modellbildung für die Problemlösung benötigen. Inhaltlich kann der Themenbereich auf die räumlich explizite Risikobewertung in den Umweltwissenschaften eingegrenzt werden. Risikokarten können als 3-dimensionale Graphen dargestellt werden. Das Risiko, welchem eine Person, die ein Risikogebiet durchquert, ausgesetzt ist, kann durch Integration gemessen werden. Die Veranstaltung „Messen in Räumen" (MiR) führte von der Integration der Schulmathematik über Wegintegrale zur Maßtheorie.

2. Umsetzung im Rahmen einer Veranstaltung der Schüleruni

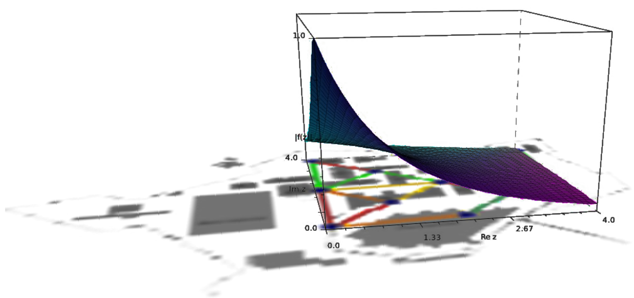

Abb. 2: Komplexe Risikokarte über dem Wegenetz auf dem Universitätscampus

6 SuS (9.-12.Klasse), 1 Masterstudentin und 2 PromotionsstudentInnen besuchten die 2-SWS-Veranstaltung MiR. Die Themen Norm, Metrik, Differentialrechnung, Integralrechnung, mehrdimensionale Integration und Funktionenräume wurden behandelt. Es folgte ein Exkurs in die Funktionentheorie, um die Berechnung von Wegintegralen zu ermöglichen. Die Lernenden arbeiteten am PC an vorgefertigten Lernstationen zur Lösung von Wegeproblemen (Platz et al., 2012) und zur Erstellung von 2- und 3-dimensionalen Risikokarten mit Hilfe von *Geogebra*- und *Maxima*-Applets. Dabei wurden die Handlungen der Lernenden am Bildschirm mit der Screencastsoftware *Vokoscreen* aufgezeichnet. Danach wurde eine komplexe Risikokarte erzeugt (siehe Abb. 2). Durch die Festlegung eines Weges wird das Risiko an jedem Ort des Weges ausgewertet. Dadurch entsteht ein Risiko-Zeit-Diagramm, das jedem Zeitpunkt das Risiko zuordnet, dem eine Person an diesem Ort ausgesetzt ist. In Abhängigkeit der Zeit entsteht so aus dem 3-dimensionalen Graphen der Risikokarte eine Integration einer

Funktion mit einem 2-dimensionalen Graphen. Die Berechnung wurde zunächst per Hand ausgeführt und anschließend von den Lernenden in einem *Maxima*-Applet umgesetzt. Anschließend wurde die Maßtheorie auf Topologischen Räumen behandelt.

3. Zusammenfassung und Ausblick

Da SuS ab der 9. Klassenstufen an der Veranstaltung MiR teilnahmen, mussten häufig Inhalte der Sek., der Oberstufe und des Grundstudiums bedarfsorientiert in der Veranstaltung behandelt werden. Auch wenn die Veranstaltung nicht alle geplanten Aspekte der Lernveranstaltung inhaltlich umsetzen konnte, ist die Geschwindigkeit, mit der die SuS die Lerninhalte ausgreifen und in die Problemlösung integrieren beeindruckend. Ein großer Teil der fachwissenschaftlichen Inhalte war den SuS nicht bekannt. Aus Zeitgründen konnte die Aufarbeitung von Lernvoraussetzungen nicht vollständig in der Lehrveranstaltung durchgeführt werden. Am Ende der Veranstaltung fand eine 25-minütige mdl. Prüfung statt. Dabei wurden folgende Probleme deutlich: Während qualitative logische Zusammenhänge für die räumliche Problemlösung in der Regel korrekt abgeleitet werden konnten, konnten bei der exakten formalen Schreibweise Probleme bei der Lese- und Schreibkompetenz der Formelsprache festgestellt werden. Auch wenn im Laufe der Lehrveranstaltung eine Verbesserung im Umgang mit der Formelsprache festzustellen war, bleibt die Semantik von Quantoren, Element- und Teilmengenbeziehung, etc. insbesondere bei Mengensystemen schwierig. Zum anderen wurde die Bedeutung von abstrakten Definitionen für die Problemlösung unterschätzt. Logische Grundkomponenten des Argumentierens (Voraussetzungen, Schlussfolgerung, Begründungen, etc.) bedürfen einer grundlegenden Unterstützung. Diese Aspekte beziehen sich aber lediglich auf die symbolische Darstellung in der Formelsprache selbst, in der Prüfungssituation konnten die SuS mit kleinen Hilfestellungen Definitionen und Voraussetzungen selbst herleiten. Auffällig war, dass Inhalte mit einem starken Anwendungsbezug bei den SuS stärker im Gedächtnis blieben und die Herleitung von abstrakteren Beschreibungen vorbereiten konnten. Z. B. löste der jüngste Schüler (9. Klasse) ein mehrdimensionales Integral in der Prüfung. Ebenso wurden Transferaufgaben mit Anwendungsbezug in der Prüfung gut gelöst. Beweise in allgemeinen topologischen Räumen konnten jedoch in der Prüfung nicht behandelt werden. Um die Formelschreibweise der SuS zu verbessern, könnten maßgeschneiderte Hilfestellungen zur jeweiligen Veranstaltung zur Verfügung gestellt werden, die den Anwendungsfall strukturgleich in eine formale Schreibweise überführen und umgekehrt formale Schreibweisen im Kontext eines Anwendungsfalles interpretieren. Von diesem Wechsel der Repräsentationsformen im Kontext der nicht-normativen mathematischen Modellbildung könnten auch die Lehramtsstudierenden profitierten. Für die Optimierung der Veranstaltung MiR müsste der zeitliche Rahmen auf 4 SWS ausgedehnt werden. Mischung aus Vorlesung und Übung erscheint notwendig, um schnell auf fehlende Lernvoraussetzungen reagieren zu können. Identifizierte Lernvoraussetzungen könnte in folgenden Veranstaltungen zusätzliche Online-Übungen ergänzt werden. Dabei könnten Beweisaufgaben im Sinne von elektronisch unterstützten Beweisen als Online-Übungsaufgaben in *IMathAS* zur Verfügung gestellt werden (vgl. Niehaus, 2014). Videokonferenzen mit *OpenMeetings* könnten für die Unterstützung von Übungen abgehalten werden, damit eine zusätzliche Anreise der SuS nicht notwendig wird. Die Online-Übungsaufgaben hätten diagnostische Funktion, da die Lösungen den einzelnen SuS zugeordnet werden können und den SuS somit maßgeschneiderte Hilfestellungen angeboten werden können (vgl. Hennecke et al., 2005). Durch die häufige Gruppenarbeit in der Veranstaltung kann individuelle Hilfestellung nur selten bereitgestellt werden. Da ausschließlich OpenSource Software und OpenContent verwendet wird, können die Materialien und Übungsaufgaben auch mathematisch begabten SuS zur Verfügung gestellt werden, die nicht an der Veranstaltung teilnehmen können (open-source.gbdirect.co.uk/migration/benefit.html). Allerdings sollte die Veranstaltung nicht komplett online stattfinden, da so das Prinzip des gemeinsamen Problemlösens mit Studierenden an der Universität nicht mehr gegeben wäre und den SuS der persönliche Kontakt mit anderen SuS und Studierenden sehr wichtig ist. Ein langjähriger Teilnehmer der Schüleruni äußerte: „In der Schule gibt es viele Leute, die Mathe nicht mögen, aber hier interessieren sich alle für Mathe und verstehen wirklich, warum man das Fach mag. Deswegen ist die Atmosphäre hier viel besser." (www.uni-koblenz-landau.de/blog/fruehstudium-landau/).

Literatur

Platz, M. (2014). *Mathematical Modelling of GIS Tailored GUI Design with the Application of Spatial Fuzzy Logic.* Universität Koblenz-Landau. http://kola.opus.hbz-nrw.de/volltexte/2014/965/ .

Rapp J., Niehaus E. (2014). Möglichkeiten zur Visualisierung von Risikofunktionen im Dreidimensionalen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014.*

Platz, M., Niehaus, E. (2012). Test-Umgebung für räumliche Entscheidungsunterstützung zur späteren Verwendung in Augmented Reality für mobile Endgeräte. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*, S. 661-664.

Niehaus, E. (2014). *e-proof - Electronic Proofs in Education*. http://e-proof.weebly.com/, abgerufen am 18.03.2014.

Hennecke, M., Winter K. (2005). Lernsoftware und Lehrwerke: Adaptierte Lernsoftware. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005.*