

## Sortieren und Begründen als Indikator für flexibles Rechnen? Eine Untersuchung mit Grundschulern aus Deutschland und den USA

Flexibles Rechnen wurde in den letzten Jahren zum zentralen Ziel des Mathematiklernens in der Grundschule; dementsprechend nahm auch das Forschungsinteresse in diesem Bereich zu (Heinze, Marschick & Lipowsky, 2009). Betrachtet man die verschiedenen Forschungsarbeiten (siehe Sektionseinführung), fallen nicht nur unterschiedliche Fragestellungen auf, sondern insbesondere auch inkonsistente Sichtweisen auf das flexible Rechnen (Star & Newton, 2009). Da die jeweilige Definition sowohl die Erhebung und Analyse der Daten als auch die Interpretation der Ergebnisse entscheidend beeinflusst, werden hier zunächst verschiedene Definitionen skizziert, um dann das der Studie<sup>1</sup> zugrunde liegende Verständnis detailliert darzustellen.

### Flexibles Rechnen konzeptualisieren

In this way, flexible mental calculation can be seen as an individual and personal reaction with knowledge, manifested in the subjective sense of what is noticed about the specific problem. (Threlfall, 2002, 42)	Flexibles Rechnen wird im Sinne von aufgabenadäquatem Handeln gesehen, welches in Abhängigkeit von den spezifischen Aufgabenmerkmalen und den Mitteln des Lernenden steht. (Rathgeb-Schnierer, 2006, 294)
We choose to navigate through this somewhat confusing terrain by [...] defining flexibility as knowledge of multiple solutions as well as the ability and tendency to selectively choose the most appropriate ones for a given problem and a particular problem-solving goal. (Star & Newton, 2009, 558)	In the present article we will, henceforth, use the dual term 'flexibility/adaptivity' as the overall term, 'flexibility' for the use of multiple strategies, and 'adaptivity' for making appropriate strategy choices. (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009, 337/338)

Abb. 1: Definitionen von flexiblem Rechnen

Bezüglich der Konzeptualisierung von flexiblem Rechnen werden an den ausgewählten Definitionen generelle Tendenzen deutlich: Konsens herrscht dahingehend, dass flexibles Rechnens als situatives, aufgabenadäquates Handeln verstanden wird, das einen beweglichen Umgang mit strategischen Werkzeugen impliziert. Dissens besteht im Verständnis und in der Identifikation von Aufgabenadäquatheit. Rechtsteiner-Merz (2013) bündelt die unterschiedlichen Vorstellungen in folgenden drei Ansätzen: Aufgabenadäquatheit wird beschreiben als Zusammenhang von Lösungsweg und

<sup>1</sup> Durchführung in Kooperation mit Dr. M. Green der UNC Charlotte (USA)  
In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 943–946).  
Münster: WTM-Verlag

Aufgabencharakteristik (Abb. 2, Torbeyns et al., 2009), von Lösungsweg, Lösungsgeschwindigkeit und Lösungsrichtigkeit (Abb. 2, Torbeyns et al., 2009) oder von Lösungsweg und Zahl- und Aufgabeneigenschaften sowie deren Beziehungen (Abb. 2, Rathgeb-Schnierer & Green, 2013).

First [...] we employed the definition of strategy flexibility as choosing among different strategies simply on the basis of the characteristics of the task, [...]. Second, we also applied a more sophisticated definition wherein strategy flexibility is conceived as selecting the strategy that brings the child most quickly to an accurate answer to the problem. (Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009, 583)

Only if the tools of solution are linked in a dynamic way to problem characteristics, number patterns, and relationships would we consider as evidence of flexibility in mental calculation. (Rathgeb-Schnierer & Green, 2013, 357)

**Abb. 2: Verständnis von Aufgabenadäquatheit**

## **Flexibles Rechnen erfassen**

In Anlehnung an Threlfall (2002, 2009) wird flexibles Rechnen als aufgabenadäquates Handeln verstanden, das sich darin zeigt, dass sich der Lösungsprozess nicht auf Verfahren stützt, sondern auf aufgabenbezogene Eigenschaften und Beziehungen. In Anlehnung an das Modell „Ebenen des Lösungsprozesses“ (Rathgeb-Schnierer, 2011, 16) werden zwei Ebenen in den Blick genommen: die der Lösungswerkzeuge verknüpft mit der Referenzebene, die sich auf kognitive, den Lösungsprozess stützende Elemente bezieht. Grundlegend ergibt sich damit die Herausforderung, ein Untersuchungsinstrument zu finden, das nicht nur die Lösungswerkzeuge und den Referenzkontext erfasst, sondern auch Aussagen über Zusammenhänge ermöglicht.

Vor dem dargestellten Verständnis ergeben sich **Forschungsfragen** zu drei verschiedenen Gesichtspunkten:

- **Untersuchungsinstrument:** Eignen sich Sortier- und Begründungsaufgaben, um flexibles Rechnen zu erfassen? Zeigen sich Unterschiede beim Sortieren und Begründen und geben diese Hinweise auf Grade von Flexibilität?
- **Begründungsmuster:** Zeigen Schülerinnen und Schüler Begründungen auf der Basis von Aufgaben- und Zahlenmerkmalen sowie Beziehungen? Zeigen sich Zusammenhänge zwischen Begründungen und genutzten Lösungswerkzeugen?
- **Unterrichtskontexte:** Zeigen sich Unterschiede beim Sortieren und Begründen in verschiedenen Unterrichtskontexten?

Um diesen Fragen nachzugehen, wurde eine qualitative Studie anhand von Leitfadeninterviews durchgeführt. Hierfür wählten wir Zweit- und Viert-

klässler aus verschiedenen Unterrichtskontexten aus. Insgesamt umfasst die Stichprobe 91 Kinder aus zehn verschiedenen Klassen: pro Land (Deutschland, USA) jeweils drei verschiedene Klassen der zweiten und zwei verschiedene Klassen der vierten Jahrgangsstufe.

Das Interview beinhaltet zwölf verschiedene Additions- und Subtraktionsaufgaben aus dem Zahlenraum bis 100. Jede Aufgabe wurde so konzipiert, dass sie mindestens ein spezielles Merkmal beinhaltet. Spezielle Merkmale sind beispielsweise Doppelt-Halb-Beziehungen, Umkehrbeziehungen, dieselben Ziffern an Zehner- und Einerstellen, die Nähe zum nächsten Zehner, Zehnersummen an den Einerstellen sowie der Zehnerübergang. Folgende Aufgaben wurden auf Karten geschrieben und eingesetzt:  $33+33$ ,  $66-33$ ,  $56+29$ ,  $46-19$ ,  $31-29$ ,  $73+26$ ,  $88-34$ ,  $34+36$ ,  $65+35$ ,  $95-15$ ,  $47+28$  und  $63-25$ . Das Interview ist in drei Schritten aufgebaut: das Sortieren der Aufgaben, das Begründen des Sortierens und das Lösen der (bis dahin noch nicht gelösten) Aufgaben mit Beschreibung des Vorgehens.

Die **Analyse** aller transkribierten Interviews erfolgt anhand zweier verschiedener Kategoriensysteme, die sich zum einen auf die Begründung des Sortierens zum anderen auf das Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler beziehen. Nachfolgend wird speziell auf die Begründung des Sortierens eingegangen.

Bei der Transkription der Interviews kristallisierten sich zwei Begründungsrichtungen heraus – das Begründen über Merkmale oder über Rechenwege. Auf diese Weise ließen sich induktiv die folgenden vier Hauptkategorien entwickeln: Begründung über Merkmale für jeweils leichte (BMI) und schwere Aufgaben (BMs) sowie Begründung über Lösungswege für jeweils leichte (BLI) und schwere Aufgaben (BLs). Diese Hauptkategorien wurden theoriebasiert in eine erste Stufe von Unterkategorien eingeteilt, die wir bei Bedarf daten- und theoriebasiert weiter ausdifferenzierten. Die Begründungen von zwei Kindern, die die Aufgabe  $33+33$  der Kategorie leicht zuordneten, wurden z. B. wie folgt kodiert:

Begründung (33+33)	Kodierung
S: Because there's the same numbers in each 'um space.	reasoning by characteristic – easy <ul style="list-style-type: none"> <li>• spezial numbers / digits <ul style="list-style-type: none"> <li>• same numbers / digits</li> </ul> </li> </ul>
Because first I add 30 and 3, and then I add 3.	reasoning by way of solution – easy <ul style="list-style-type: none"> <li>• compose and decompose <ul style="list-style-type: none"> <li>• mixed method</li> </ul> </li> </ul>

Abb. 3: Beispiel für Kategorisierung

## Ergebnisse

Die nachfolgenden ersten Ergebnisse beziehen sich auf die kodierten Begründungen einer Teilstichprobe, die 20 Zweitklässler aus Charlotte (USA)

und 22 Zweitklässler aus Weingarten (D) umfasst. Insgesamt tauchen bei dieser Stichprobe 558 Begründungen auf, pro Kind durchschnittlich 12,8 (Min. 9/ Max. 19). Insgesamt wurde ein Viertel der Aufgaben als schwer und drei Viertel als leicht eingeschätzt; dies entspricht unseren Erwartungen, die wir aufgrund der Aufgabenauswahl hatten. Die Begründungen für leichte Aufgaben stützen sich etwa zu gleichen Teilen auf Merkmale und auf Rechenwege; bei schweren Aufgaben wurde häufiger über Merkmale als über Rechenwege begründet (2:1).

Betrachtet man die Begründungen über Merkmale detailliert, so zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen leichten und schweren Aufgaben. Bei leichten Aufgaben wird mit spezifischen Merkmalen der Einerstellen (5er Zahlen und Zehnersummen, insg. 32%), Aufgaben- und Zahlbeziehungen (Umkehraufgabe und Doppelt-Halb-Beziehung, insg. 24%) und Basisfakten (Auswendigwissen, 23%) argumentiert. Bei den schweren Aufgaben stützen sich die Kinder vor allem auf spezifische Merkmale der Einerstellen (Zehnerübergang, 82%).

Fasst man die zwei Begründungsrichtungen (Merkmale oder Rechenwege) zusammen, so zeigen sich bereits in dieser Teilstichprobe klassenspezifische Tendenzen: die vorwiegende Begründung über Merkmale oder über Rechenwege. Beim vorwiegenden Begründen über Merkmale taucht innerhalb einer Klasse eine Vielfalt von Argumenten auf; wir bezeichnen dies als dynamisch. Das Begründen über Rechenwege gestaltet sich dagegen innerhalb einer Klasse statisch; d.h. es wird in der Regel immer derselbe Rechenweg genutzt. Dieselben Begründungsmuster erscheinen auch bei der Einzelfallbetrachtung: Kinder, deren Präferenzen bei den Merkmalen liegen, begründen dynamisch, indem sie verschiedene Merkmale heranziehen. Kinder, deren Präferenzen bei den Rechenwegen liegen, begründen statisch, indem sie sich nahezu ausnahmslos auf einen Rechenweg stützen.

Diese ersten deskriptiven Ergebnisse geben Aufschluss über Begründungsmuster sowie einen Hinweis auf Unterschiede und Tendenzen in verschiedenen Unterrichtskontexten. Die Frage nach den Zusammenhängen zwischen Begründungen und Lösungswerkzeugen bleibt dagegen bislang unbeantwortet. Der nächste Auswertungsschritt fokussiert auf diesen Aspekt, um Aufschlüsse darüber zu bekommen, inwiefern das Sortieren und Begründen Hinweise auf Grade von Flexibilität geben kann.

## **Literatur**

Die Literaturliste kann per Email bei der Autorin angefordert werden:

[rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de](mailto:rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de)