Stephan ROSEBROCK, Karlsruhe

Die Morse-Thue Folge und Begabungsförderung

Im ersten Teil wird eine Folge von Symbolen vorgestellt, die Morse-Thue Folge, die viele spannende Eigenschaften hat. Diese Folge lässt sich leicht erzeugen und untersuchen. Sie führt auf elementare Weise zu einem Fraktal, der Koch-Kurve. Im zweiten Teil wird knapp begründet, warum sich diese Folge hervorragend zur Begabungsförderung von Schülern in der Sekundarstufe eignet. Sie ist motivierend und an ihr lässt sich wirkliches mathematisches Arbeiten erleben.

1. Die Morse-Thue Folge

Wir definieren Folgen von Nullen und Einsen (es können auch zwei beliebige andere Symbole sein). Wir beginnen mit $M_0 = 0$. Wir ersetzen die 0 durch 01 und erhalten $\mu(M_0) = M_1 = 01$. Jetzt ersetzen wir jede 0 durch 01 und jede 1 durch 10 und erhalten $\mu(M_1) = M_2 = 0110$. Ersetze wieder 0 durch 01 und 1 durch 10 und erhalte $\mu(M_2) = M_3 = 01101001$. Im nächsten Schritt erhalten wir $\mu(M_3) = M_4 = 0110100110010110$, usw.

Wir definieren auf eine zweite Weise Folgen von Nullen und Einsen. Wir beginnen mit $T_0 = 0$. Beim Übergang von T_i nach T_{i+1} schreiben wir das Komplement $\overline{T_i}$ von T_i hinter T_i . Dabei gilt für das Komplement $\overline{0} = 1$ und $\overline{1} = 0$. Wir erhalten also $T_1 = T_0\overline{T_0} = 01$. Im nächsten Schritt $T_2 = T_1\overline{T_1} = 0110$ und $T_3 = T_2\overline{T_2} = 01101001$, usw.

Wir haben also zwei verschiedene Konstruktionsvorschriften für Folgen. Bei der ersten haben wir ein Alphabet A={0,1} und wir betrachten einen Morphismus $\mu: A^* \to A^*$ von allen Worten über A in alle Worte über A definiert durch $\mu(0) = 01$, $\mu(1) = 10$ und $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$. Dann definieren wir $\mu^i(0) = M_i$. Die zweite Konstruktionsvorschrift sagt einfach $T_0 = 0$ und $T_{i+1} = T_i\overline{T_i}$ wobei $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ und $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$.

Man kann beweisen, dass $M_i = T_i$ für alle i gilt. Wegen der zweiten Konstruktionsvorschrift (T_{i+1} beginnt mit T_i) gibt es einen Grenzwert. Im Limes erhält man die sogenannte Morse-Thue Folge

T = 0110100110010110100101100110100110010110011010010 1….

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \mu^n(0) = T$ und $\mu(T) = T$.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 995–998). Münster: WTM-Verlag

Die Morse-Thue Folge hat schöne Eigenschaften. Sie ist selbst-ähnlich, d.h. streicht man jede zweite Ziffer, so erhält man dieselbe Folge noch einmal. Denn $\mu(T) = T$ impliziert $x_n = x_{2n}$ und $x_{n+1} = 1 - x_{2n}$, falls man die Ziffern der Morse-Thue Folge mit x_i bezeichnet beginnend mit x_0, d.h. $T = x_0x_1x_2x_3\ldots$

Wir ordnen der natürlichen Zahl i eine 1 zu, wenn die Anzahl Einsen in der Binärdarstellung von i ungerade ist und eine 0 sonst:

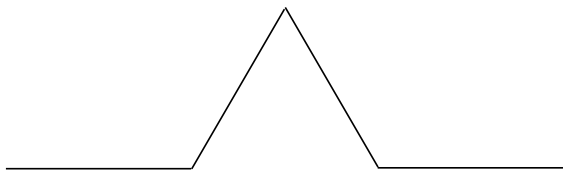
Dezimalzahl	Binärzahl	Anzahl Einsen gerade/ungerade
0	0	0
1	1	1
2	10	1
3	11	0
4	100	1
5	101	0
6	110	0
7	111	1

Wieder erhalten wir die Morse-Thue Folge. Das liegt daran, dass wir alle Binärzahlen mit genau n+1 Ziffern aus allen Binärzahlen mit höchstens n Ziffern bekommen, indem wir eine 1 und zum Auffüllen leerer Stellen Nullen davor schreiben. Beim Zählen der Einsen wird also der Anfang invertiert angefügt, wie bei der zweiten Erzeugungsweise der Folge oben.

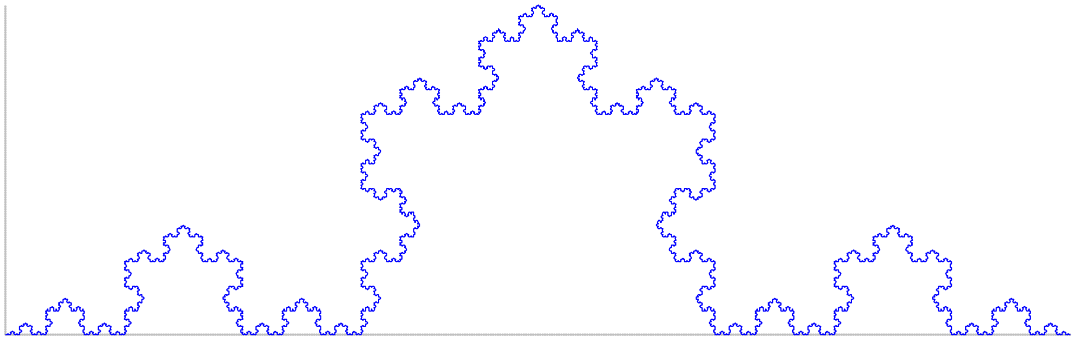
Man interpretiere die Morse-Thue Folge als Zeichenvorschrift beginnend mit i=1:

1. gehe einen Schritt nach vorne
2. a.) ist $x_i \neq x_{i-1}$, drehe die Richtung 60° gegen den Uhrzeigersinn

   b.) ist $x_i = x_{i-1}$, so drehe die Richtung um 120° im Uhrzeigersinn
3. Beginne wieder mit Schritt 1 und erhöhe i um 1.



In der Abbildung sieht man das Resultat für die ersten 4 Folgenglieder 0110. Was erhalten wir, wenn wir weiter zeichnen? Wir lassen Maxima das Resultat für 4096 Folgenglieder zeichnen:



Man erhält die Koch-Kurve. Der Beweis dazu ist nicht schwer. Wenn man die Zeichenvorschrift für die ersten 4^k Glieder der Morse-Thue Folge befolgt, dann erhält man den k-ten Iterationsschritt an die Kochkurve. Das liegt an der Gleichung $T_{i+2} = T_i\overline{T_i T_i}T_i$ wie man sich überlegen kann.

2. Begabungsförderung

Die Gestaltpsychologie hat sich schon früh mit Denkprozessen, insbesondere in der Mathematik, beschäftigt. Schon Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts bei Wertheimer und später bei Metzger ging es um mathematische Denkprozesse.

Im gestaltpsychologischen Menschenbild geht man davon aus, dass Menschen von Geburt an in aktiver Auseinandersetzung mit ihrer Umwelt stehen. Dabei hat der Mensch von Anfang an die „Tendenz zur guten Gestalt" als selbstwirksames Ordnungsprinzip (Soff, 2011, S. 67). Dieses sogenannte Prägnanzprinzip ist die „Fähigkeit, Strukturen zu erkennen", statt nur viele Details wahrzunehmen. Das Prägnanzprinzip ist bereits nah am mathematischen Denken, bei dem es auch um Strukturen geht und nicht um Einzelheiten.

Nach Metzger ist ein schöpferischer Prozess ein „freier und dynamischer Fall von Zielerreichung" (Soff, 2011, S. 71). Die mechanische Zielerreichung, also die Befolgung von Rechenregeln, ist nach Metzger nicht schöpferisch, oder in moderner Sprache, kreativ. Im Gegensatz dazu geht es bei der dynamischen Zielerreichung um ein freies Wechselspiel verschiedener Kräfte im Hinblick auf das Ziel, also, wenn es etwa um die Lösung einer Mathematikaufgabe geht, um Dinge wie: Wie sehr motiviert mich das Problem, was lenkt mich gerade ab, bin ich im tiefsten der Meinung, dass mir das Problem sowieso zu schwer ist oder bin ich begeistert von der Fragestellung, etc. Nach Metzger ist es wichtig, dass der Denkende genügend beweglich ist und sich hemmungsfrei in das Kräftefeld der Problemlösung einspielen kann.

Wichtig für uns ist Metzgers „dritter Sinn von schöpferischer Freiheit“: Der Bewegungsraum muss unverbaut sein von vorgebauten Wegen. Das Denken muss frei sein von „verfestigten Begriffssystemen, von eingefahrenen Denkgewohnheiten[…], Verfahrensvorschriften“. Für die Schule heißt das, dass man den Schülern Probleme präsentieren muss, bei denen ihnen die bereits vorgegebenen Denkstrukturen aus dem Mathematikunterricht nichts nutzen. Der Schüler muss sich dem Problem intuitiv nähern können, keine Formeln dürfen helfen.

Zur Förderung der Kreativität ist es zentral, dass das präsentierte Problem fruchtbares Staunen beim Schüler weckt. Damit bereitet man den Boden für die Prägnanztendenz. Die Morse-Thue Folge ist von diesem Typ. Es gibt ein regelmäßiges einfaches Bildungsgesetz und es scheint nur ein chaotisches Durcheinander von Nullen und Einsen zu entstehen. Ganz natürlich ergibt sich der Wunsch, die Struktur dahinter zu erkennen. Auch die Morse-Thue Folge, als Anzahl Einsen von Binärzahlen, oder die Koch-Kurve erzeugt aus der Folge weckt ein natürliches Staunen.

Zentral ist auch, dass ein echter nicht-trivialer mathematischer Gehalt hinter einem Problem steckt damit das Verstehen des Hintergrunds zu einer echten neuen Erkenntnis werden kann. Reduziert sich ein komplex klingendes Problem in seiner Erkenntnis zu einer Trivialität, so ist der eigene Gewinn deutlich kleiner, als wenn sich, im besten Fall, ein Tor öffnet zu neuen Sichtweisen, zu einer neuen Welt.

Letztlich ist mathematische Begabungsförderung nichts anderes, als dem Lernenden die Möglichkeit zu geben, wirklich Mathematik zu treiben.

Literatur

Metzger, W. (1962). *Schöpferische Freiheit*. Frankfurt: Kramer.

Rosebrock, S. (2010). Die Morse-Thue Folge, Monoid 101, Johannes-Gutenberg Universität Mainz, S. 3 – 7.

Rosebrock, S. (2011). Begabungs- und Kreativitätsförderung aus Sicht der Mathematikdidaktik, in Rosebrock/Schenz/Soff (Hg.), *Von der Begabungsförderung zur Begabungsgestaltung – Vom kreativen Umgang mit Begabungen in Mathematik*, LIT-Verlag, Berlin, S. 85 – 96.

Soff, M. (2011). Gestaltpsychologische Prinzipien zu Begabung und Kreativität, in Rosebrock/Schenz/Soff (Hg.), *Von der Begabungsförderung zur Begabungsgestaltung – Vom kreativen Umgang mit Begabungen in Mathematik*, LIT-Verlag, Berlin, S. 63 – 84.