Benjamin ROTT, Larissa KORTE, Stephanie WESSENDORF

Analyse von Problembearbeitungsprozessen am Beispiel der TIMSS-Aufgabe „K10“

Sowohl *Begründen und Beweisen* als auch *Problemlösen* sind wichtige Bestandteile von Mathematik-Curricula überall auf der Welt. Obwohl es bei beiden Kompetenzen um math. Argumentationen geht, werden sie in der Regel getrennt behandelt und beforscht (Mamona-Downs & Downs 2013). Problemlösen wird eher mit dem Prozess in Verbindung gebracht, wohingegen Begründen oft auf das fertige Produkt reduziert wird (vgl. ebd.).

Das „K10-Projekt“ der Hannoveraner Arbeitsgruppe bildet die Schnittstelle dreier Projekte zu beiden Themen Begründen und Beweisen und Problemlösen: Es stellt (1) eine Begleit- und Nachfolgestudie zu Rott (2013) dar, in welcher die äußere Struktur von Problembearbeitungsprozessen mithilfe von Episoden untersucht wird. Weiterhin ist das Projekt (2) ein Bestandteil der Evaluation des 1,5-jährigen Heurismentrainings von Brockmann-Behnsen (2012). Darüber hinaus bildet das Projekt (3) einen wichtigen Teil der Problemlöse-Studie von Gawlick (in dieser Sektion).

Bei „K10“ handelt es sich um eine TIMSS-Aufgabe (s. Tab. 1), deren Bearbeitung von Studierenden und Neuntklässlern videographiert und ausgewertet wurde. In diesem Beitrag werden ausgewählte Ergebnisse des oben genannten Projekts (1) und erste Auswertungen des Projekts (2) präsentiert.

Hypothesen und Forschungsfragen

Die „K10“-Bearbeitungen dienen dazu, folgende, von Rott (2013) mit Fünftklässlern aufgestellte, Hypothesen zu überprüfen. Zudem soll das Training von Brockmann-Behnsen (2012) teilweise evaluiert werden.

(i) Prozesse mit mangelnder Regulation („wild goose chase“-Prozesse) hängen signifikant mit geringem Bearbeitungserfolg zusammen.

(ii) Prozesse ohne *Analyse* hängen signifikant mit geringem Erfolg zusammen.

(iii) Eine Rückschau im Sinne Pólyas (*Verification*) tritt nur sehr selten auf und wenn, dann hauptsächlich bei erfolgreichen Probanden.

(iv) Neben *linear* verlaufenden Prozessen gibt es auch Problembearbeitungen mit Rücksprüngen (d.h. *nicht-lineare* Prozesse).

(v) Die Bearbeitungen der neunten Klassen mit und ohne Heurismentraining lassen sich voneinander unterscheiden.

Beschreibung der Erhebungssituationen und der Methoden

Die hier vorgestellten Daten stammen aus zwei unabhängigen Stichproben: Im Jahr 2010 haben 25 Studierende des gymnasialen Lehramts Mathematik

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1015–1018). Münster: WTM-Verlag

(13w und 12m; Alter zw. 22 – 25 Jahren) aus verschiedenen Lehrveranstaltungen im Rahmen der Masterarbeit von Wessendorf (Deermann 2010) Probleme bearbeitet, darunter auch „K10“. Insgesamt wurden Prozesse von 11 Paaren und einer Dreiergruppe ausgewertet. Im Jahr 2013 haben 46 SchülerInnen (Alter zw. 14 – 16 Jahren) eines Hannoveraner Gymnasiums aus vier neunten Klassen (9a und 9b ohne spezielles Training, 9c und 9d hatten zuvor ein 1,5-jähriges Heurismentraining im Unterricht, vgl. Brockmann-Behnsen 2012) „K10“ alleine bearbeitet. Ein Beobachter hat sie dabei mit regelmäßigen Prompts (z.B.: „Was denkst Du gerade?“) zum *lauten Denken* angeregt; diese Prozesse wurden von Korte (2013) ausgewertet.

Die Aufgabe „K10“ eignet sich für Forschungen zum Problemlösen einerseits wegen ihrer hohen empirischen Schwierigkeit.[1] Andererseits zeigt eine am Prozess orientierte Aufgabenanalyse (s. Tab. 1), dass es sich für durchschnittliche Lernende nicht um eine Routineaufgabe handelt.

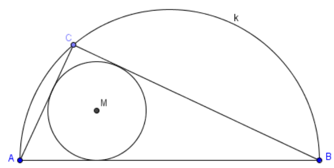
„**K10**“: *AB* ist der Durchmesser eines Halbkreises *k*. *C* ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von *A* und *B*), und *M* ist der Mittelpunkt des Inkreises von Δ*ABC*. Bestimme den Betrag des Winkels ∠*AMB*.	
In einer *Analyse* der Aufgabe sollte der rechte Winkel bei *C* (wegen des Thales-Halbkreises) ebenso erkannt werden wie die Tatsache, dass *M* als Inkreis-Mittelpunkt auf den Winkelhalbierenden des Dreiecks liegt. In einer *Exploration* der Aufgabenumgebung kann man feststellen, dass man über die Winkel bei *A* und *B* einzeln nichts aussagen kann – allerdings müssen sie wegen der Thales-Situation zusammen immer 90° ergeben. Mit dieser Erkenntnis kann man in eine *Planung-Ausführung* einsteigen und den gesuchten Winkel berechnen: Die Beträge der Winkel ∠*BAM* und ∠*MBA* ergeben zusammen die Hälfte der Winkelbeträge bei *A* und *B*, nämlich 45° („*alpha-beta-Barriere*“). Aufgrund der Innenwinkelsumme in Dreiecken beträgt die gesuchte Größe des Winkels ∠*AMB* damit – unabhängig von der Lage von *C* auf *k* – immer 135°.	

Tabelle 1: „K10“ (Baumert et al. 1999, S. 94) und am Prozess orientierte Analyse

(1) *Kein Ansatz* – keine sinnvolle Bearbeitung oder nur Nicht-Erfolgversprechendes wie der Sinussatz. *Oder:* Winkelgröße nur geraten / geschätzt. *Oder:* Von den drei wichtigen Sätzen (Thales, Winkelhalbierende, Innenwinkelsumme) nur einen genannt.
(2) *Einfacher Ansatz* – Winkelgröße 135° ausschließlich gemessen. *Oder:* Von den drei wichtigen Sätzen mindestens zwei genannt, aber nicht sinnvoll verknüpft.
(3) *Erweiterter Ansatz* – Lösung der Aufgabe im Spezialfall (z.B. gleichschenkliges Dreieck). *Oder:* Alle drei wichtigen Sätze genannt und verknüpft, aber ohne Lösung.
(4) *Korrekter Ansatz* – Winkelgröße 135° durch Verknüpfung der Sätze ermittelt.

Tabelle 2: Erfolgskategorien (vgl. Rott 2013, S. 184 ff.), operationalisiert für „K10“

[1] In TIMSS besaß „K10“ eine Lösungsquote von 21% – was bei vier vorgegebenen Antwortmöglichkeiten unter der Ratewahrscheinlichkeit liegt (vgl. Baumert et al. 1999).

Die Bearbeitungsergebnisse (Tab. 3) – die *Produkte* – wurden in vier Erfolgskategorien eingeteilt, die für die Aufgabe konkretisiert wurden (s. Tab. 2); Interrater-Reliabilität der Kodierer war größer als Cohens Kappa = 0,90.

Die *Prozesse* wurden mithilfe des „Protocol Analysis"-Verfahrens von Schoenfeld (1985) in Episoden eingeteilt, das zuvor adaptiert und operationalisiert worden ist (siehe Rott 2013, Kap. 10 für Details). Die Interrater-Reliabilität (%-Ü) der Prozesskodierung lag zwischen 0,70 und 1,00.

Ergebnisse

Ein χ^2-Test (vgl. Tab. 4) bestätigt Hypothese (i), es gibt einen signifikanten Zusammenhang zwischen „wild goose chase"-Prozessen und wenig Erfolg.

Gruppe	Kat. 1	Kat. 2	Kat. 3	Kat. 4	Summe
Studenten	0	10	2	13	**25**
9a	2	4	1	2	**9**
9b	3	3	2	0	**8**
9c	5	7	1	0	**13**
9d	4	1	5	6	**16**
9 gesamt	**14**	**15**	**9**	**8**	**46**

Tabelle 3: Erfolg der Probanden in Kategorien sortiert nach Gruppen

„K10" – Studierende				**„K10" – Klasse 9 gesamt**			
	Kaum Erf.	*Erfolg*	Summe		*Kaum Erf.*	*Erfolg*	Summe
wild goose	8 (4)	2 (6)	**10**	*wild goose*	17 (13,2)	4 (7,8)	**21**
Sonstiges	2 (6)	13 (9)	**15**	*Sonstiges*	12 (15,8)	13 (9,2)	**25**
Summe	**10**	**15**	**25**	Summe	**29**	**17**	**46**
Yates-χ^2 = 11,111; Φ = 0,66; Yates-p = 0,0035				Yates-χ^2 = 3,999; Φ = 0,29; Yates-p = 0,0455			
40 % *Wild goose chase*, davon knapp 4/5 ohne Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe.				45 % *Wild goose chase*, davon etwa 4/5 ohne Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe.			

Tabelle 4: „Wild Goose Chase"-Prozesse und Erfolg (erwartete Werte in Klammern)

Hypothese (ii) kann nicht bestätigt werden, da in allen 25 + 46 Prozessen mind. eine Episode des Typs *Analysis* kodiert wurde. Auch eine Unterscheidung von Prozessen mit kurzer / langer *Analysis* zeigt keinen Zusammenhang zwischen diesen Bemühungen und dem Bearbeitungserfolg auf.

Bei den Studierenden enthalten 11 Prozesse eine *Verification*; diese enden ausnahmslos erfolgreich (Kat. 4). Bei den SchülerInnen gibt es 6 Prozesse mit einer Episode dieses Typs; 2 davon sind erfolgreich (Kat. 4), die übrigen 4 nicht (Kat. 2). Hypothese (iii) kann nur teilweise bestätigt werden.

Hypothese (iv) wird bestätigt: Bei den Studierenden verlief etwa die Hälfte der Prozesse (12) *linear* (wie in populären Deutungen des Pólya-Schemas), die übrigen (13) Prozesse *nicht-linear* (8 davon wie in Schoenfelds 1985 Modell mit Rückschritten vor der *Implementation*). Bei den SchülerInnen verläuft ebenfalls etwa die Hälfte der Prozesse (24) *linear*, die übrigen (22)

Prozesse *nicht-linear* (davon 16 wie bei Schoenfeld; die restlichen 6 mit Rückschritten auch nach der *Implementation* oder *Verification*).

Untersuchungen zu Hypothese (v) zeigen auf den ersten Blick wenig offensichtliche Ergebnisse: Klasse 9d mit Training ist signifikant erfolgreicher als die anderen Klassen; für 9c gilt dies nicht, hier bedarf es weiterer (qualitativer) Analysen. Auch gibt es in den beiden Klassen mit Training z.B. nicht weniger „wild goose chase"-Prozesse oder mehr Episodenwechsel (als Anzeichen für Selbstregulation). Ein Blick auf die Prozessverläufe deutet allerdings darauf hin, dass zumindest in der Klasse 9d die Prozesse strukturierter verliefen (mehr *Planning-Implementation*, weniger *Exploration*) als in den anderen Klassen.

Diskussion

In der Studie von Rott (2013) wurden Hypothesen zum Verlauf von Problemlöseprozessen und dem Zusammenhang bestimmter Oberflächenmerkmale von Prozessen mit ihrem Erfolg gewonnen – allerdings beschränkt auf eine kleine Auswahl von Aufgaben, auf eine Stichprobe von Fünftklässlern und auf die Arbeit in Paaren. Die vorliegenden Daten bestätigen einen Teil dieser Hypothesen für die TIMSS-Aufgabe „K10" mit älteren Probanden sowie der Sozialform „Einzelarbeit mit lautem Denken".

Dass andere Hypothesen (z.B. ein Zusammenhang des Erfolgs mit der *Aufgabenanalyse* oder die Häufigkeit des *Rückschau*-Haltens) nicht bestätigt werden konnten, liegt vermutlich an Spezifika der eingesetzten Aufgabe („K10" lädt geradezu dazu ein, die Aufgabe zunächst zu analysieren) und dem Alter der Probanden (Studierende verifizieren häufiger als Schüler).

Literatur

Baumert, J.; Bos, W.; Klieme, E.; Lehmann, R.; Lehrke, M.; Hosenfeld, I.; Neubrand, J. & Watermann, R. (Hrsg.) (1999): *Testaufgaben zu TIMMS/III. Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlussklassen der Sekundarstufe II (Population 3)*. Berlin: MPI.

Brockmann-Behnsen, D. (2012): HeuRekAP – Erste Ergebnisse der Langzeitstudie zum Problemlösen und Beweisen am Gymnasium. In: Ludwig, M. & Kleine, M. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Münster: WTM.

Deermann, S. (2010): *Explorative Analyse studentischer Bearbeitungsprozesse ausgewählter geometrischer Probleme*. Unveröffentlichte Master-Arbeit, Uni Hannover.

Korte, L. (2013): *Bearbeitungsprozesse der TIMSS-Aufgabe "K10" – untersucht mit dem Verfahren von Schoenfeld*. Unveröffentlichte Bachelor-Arbeit, Uni Hannover.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2013). Problem Solving and its elements in forming Proof. In *The Mathematics Enthusiast, vol. 10, 1&2*, 137-162

Rott, B. (2013): *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer emp. Studie*. WTM.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.