

Silvia SCHÖNEBURG, Leipzig, Karin RICHTER, Halle

Von Scheiben und Körpern – Entwicklung und Vertiefung von Vorstellungen zu geometrischen Körpern mittels geeigneter Schnitte

Räumliches Vorstellungsvermögen, d.h. die Fähigkeit, räumliche Zusammenhänge visuell zu erfassen und mit ihnen gedanklich agieren zu können, ist im Mathematikunterricht, insbesondere im Geometrieunterricht, und natürlich auch im Alltag wichtig und muss erlernt, trainiert und gefestigt werden. Geometrische Körper zu verstehen und mit ihnen angemessen operieren zu können setzt voraus, wesentliche ihrer Eigenschaften zu kennen oder erschließen zu können sowie mit ihnen entsprechend umzugehen. Die Idee, handgreifliche mathematische Modelle zu nutzen, um mit ihrer Hilfe insbesondere geometrisches Verständnis zu initiieren und zu unterstützen, zählt zu den bahnbrechenden mathematikdidaktischen Überlegungen von Felix Klein (1849 – 1925). In seiner programmatischen Antrittsrede an der Erlanger Universität von 1872 hob er den Stellenwert von Modellen als Anschauungsmittel hervor: *„Die Anschauung hat ... nur den Werth der Veranschaulichung, der allerdings in pädagogischer Beziehung sehr hoch anzuschlagen ist. Ein geometrisches Modell z.B. ist auf diesem Standpunkte sehr lehrreich und interessant. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht ... nur eine veranschaulichende Form abstracterer Untersuchungen sein will. In ihr gilt es die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen und die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell – mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein – ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke sondern die Sache selbst.“* (F. Klein, Erlanger Programm, 1872, Anmerkung 3) Insbesondere seinen Bestrebungen ist es zu verdanken, dass mathematische Modelle im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts zielgerichteten Einsatz im Mathematik- und insbesondere Geometrieunterricht aller Schul- und Ausbildungsformen fanden. Gemeinsam mit Alexander von Brill (1842-1935) entstanden unter Kleins Leitung im mathematischen Seminar der Königlich Technischen Universität in München eine Vielzahl von Modellen, die der Anschauung resp. der Veranschaulichung mathematischer und insbesondere geometrischer Zusammenhänge dienten.

Neben Kartonscheibenmodellen von Flächen zweiter Ordnung hielten in den sich im ausgehenden 19. Jahrhundert herausbildenden Modellsammlungen zu Unterrichtszwecken der Universitäten und Schulen auch weitere Kartonmodelle sowie Gipsmodelle, Fadenmodelle und bewegliche Draht-

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1095–1098). Münster: WTM-Verlag

modelle Einzug. Wichtiges Anliegen bei der Entwicklung dieser Modelle war es, unterschiedliche mathematische Eigenschaften über geeignete Darstellungsweisen, gestützt durch das jeweils gewählte Material, besonders ins Blickfeld des Betrachters zu rücken.

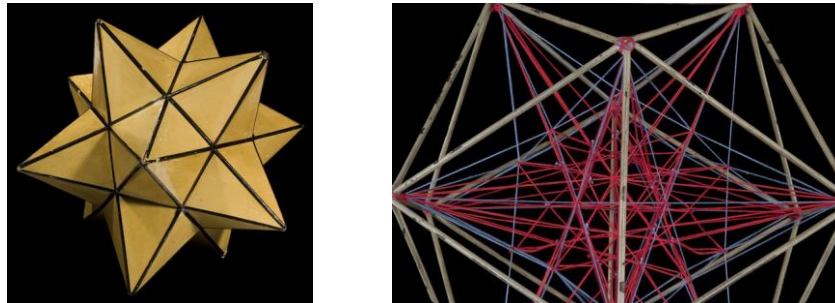


Abb. 1: Vollmodell des kleinen Sterndodekaeders und Kantenmodell eines Ikosaeders mit einbeschriebenem Sterndodekaeder, Foto: N. Kaltwaßer (Halle)

So visualisiert etwa ein Vollmodell den Körper an sich sowie Eigenschaften seiner Oberfläche. Im Beispiel des kleinen Sterndodekaeders (Abb. 1) verdeutlicht das Modell insbesondere die Zusammensetzung des Körpers aus 12 fünfeckigen Pyramiden, die auf den Seitenflächen eines regulären Dodekaeders stehen. Das Kantenmodell eines Ikosaeders mit eingezogenen Diagonal-Fäden lässt den umhüllten Sterndodekaeder mit seinen Sternspitzen in den Ikosaederecken erkennen.

Einen ganz anderen Blickwinkel auf Körper ermöglichen die Schnittflächenmodelle, die erstmals im Jahre 1874 für Flächen zweiter Ordnung veröffentlicht wurden. Die Visualisierung des jeweiligen Körpers erfolgt hier mittels zweier Scharen von Scheiben, die als Schnitte von Ebenen mit dem zu veranschaulichenden Körper entstehen. Jede der beiden Scharen besteht aus untereinander parallelen Scheiben; die beiden Scharen sind zueinander um einen Winkel $\leq 90^\circ$ geneigt.



Abb. 2: Dreiachsiges Ellipsoid aus 22 Kreisen; Foto: N. Kaltwaßer (Halle)

Neben der Veranschaulichung der Körper über ihre Ebenenschnitte begründet sich ihre Besonderheit insbesondere auch darin, dass sich die zusammengesteckten Scheiben durch leichten Druck in einen anderen Neigungswinkel gegeneinander überführen lassen. „...so erhält man kein starres, sondern ein bewegliches Gerüst, ... reicht die Beweglichkeit ... soweit, daß man das Modell in eine Ebene zusammenklappen kann.“ (D. Hilbert, St. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, S. 16 /17)

Der Wunsch, einen geometrischen Körper in seinen charakteristischen Eigenschaften umfassend zu erschließen, führt rasch und zentral bedeutsam zur Frage nach seinen Ebenenschnitten. Dies wird im heutigen Mathematikunterricht oft kaum mehr als nur marginal berücksichtigt. Schnittflächenmodelle, angewandt auf die typischen Körpergrundformen des Geometrieunterrichts der Schule wie beispielsweise Würfel, Pyramide, Zylinder und Kugel, ermöglichen einen im eigentlichen Sinne plastischen und zugleich motivierenden Zugang zu dieser Problematik. Die Zuwendung zu den einzelnen Körpern kann dabei auf ganz unterschiedliche Weise erfolgen. Exemplarisch seien im Folgenden zwei Vorgehensweisen bei der Auseinandersetzung mit den Schnittflächen und dem Erstellen eines Modells bei Kugel und quadratischer Pyramide vorgestellt.

Experimentelles Erkunden einer Kugel

Ausgehend von der Kreis-Schnitteigenschaft der Kugel, die durch das gerade Zerschneiden einer Styropor- oder Knete-Kugel entdeckt werden kann, liegt es nahe, die gewonnene Schnittflächen-Einsicht nun in umgekehrter Richtung durch das Zusammenfügen von Kreisen geeigneter Größe zu prüfen. Bereits mit Hilfe von zwei großen und vier kleineren Kreisscheiben (als Vorlagen dafür können etwa die Kreise aus Abb. 3 genutzt werden) entsteht nach dem richtigen Zusammenstecken ein „roll-fähiges“ Gebilde, das durchaus an eine Kugel erinnert. Zur Verfeinerung der Kugel-Nachbildung sind weitere, nun enger bei einander liegende Kreisschnitte heranzuziehen, so dass das Modell Schritt für Schritt „runder“ wird. (Vgl. Abb. 2.)

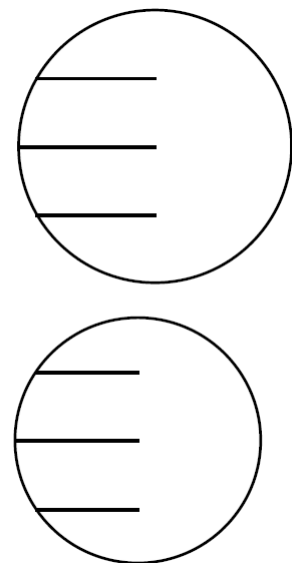


Abb. 3: Vorlagen zu einer Steck-Kugel.

Steht beim Kugel-Schnitt-Modell die Eigenschaft im Zentrum der Beobachtung, dass alle Körperschnitte Kreisscheiben sind, bieten andere Körper, wie etwa die quadratische Pyramide, vertiefende Entdeckungsmöglichkeiten hinsichtlich der auftretenden Schnittflächen.

Schnittflächen-Erkundung zur geraden quadratischen Pyramide

Auch hier können eigene Erfahrungen zu Körperschnitten an einer geraden quadratischen Pyramide zunächst mit Hilfe von Modellen aus Blumensteckmasse gewonnen werden. Körperachsen parallel wie auch nichtparallele Schnitte bieten hier ein breites Erkundungsfeld. Nach einer ausführlichen Phase eigenen Experimentierens kann Schritt für Schritt an die eigene Erstellung eines Schnittflächenmodells vermittels achsenparalleler Schnitte

herangeführt werden. Den Start bildet hierfür ein Schnitt durch eine Grundflächen-Diagonale und die Spitze der quadratischen Pyramide. Parallelschnitte zu dem so entstandenen gleichschenkligen „Start-Dreieck“ führen auf hierzu ähnliche Dreiecke. Diese Einsicht ermöglicht es Lernenden, anhand der nachfolgenden Abb. 4 das eigentliche Modell selbst zu entwickeln.

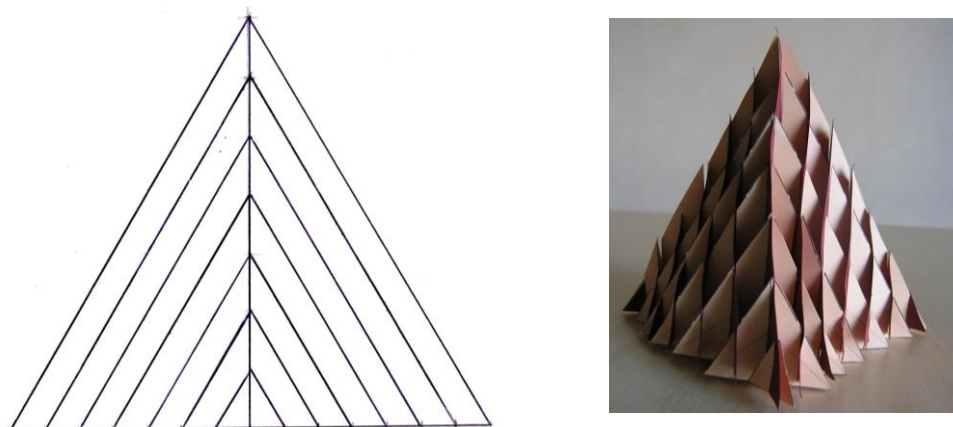


Abb. 4: Steck-Pyramide (Bastelvorlage und Modell); Graphik und Foto: S. Schöneburg

Bei der eigenen Erstellung einer Bastelanleitung zur Steck-Pyramide oder auch für die Steck-Kugel wird den Lernenden deutlich, wie anspruchsvoll und herausfordernd es ist, eine solche Anleitung inhaltlich korrekt und für andere nachvollziehbar zu verfassen. Neben dem mathematischen Aspekt steht hier die Kompetenz des Kommunizierens im Vordergrund.

Jedes dieser Modelle, sei es das Schnittflächenmodell der Kugel, der quadratischen Pyramide oder auch eines anderen geometrischen Körpers, lädt zu mathematischen Entdeckungen ein. Die Schwierigkeit der Umsetzung selbst ist variierbar: Je größer die Anzahl der verwendeten Schnittflächen, umso mehr Fingerfertigkeit ist gefragt. Je besser das Verständnis und damit einhergehend die Modellierung des vermittels seiner Schnitte darzustellenden Körpers ist, desto besser wird das entstehende Modell sein.

Literatur

- Hilbert, D.; Cohn-Vossen, St. (1996). *Anschauliche Geometrie*. Berlin u.a.: Springer.
- Klein, F. (1974). *Das Erlanger Programm*. Eingeleitet von H. Wußing. Leipzig: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, 253.
- Richter, K.; Schöneburg, S. (2011). Von Scheiben und Körpern. Entwicklung und Vertiefung von Vorstellungen zu geometrischen Körpern vermittels geeigneter Schnitte. In Richter, K.; Schöneburg, S. et al. (Hrsg.), *Mathematik für alle: Wege zum Öffnen von Mathematik – Mathematikdidaktische Ansätze* (S. 293–308). Hildesheim: Franzbecker.