Björn SCHWARZ, Philip HERRMANN, Gabriele KAISER, Birgit RICHTER, Jens STRUCKMEIER, Hamburg

Lineare Algebra in der Lehramtsausbildung – Wenig Bezug zum Mathematikunterricht?

1. Der Projektrahmen

Die vorgestellten Analysen entstanden im Rahmen der Arbeit des Projektes „Mathematiklehramtsausbildung nachhaltig verbessern", einem Teilprojekt des Universitätskollegs der Universität Hamburg (http://www.universitaetskolleg.de/, letzter Zugriff 19. März 2014). Das Projekt ist ausgerichtet auf eine nachhaltige Verbesserung der Studieneingangsphase von angehenden Mathematiklehrkräften für die gymnasiale Oberstufe mit dem Ziel einer Anhebung des Kompetenzniveaus der Studierenden und der gleichzeitigen Absenkung der Abbruchquoten. Entwickelt wurden dafür verschiedene E-Learning-Angebote sowie Beratungs- und Vortragsangebote für die Studierenden. Zur möglichst passgenauen Entwicklung der Projektangebote wurden weiterhin mit Hilfe einer projektbegleitenden Erhebung Stärken und Defizite der Studierenden ermittelt.

2. Ausgangslage

Als ein erstes zentrales Projektergebnis zeigte sich die Notwendigkeit, für eine erfolgreiche Unterstützung der Studierenden in ihrer Studieneingangsphase im Sinne des Kompetenzaufbaus neben wissensbezogenen Unterstützungsmaßnahmen auch verstärkt affektiv-motivationale Aspekte zu berücksichtigen (vgl. Schwarz et al., 2013). Dies umfasst beispielsweise eine Unterstützung in der Reflektion über das Studium, unter anderem bei Fragen zum Umgang mit dem Bruch zwischen Schul- und Universitätsmathematik. In Bezug auf diesen Bruch zeigte sich im Rahmen der Beratungsangebote sowie durch die begleitende Veranstaltungsevaluation genauer, dass die Studierenden insbesondere in der Vorlesung „Lineare Algebra" eine Diskrepanz zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik wahrnehmen, was zu einer Senkung der Studienmotivation beiträgt.

Die nachfolgende Analyse entstand in diesem Kontext aus der Zielsetzung heraus, vorlesungsbegleitende Materialien zu erstellen, in denen die Schulrelevanz der verschiedenen Inhalte der Eingangsvorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie I + II" herausgestellt wird. Bezugsrahmen ist dabei durchgehend die gymnasiale Oberstufe, womit eine Relevanz von Inhalten der Linearen Algebra für die Mathematik der Primar- und Sekundarstufe nicht geleugnet werden soll. Jedoch wurde davon ausgegangen, dass das Auftreten der Inhalte der Hochschulvorlesung sich im curricularen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1127–1130). Münster: WTM-Verlag

Rahmen der Oberstufe direkter nachweisen lässt, wohingegen die entsprechenden Hochschulinhalte eher als Grundlagenwissen relevant für Primar- und Mittelstufeninhalte sind. Für die Analyse wurde als Grundlage der verbindliche curriculare Rahmen des gymnasialen Mathematikunterrichts, repräsentiert durch die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife („Abiturstandards“, KMK, 2012), herangezogen. Um daneben auch gleichsam reale Manifestationen von Mathematikunterricht zu berücksichtigen, wurden darüber hinaus verschiedene gegenwärtig in Deutschland verwendete Schulbücher für den Mathematikunterricht der Oberstufe (Griesel et al., 2007, Baum et al., 2000, Weller, 2011) ausgewertet. Alle Materialien wurden inhaltsanalytisch (vgl. Mayring, 2010) auf das Auftreten von Standardinhalten der Eingangsvorlesung Lineare Algebra untersucht. Unterschieden wurde dabei zwischen dem direkten Auftreten von Hochschulinhalten in den schulbezogenen Dokumenten und einem indirekten Auftreten in dem Sinne, dass Hochschulinhalte aus Lehrerperspektive notwendig für ein tiefergehendes Verständnis der Schulinhalte sind. Als Bezugsrahmen für die Identifikation typischer Inhalte der Hochschulvorlesung wurde weiterhin auf ein weit verbreitetes Lehrbuch (Fischer, 2010) zurückgegriffen. Im Folgenden werden drei verschiedene Inhaltsbereiche der Hochschulmathematik und ihre Relevanz für den Mathematikunterricht der Oberstufe exemplarisch diskutiert.

3. Relevanz von Inhaltsgebieten der Linearen Algebra für die Schule

a) Das Vektorkonzept: In den Abiturstandards wird bezüglich des Vektorkonzepts im Bereich der „Leitidee: Raum und Form“ ausgeführt: „Die Schülerinnen und Schüler können […] elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen.“ (KMK, 2012, S. 24). Ein typisches Vorgehen in Schulbüchern ist dabei die Einführung des Vektors als Zahlen-n-Tupel und die damit verbundene Betrachtung entsprechender Rechenregeln beispielsweise zur Vektoraddition und skalaren Multiplikation. Daneben werden die Vektoren mit Pfeilen im zwei- oder dreidimensionalen Raum identifiziert (vgl. beispielsweise Griesel et al., 2007). Es ist unmittelbar deutlich, dass das schulische Vektorkonzept unter dieser Sichtweise einen Spezialfall des universitären Vektorbegriffs, das heißt dem Verständnis eines Vektors als Element eines axiomatisch definierten Vektorraums (vgl. Fischer, 2010), darstellt. Teilweise verschieben sich dabei sogar auch die Unterscheidungen zwischen Satz und Definition, etwa, wenn die kommutative Addition in der Hochschulmathematik Teil der axiomatischen Grundlage eines Vektorraums ist (vgl. ebd.), jedoch zu einem beweisbaren Satz wird, wenn man einen Vektor als *n*-Tupel mit reellen Einträgen betrachtet und damit die Eigenschaften der Addition reeller Zahlen komponentenweise auf den Vektor übertragen kann (vgl. Griesel et al., 2004).

Hinsichtlich der Bedeutung der Hochschulvorlesung für die Lehrerausbildung kann dann für das Vektorkonzept festgehalten werden, dass die Vorlesung Lineare Algebra den allgemeinen Rahmen darstellen kann, vor dessen Hintergrund die verschiedenen schulischen Vektorkonzepte (algebraisch und geometrisch, s. o.) verglichen und vernetzt werden können. Darüber hinaus wird es den Studierenden durch die Vermittlung eines axiomatisch basierten Vektorbegriffs ermöglicht, für sie selber vertraute Vektorbegriffe als Spezialfälle zu erkennen (vgl. Malle, 2005).

b) Basis, Dimension und Basiswechsel: Ein etwas indirekteres Auftreten von Inhalten der Vorlesung in der Schulmathematik lässt sich am Themenstrang rund um die Begriffe Basis, Dimension und Basiswechsel verdeutlichen. In den untersuchten Schulbüchern treten Vektorräume oberflächlich nur mit fest gewählter Basis auf: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und seltener auch $\mathbb{R}^n$. Die Frage nach der Existenz oder den Möglichkeiten der Wahl einer Basis stellt sich damit zunächst nicht und auch die Dimension der Vektorräume ist in diesen Fällen extrinsisch aufgeprägt. Folglich kommt auch eine Diskussion der Systematik von Basiswechseln nicht unmittelbar in Frage. Diese Vorlesungsinhalte erfahren allerdings dennoch eine schulmathematische Repräsentation, da sie im Zusammenhang mit der Einführung und Unterscheidung von Geraden und Ebenen relevant werden und in den Schulbüchern auftreten. So wird beispielsweise in Schulbüchern explizit thematisiert, dass verschiedene Vektorpaare $(v_1,v_2),(w_1,w_2)$ die gleiche Ebene oder sogar Gerade aufspannen können. Daran anschließend stellt sich die Frage, wie ein und derselbe Punkt bezüglich verschiedener Vektorpaare parametrisiert darstellbar ist (vgl. Griesel et al., 2004, S. 276). Aus der fachmathematischen Vorlesung kann an dieser Stelle für den Schulunterricht zum einen eine Sensibilisierung für diese Art von Problemen gewonnen werden und die Einsicht, dass der stattfindende Parameterwechsel kontrollierbar ist. Zum anderen kann hier die zentrale Erkenntnis erworben werden, dass eine geeignete Koordinatenwahl für das Verständnis geometrischer Zusammenhänge häufig essentiell ist. Dieser Sachverhalt ist beispielsweise im schulischen Kontext als Hintergrundwissen für den Gauß-Algorithmus bedeutsam.

c) Skalarprodukt, Vektorprodukt und Determinante: Der Themenkomplex um den Zusammenhang von Skalarprodukt, Vektorprodukt und Determinante soll in diesem Zusammenhang dazu genutzt werden, ein deutlich indirektes Auftreten von Vorlesungsinhalten in der Schulmathematik zu demonstrieren. Sind Skalarprodukt und Vektorprodukt noch durchgängig mit einer gewissen Häufigkeit in den untersuchten Schulbüchern nachweisbar, so tritt die Determinante in aktuellen Schulbüchern in der Regel höchstens beiläufig auf. Dennoch ist stellenweise die Verflechtung von Skalarprodukt, Vektorprodukt und Determinante im schulischen Kontext sichtbar. Als typisches Beispiel dient hier eine Schulbuchaufgabe (vgl. Griesel et al., 2007, S.133), in der das Volumen eines durch drei Vektoren a,b,c aufgespannten Spats durch den Betrag des Skalarprodukts von a mit dem Vektorprodukt von b und c zu berechnen ist. Aus einer Vorlesung zur Linearen Algebra kann hier die fundierte Einsicht gewonnen werden, dass dieses Produkt, sogar ohne Absolutbeträge, gerade mit der Determinante übereinstimmt. An diesem Beispiel lässt sich zeigen, was ein für stärker indirektes Auftreten von Vorlesungsinhalten in der Schulmathematik typisches Phänomen ist: Das gemeinsame Auftreten von Konzepten erscheint aus dem Blickwinkel der Schulbücher sporadisch oder gar zufällig, und ist im Hintergrund doch durch ein solide verknüpfendes Netz bedingt, welches vom schulischen Standpunkt aus oft nicht klar sichtbar werden kann.

Literatur

Fischer, G. (2010). *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Griesel, H., Postel, H., Suhr, F. (2004). *Elemente der Mathematik: Grundkurs.* Braunschweig: Schroedel Verlag.

Griesel, H., Postel, H., Suhr, F. (2007). *Elemente der Mathematik: Leistungskurs Lineare Algebra, Analytische Geometrie mit Orientierungswissen Stochastik.* Braunschweig: Schroedel Verlag.

Baum, M., Lind, D., Schermuly, H., Weidig, I., Zimmermann, P. (2000). *Lambacher-Schweizer, Lineare Algebra mit analytischer Geometrie. Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium*. Stuttgart: Klett.

Malle, G. (2005). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *mathematik lehren*, 133, 8-14.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse – Grundlagen und Techniken*. Weinheim: Beltz Verlag.

Schwarz, B., Herrmann, P., Kaiser, G., Richter, B, Struckmeier, J. (2013). Ein Projekt zur Unterstützung angehender Mathematiklehrkräfte in der ersten Phase ihres Studiums - Erste Erfahrungen aus der Begleitung einführender fachmathematischer Lehrveranstaltungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013 (Band 2)* (S. 938-941). Münster: WTM-Verlag.

Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland [KMK] (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der* Kultusministerkonferenz *vom 18.10.2012).* Verfügbar unter:http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf [letzter Zugriff: 19. März 2014]

Weller, H. (2011). *Mathematik Neue Wege SII - Lineare Algebra / Analytische Geometrie, allg. Ausgabe*. Braunschweig: Schroedel Verlag.