Johann SJUTS, Leer/Osnabrück

Vorstellungen und Darstellungen: Evidenzbasierte Diagnostik und Gestaltung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse

Erkenntnisse über Lernleistungen und damit auch über mathematisches Denken lassen sich sowohl aus Kollektiv- als auch aus Individualforschung gewinnen. Mehr als bisher gilt es indes, Verknüpfungen der Forschungsergebnisse herzustellen. Insbesondere sollte die Analyse von internen und externen Wissensrepräsentationen (Vorstellungen und Darstellungen) intensiviert werden, um praktikable und aussichtsreiche Hinweise für die Gestaltung wirksamer Unterrichtsarrangements in förderdiagnostischer Hinsicht zu erhalten. Dazu sei in den folgenden Ausführungen das Augenmerk auf das **Begründen** als allgemeine mathematische Kompetenz und auf das **Zerlegen einer Zahl in Summanden** als spezielle mathematische Denkhandlung gerichtet.

Aus der COACTIV-Studie bekannt ist die **31-Cent-Aufgabe**:

> Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Cent hinlegen, wenn du nur 10-Cent-, 5-Cent- und 2-Cent-Münzen zur Verfügung hast? Gib alle Möglichkeiten an und erläutere dein Vorgehen.

Sie gehörte in etwas anderer Form zum Aufgabenpool von PISA 2000 (Pfennig statt Cent, ohne den Zusatz „und erläutere dein Vorgehen“, dafür mit Hervorhebung des Wortes „alle“ in Fettdruck). Lediglich 2,9 % der 15-jährigen deutschen Schülerinnen und Schüler bei PISA 2000 haben diese Aufgabe gelöst. Damit zählte sie bei PISA 2000 zu den schwierigsten Aufgaben und deshalb zur höchsten Kompetenzstufe (Neubrand 2004, S. 261).

Wie wichtig das **Darstellen** ist, zeigt die Betrachtung eines möglichen Lösungsgangs. Die 5-Cent-Münzen können nur in ungerader Anzahl vorkommen, also einmal, dreimal oder fünfmal. Damit ergeben sich genau sechs Möglichkeiten:

$1\cdot 5 + 0\cdot 10 + 13\cdot 2 = 31 \quad 3\cdot 5 + 0\cdot 10 + 8\cdot 2 = 31 \quad 5\cdot 5 + 0\cdot 10 + 3\cdot 2 = 31$

$1\cdot 5 + 1\cdot 10 + 8\cdot 2 = 31 \quad 3\cdot 5 + 1\cdot 10 + 3\cdot 2 = 31 \quad 1\cdot 5 + 2\cdot 10 + 3\cdot 2 = 31$

Die 31-Cent-Aufgabe verlangt komplexes Argumentieren, denn es gilt, alle Möglichkeiten systematisch zu erfassen. Dabei sind die curriculare Wissensstufe (Arithmetik) und der rechnerische Anspruch niedrig (Jordan u. a. 2008, S. 93 f.). Nicht das Addieren selbst ist die Herausforderung, sehr wohl aber das **Zerlegen einer Zahl in Summanden unter gegebenen Bedingungen**. Die folgende Übersicht fasst die Ausprägung der jeweiligen Schwierigkeitsmerkmale zusammen (Cohors-Fresenborg, Sjuts & Sommer

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1139–1142). Münster: WTM-Verlag

2004, S. 114 f., Jordan u. a. 2008, S. 93 f.). Dabei wird hier lediglich nach geringer (0), mittlerer (1) und hoher (2) Schwierigkeit unterschieden.

Merkmal	**Schwierigkeit**		
	0	1	2
Curriculare Wissensstufe (Arithmetik)	x		
Rechenfertigkeit	x		
Außermathematisches Modellieren	x		
Grundvorstellungsintensität		x	
Sprachlogische Komplexität		x	
Innermathematisches Modellieren (Darstellen)			x
Argumentieren			x
Kognitive Komplexität			x

In welchem Ausmaß **Argumentieren** im Mathematikunterricht auftritt, ist aus der COACTIV-Studie bekannt. Die Auswertung von etwa 45.000 in den Schuljahrgängen 9 und 10 im Unterricht, in Klassenarbeiten und in Hausaufgaben eingesetzten Aufgaben zeigte, dass mathematisches Argumentieren auf einem absolut sehr niedrigen Niveau verlangt wird, „dass am Gymnasium immerhin jede zehnte Aufgabe in Klassenarbeiten mathematisches Argumentieren erfordert, während dies in anderen Schulformen nur für jede fünfzigste Klassenarbeitsaufgabe der Fall ist“ (Jordan u. a. 2008, S. 102). „Zieht man die von den Lehrkräften eingesetzten Aufgaben zu Rate, scheint mathematisches Argumentieren im deutschen Mathematikunterricht nahezu gar nicht gefordert zu sein“ (Jordan u. a. 2008, S. 99).

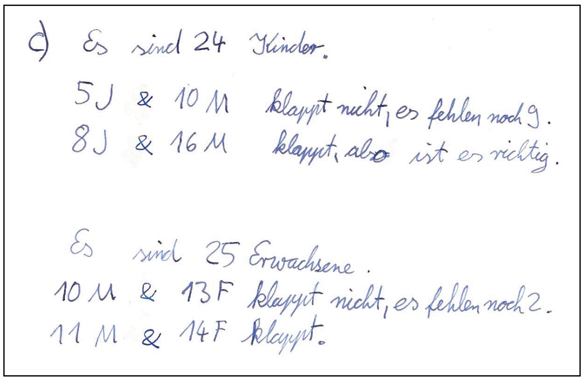
Schon nach ersten empirischen Ergebnissen über die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern und über die Bedeutung beruflicher Qualifikationen von Lehrerinnen und Lehrern sahen sich Bildungspolitik und Bildungsadministration zu Maßnahmen veranlasst. So beschloss die Kultusministerkonferenz recht bald Bildungsstandards und Standards für die Lehrerbildung. Gerade zum **Zerlegen einer Zahl in Summanden unter gegebenen Bedingungen** findet sich ein Niederschlag in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK 2004). **Argumentieren** und **Darstellen** gehören neben **Problemlösen**, **Kommunizieren** und **Modellieren** zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Eine Aufgabe zum **Zerlegen einer Zahl in Summanden unter gegebenen Bedingungen** dient als Musteraufgabe. In dieser Musteraufgabe wird verlangt, die Zahl 31 in zwei Summanden zu zerlegen. In der ersten Teilaufgabe ist einmal der Summand 12, einmal der Summand 0 und einmal gar kein Summand vorgegeben. In der zweiten Teilaufgabe ist das Zahlenpaar zu finden, bei dem eine Zahl um eins größer ist als die andere. In der dritten Teilaufgabe ist die Zahl 31 so in zwei Zahlen zu zerlegen, dass die eine durch 5, die andere durch 2 teilbar ist. Und in der vierten Teilaufgabe sind dazu zwei weitere Lösungen anzugeben. In dieser Teilaufgabenfolge treten daher alle **Anforderungsbereiche** auf (KMK 2004). Allerdings wird nur die Angabe der Summanden gefordert, eine Begründung dagegen nicht.

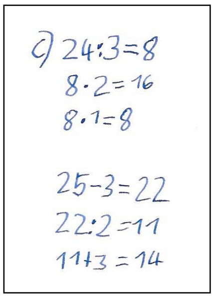
Die (vorwiegend **quantitative**) Kollektivforschung über mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern hat insgesamt eine Fülle von Ergebnissen erbracht, aus denen sich weiterführende diagnostische Befunde gewinnen lassen. Denn die Analyse der in Schulleistungsstudien eingesetzten Aufgaben ermöglicht eine Identifizierung schwierigkeitsbestimmender Merkmale, die für unterrichtliche Förderkonsequenzen nutzbringende Hinweise liefern. Bevor allerdings lerngruppen- oder personenbezogene Maßnahmen ergriffen werden können, ist eine gezielte Gruppen- oder Individualdiagnostik vorzusehen. Dafür kommen ergänzende (vorwiegend **qualitative**) Untersuchungen in Frage. Mit einem solchen Vorgehen wird insbesondere dem Anspruch an **Evidenzbasierung** im beruflichen Handeln Rechnung getragen.

Wie das folgende Beispiel zeigt, kann eine Studie, die sich im Tätigkeitsfeld Schule beinahe von selbst ergibt, wichtige Befunde über Schülerinnen und Schüler einer bestimmten Gruppe erbringen. Die folgende Aufgabe stammt aus der Regionalrunde der Mathematik-Olympiade 2013/2014 im Schuljahrgang 5:

Jens sitzt gerade im Zug, sieht sich in seinem Wagen um und denkt sich für seine Freunde in der Mathematik-AG eine Aufgabe aus:
(1) Die Anzahl aller Personen in meinem Abteil ist eine Quadratzahl zwischen 26 und 50.
(2) Es ist ein Erwachsener mehr als Kinder.
(3) Es sind zweimal so viele Mädchen wie Jungen.
(4) Es sind drei Frauen mehr als Männer.
a) Aus der Aussage (1) kann man herleiten, dass für die Anzahl der Personen nur zwei Zahlen in Frage kommen. Welche Zahlen sind das?
b) Aus der Aussage (2) kann man dann herleiten, wie viele Personen und wie viele Kinder im Wagen sind. Gib diese Anzahlen an und begründe.
c) Wie viele Frauen, Männer, Mädchen und Jungen fahren in dem Wagen? Begründe!

Liegt für eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern ein umfangreicher Satz authentischer Aufgabenbearbeitungen vor, bietet sich eine günstige Gelegenheit, diese qualitativ zu untersuchen, um so passgenaue Förderkonzepte entwickeln zu können. Dabei lassen die **Darstellungen** der Aufgabenbearbeitungen darauf schließen, welche **Vorstellungen** vom Zerlegen einer Zahl in Summanden unter gegebenen Bedingungen und welche **Vorstellungen** von einer Begründung oder von einer für vollständig gehaltenen Begründung bestehen. Hier aus dem Wettbewerb zwei Teillösungen zur Teilaufgabe c):


c) Es sind 24 Kinder.
5 J & 10 M klappt nicht, es fehlen noch 9.
8 J & 16 M klappt, also ist es richtig.
Es sind 25 Erwachsene.
10 M & 13 F klappt nicht, es fehlen noch 2.
11 M & 14 F klappt.


c) 24:3=8
8·2=16
8·1=8
25-3=22
22:2=11
11+3=14

Das Zerlegen einer Zahl in zwei Summanden mit gegebener Differenz und das Zerlegen einer Zahl in zwei Summanden mit gegebenem Verhältnis treten in zwei typisierbaren Varianten mathematischen Denkens auf. Sie unterscheiden sich deutlich und sind für Lehr-Lern-Prozesse in Mathematik von hoher Relevanz. Feststellbar ist der Unterschied in den **Darstellungen**. Diese sind Ausdruck unterschiedlicher **Vorstellungen** vom Zerlegen einer Zahl in zwei Summanden unter bestimmten Bedingungen. Als Befund über die Gruppe ist zugleich der unterschiedliche Begründungsgrad in den **Darstellungen** feststellbar, auch wenn die Notationsformen in ihren Anteilen (Text, Bild, Rechnung) variieren. Entsprechend dem Zerlegen wird man hier unterschiedliche **Vorstellungen** vom Begründen (und vom Begründungsgrad) annehmen dürfen. Aus den Analysen über eine bestimmte Gruppe, hier über eine Wettbewerbsgruppe, kann dann eine gezielte (evidenzbasierte) Förderung der beteiligten Schülerinnen und Schüler entstehen. Nimmt man nur das **Begründen** heraus, wäre eine Bearbeitung von Aufgaben denkbar, die mit nachdrücklichem Anspruch eine gestaffelte Vorgehensweise etwa in der folgenden Art verlangt:

Die Antwort ist aufzuschreiben. – Eine Begründung ist aufzuschreiben. – Die Vollständigkeit der Begründung ist zu prüfen. – Die Rechtschreibung ist zu überprüfen. – Die Lesbarbeit ist zu überprüfen. – Die Antwort samt Begründung ist ganz neu aufzuschreiben. Die individuell erstellten Aufgabenlösungen müssen sich dann einer Überprüfung im Diskurs der Gruppe unterziehen.

Literatur:

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J. & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, M. (2004), 109-144.

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 29 (2), 83-107.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004.

Neubrand, M. (Hrsg.) (2004). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden: VS Verlag.