Anna-Christin SÖHLING, Münster

Problemlösen – Wildes Probieren und Irrwege als Basis des Erfolgs

1. Einleitung

> **Pferde-Fliegen-Problem**
>
> In einem Stall werden Pferde und Fliegen gezählt. Es sind 15 Tiere. Zusammen haben sie 72 Beine. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es?
>
> Aus: Das Zahlenbuch 4. (2005)

In eigenen Erkundungen lösten SchülerInnen klassische Problemaufgaben wie etwa das Pferde-Fliegen-Problem. Dabei konnte beobachtet werden, wie die Lernenden zunächst wild probierten, aber am Ende dennoch zu einer Lösung des Problems kamen. War es Zufall, dass die SchülerInnen zu einer Lösung kamen? In diesem Fall dürfte der Wert solcher Aufgaben für den Mathematikunterricht anzuzweifeln sein. Oder haben sie vielleicht die Aufgaben im Laufe ihrer Lösungsbemühungen mathematisch tiefer verstanden und sind eleganter zur Lösung gekommen? In diesem Fall würde die Chance bestehen, dass die SchülerInnen beim Lösen der Aufgaben über das Training von Fertigkeiten hinaus Mathematik gelernt haben.

Bei der Betrachtung der Problemlöseprozesse fiel auf, dass SchülerInnen beim wilden Probieren zunehmend systematischer vorgingen und wie sie letztlich eine schnellere, elegantere Lösungsmethode fanden. Doch wie kommen SchülerInnen zu einer Einsicht in die mathematische Struktur der Aufgabe, die ihnen beim Lösen hilft?

In der Literatur wird der Übergang vom wilden zum systematischen Probieren beispielsweise von Bruder und Collet (2011, S. 70) erwähnt, aber nicht näher beschrieben. Nach Schreiber (2011, S. 97) besteht das Potential des systematischen Probierens darin, dass aus den gewonnen Daten weitere Einsichten gewonnen werden können. Doch auch hier finden sich keine genaueren Beschreibungen eines solchen Erkenntnisweges.

2. Methoden

In Einzelinterviews wurden SchülerInnen der 4.-6. Klasse verschiedener Schulformen dazu aufgefordert, Problemaufgaben laut denkend zu lösen. Die Interviews wurden transkribiert und im Rahmen von Fallstudien interpretiert.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1143–1146). Münster: WTM-Verlag

3. Abduktionstheorie

Das Vorgehen der SchülerInnen wurde mithilfe der Abduktionstheorie nach Peirce rekonstruiert, die Meyer (2007) für die Mathematikdidaktik nutzbar machte. Bei der Abduktion wird von einem überraschenden Resultat aus auf einen erklärenden Fall und ein passendes Gesetz geschlossen. Dieser Schluss ist hypothetisch, da möglicherweise andere Gesetze und andere Fälle zum beobachteten Resultat führen.

Im Gegensatz zur Deduktion und zur Induktion ist die Abduktion ein Schluss, bei dem neue Erkenntnisse gewonnen werden können. Es kann die Anwendbarkeit bekannter Gesetze im neuen Kontext entdeckt werden oder es können neue Gesetze gefunden werden. Da sich SchülerInnen beim Problemlösen in ihnen unbekannten Bereichen bewegen, sind beide Möglichkeiten naheliegend.

4. Erkenntnisweg „Vom Probieren zur Strukturerkenntnis"

Das rationale Vorgehen von Schülern beim Problemlösen wurde also vor allem mithilfe des Abduktionsbegriffs rekonstruiert. Hier gelang es u.a., den typischen Erkenntnisweg strukturell zu bestimmen, der vom (wilden) Probieren zur strukturellen Einsicht führt. Dieser Erkenntnisweg besteht aus einer Reihe von logischen Schlüssen, die hier kurz skizziert und von denen der entscheidende erläutert werden sollen.

Zunächst deutet der Schüler die mathematische Struktur der Aufgabe, indem er sich beispielsweise fragt, durch welche Rechnungen er die Aufgabe lösen kann. Der Problemlöser kommt darauf, verschiedene Werte anzunehmen und nacheinander auszuprobieren (alter Lösungsweg W genannt).

Es kann nun sein, dass der Problemlöser innehält und seine bisherigen Probierresultate betrachtet und in ihnen eine Regelmäßigkeit feststellt. Der Problemlöser kann bemerken, dass man auch einfacher zu neuen Probierresultaten kommt oder dass man über eine „Abkürzung" direkt zur gewünschten Lösung kommt. Ausgangspunkt sind die bisherigen Probierresultate, die auf dem alten Lösungsweg W, willkürliches Probieren, erzielt wurden. Schematisch dargestellt:

Abduktion Finden eines neuen Lösungsweges W_{neu}

Resultat:

$$x_1 \xrightarrow{W} y_1$$
$$x_2 \xrightarrow{W} y_2$$
$$\vdots$$
$$x_i \xrightarrow{W} y_i$$

Und: Die Lösung (x_L, y_L) ist zu erreichen.

Gesetz: Wenn sich einige der bisher produzierten Paare (x_i, y_i) auf dem Lösungsweg W_{neu} produzieren lassen, dann lassen sich auch alle beliebigen Paare (x_i, y_i) und damit auch die Lösung (x_L, y_L) auf dem Lösungsweg W_{neu} erzeugen.

Fall: Einiges des bisherigen Produzierten lässt sich auf dem Lösungsweg W_{neu} besser erzeugen.

x_i ist ein angenommener Probierwert und y_i sein Ergebnis. Beispielsweise ist x_i die Aufteilung der 15 Tiere in 7 Pferde und 8 Fliegen und y_i die 76 Beine dieser Tiere. W_{neu} kann darin bestehen, Fliegen gegen Pferde zu tauschen, um von 76 Beinen ausgehend in Zweierschritten direkt auf das Ziel $y_L = 72$ Beine zu gelangen. Die Zweierschritte in den Zahlen y_i mag der Schüler an seinen vorigen Resultaten entdeckt haben.

Dieser abduktive Schluss ist unsicher, weil das Gesetz falsch sein kann und W_{neu} nur zufällig für die betrachteten Resultate gilt. Der Problemlöser hat verschiedene Optionen, diese Unsicherheit zu reduzieren:

Option 1 Anwendung des neuen Lösungswegs (Der sich einstellende Lösungserfolg ist lediglich ein Indiz, aber bietet keine Gewähr für Gültigkeit des oben genannten Gesetzes).

Option 2 Untersuchung, ob der neue Lösungsweg zur mathematischen Struktur der Aufgabe passt.

Option 3 Untersuchung, ob der neue Lösungsweg zur eingekleideten Problemstellung passt.

Vor allem bei Option 2 und 3 besteht die Chance, dass der Problemlöser zu mathematischen Erkenntnissen kommt und etwas über die mathematische Struktur der Aufgabe lernt.

Im Vortrag wurde ein realer Fall beispielhaft analysiert, bei dem ein Schüler (6. Klasse) das Pferde-Fliegen-Problem löst. Der Schüler entdeckt den neuen Lösungsweg, die Gesamtanzahl der Beine durch eine bestimmte Anzahl von Tauschprozessen „Fliegen gegen Pferde“ zu verändern und nicht mehr jede beliebige Aufteilung der Gesamttiermenge zu überprüfen. Durch die sachbezogene Begründung seines neuen Lösungsweges, dass Fliegen 2

Beine mehr haben als Pferde und sich daher beim Tausch „Fliegen gegen Pferde“ die Gesamtanzahl der Beine verringert, zeigt er, dass er seinen neuen Lösungsweg auch im Kontext der Aufgabenstellung verstanden hat (Option 3).

Allerdings erkennt der Schüler nicht, dass unabhängig von der Einkleidung (Pferde, Fliegen) auf diesem Weg jegliches System von zwei linearen Gleichungen gelöst werden kann: Wenn das Ergebnis eines Probierwertes bekannt ist, kann stets die Differenz des Ergebnisses zum Zielergebnis genutzt werden, um direkt auf die Lösung zu kommen. Aus Platzgründen ist dieses hier nicht weiter ausgeführt und wäre Option 2. Um einen solchen Erkenntnisgewinn zu sichern, ist der Lehrer gefordert (siehe auch Wood, Bruner & Ross 1976).

5. Ausblick

Der vorgestellte Erkenntnisweg zeigt, wie es beim Probieren zu Struktureinsichten kommen kann. Außerdem stellte sich heraus, dass beim Probieren an bereits gewonnenen Probierresultaten weitere Erkenntnisse gewonnen werden können. Daher ist es sinnvoll, Probierresultate schriftlich festzuhalten und auch Rechnungen bis zum Ende durchzuführen, auch wenn sie nicht direkt auf die Lösung führen.

Weiterhin konnten SchülerInnen beim Gehen von Irrwegen beobachtet werden, also beim Anwenden von Lösungsverfahren, die für den Experten nicht erfolgversprechend sind. Trotzdem konnten die Lernenden das Problem am Ende lösen und es stellt sich die Frage, ob auch die Irrtümer einen Nutzen für die Lernenden hatten. Ein weiterer Erkenntnisweg, der den Weg von Irrtümern zu Einsichten in die mathematische Struktur der Aufgabe beschreibt, konnte ebenfalls herausgearbeitet, im Vortrag jedoch nur kurz angerissen werden.

6. Literatur

Bruder, R. & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Peirce, C. S. Collected Papers of Charles Sanders Peirce, (Band 1-6. Hartshorne, C. & Weiß, P. (Hrsg.), 1931-35; Band 7-8 Burks, A.W. (Hrsg.), 1985), Cambridge: Harvard University Press.

Schreiber, A. (2011). Begriffsbestimmungen. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung. Berlin: Logos Verlag.

Wittmann, E. & Müller, G. (Hrsg.) (2005). Das Zahlenbuch 4. Leipzig: Klett Verlag.

Wood, D., Bruner, J.S. & Ross, G. (1976) The Role of Tutoring and Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89-100.