Christian RÜTTEN, Essen

Zahlen kleiner Null – Mit Null beginnende Dezimalbrüche?

1. Einordung in das Forschungsprojekt

Bereits in der Grundschule besitzen einige Lernende Vorstellungen zu einem Zahlbereich kleiner als Null. Diese Lernerperspektiven zu negativen Zahlen werden bei Lernenden der Jahrgangstufen 3 und 4 auf der Grundlage einer schriftlichen Befragung und angeschlossener problemzentrierter Interviews untersucht und die diesen Perspektiven zugrunde liegenden mentalen Modelle mittels systematischer Metaphernanalyse rekonstruiert. Dazu wurde ein 11 Aufgaben umfassender Aufgabenbogen (kontextbezogene und frei sowie veranschaulichungsbezogene Aufgaben) entwickelt, der erste Einblicke in die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu negativen Zahlen liefert und gleichzeitig sowohl als Sampling als auch als inhaltliche Grundlage für die Interviews dient. Von den insgesamt 291 Lernenden von vier Essener Grundschulen, die im Sommer 2013 an der schriftlichen Befragung teilnahmen, wurden mit 47 Schülerinnen bzw. Schülern Interviews geführt. Dabei zeigte sich eine große Vielfalt an vorunterrichtlichen Vorstellungen zum Zahlbereich kleiner als Null. Oft unterscheiden sich die Vorstellungen von diesem Zahlbereich von normativen Grundvorstellungen. Eine solche normverschiedene Vorstellung ist das sog. DLZ-Phänomen.

2. DLZ-Phänomen

Im Rahmen einer Studie mit 11- bis 13-jährigen neuseeländischen Lernenden zum Dezimalbruchverständnis beschreibt Irwin (1996) erstmals das Phänomen, dass Lernende mit Null beginnende Dezimalbrüche als „below zero“ deuten. Archer & Condon (1999) erwähnen dieses Phänomen ebenfalls als eine Fehlvorstellung bezüglich Dezimalzahlen und nennen sie *Special Set Thinking*. Für Roche & Clark (2004) ist diese Fehlvorstellung eine der „most common misconception“, die sie in ihrer Interviewstudie bei Lernenden einer australischen Primary School (Klasse 3-6) beobachten konnten, und bezeichnen diese mit DLZ (<u>D</u>ecimals are <u>L</u>ess than <u>Z</u>ero).

Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin & Bana (2001) untersuchten 553 australische und neuseeländische Lehramtsstudierende zum fachmathematischen und fachdidaktischen Wissen zu Dezimalbrüchen mit dem von ihnen entwickelten *Decimal Comparison Test* (DCT) und konnten ebenfalls das DLZ-Phänomen bei wenigstens 13 % der Studierenden beobachten (vgl. Stacey, Helmle & Steinle 2001). Steinle & Stacey (2001) bestätigten diesen Befund in einer weiteren Untersuchung mit dem *Decimal Compari-*

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1027–1030). Münster: WTM-Verlag

son Zero Test (DCT0) an 104 australischen Lehramtsstudierenden und 212 japanischen Schülern, in der die zweithöchste Fehlerrate mit 13 % beim Vergleich von „0.6“ und „0“ (Q22) lag.

In einer eigenen Untersuchung mit einem adaptierten DCT0 an 271 Grundschullehramtsstudierenden der Universität Duisburg-Essen 2013 zeigte sich ebenfalls ein ähnliches Bild. 12,55 % der Befragten bearbeiteten die entsprechenden drei Aufgaben (Q22-Q24) zum Vergleich eines mit Null beginnenden Dezimalbruchs mit Null nicht, fehlerhaft oder korrigierten ihre zunächst fehlerhafte Bearbeitung.

Auch Widjaja, Stacey & Steinle (2011) fanden in einer Untersuchung an 94 indonesischen Lehramtsstudierenden Schwierigkeiten, die Ordnungsrelation von mit Null beginnenden Dezimalbrüchen und Null zu bestimmen und diese Dezimalbrüche richtig auf der Zahlengeraden zu verorten.

Das vorgestellte DLZ-Phänomen ist auch in der oben skizzierten Untersuchung zu vorunterrichtlichen Vorstellungen zu negativen Zahlen bei Grundschülerinnen und Grundschülern zu beobachten. Allerdings nutzen nur 2,06 % der Lernenden in mindestens einer der Aufgaben bei der schriftlichen Befragung mit Null beginnende Dezimalbrüche anstelle von negativen Zahlen. Im Folgenden werden einige Beispiele vorgestellt und Erklärungsansätze diskutiert.

3. Beispiele und Erklärungsansätze

Alina und Yasmina (Klasse 4) in der schriftlichen Befragung notieren die Temperatur am Thermometer, dessen Flüssigkeitsstand zwei Skalierungsstriche unter der Nullmarke und vier Skalierungsstriche über dem Reservoir ist (s. Abb. 1), mit 0,4 °C. Alina ergänzt diese Notation noch durch die Begründung: „Weil das unter der Null ist“. Im Interview zeigt sich, dass Alina zur Ermittlung der Temperaturangabe vom Reservoir aufwärts zählt. „Da war das halt drunter unter Null und dann habe ich das einfach so hochgezählt *(zeigt mit dem Finger auf die Skalierungsstriche von unten nach oben)* und dann war es ja vier, also 0,4 Grad“. Für Alina existieren scheinbar zwei voneinander getrennte Zahlbereiche: der mit Null beginnende Bereich der natürlichen Zahlen und der beim Reservoir beginnende Bereich der mit „0,“ versehenen Zahlen, die unter Null sind. Alina und vermutlich

Abbildung 1: Thermometerdarstellung zu –2 °C

auch bei Yasmina deuten vermutlich das ihnen aus anderen Kontexten bekannte Symbol „0,“ als symbolischen Ausdruck für die sprachliche Wendung „unter Null“.

Laura (Klasse 3) verwendet bei der Temperaturmessung negative Zahlen in korrekter Weise, nutzt jedoch beim Rechnen und an der Zahlengeraden bzw. am Rechenstrich „0,“ als Vorzeichen für Zahlen kleiner Null. Anders als Alina und Yasmina ordnet Laura die mit „0,“ versehenen Zahlzeichen spiegelbildlich zu den natürlichen Zahlen. Überdies rechnet sie: 9 – 12 = 0,3 (9 – 10 = 0,1 und 0,1 – 2 = 0,3). Laura nutzt damit „0,“ in gleicher Weise wie das Minuszeichen bei den negativen Zahlen.

Dilovan (Klasse 4) verwendet die mit Null beginnenden Dezimalbrüche nur im Kontext der Darstellungen an Zahlengerade bzw. Rechenstrich. Bei Aufgaben zur Temperatur nutzt er negative Zahlen mit großer Selbstverständlichkeit. In der schriftlichen Befragung ist am Rechenstrich durch einen Bogen über der eingetragenen Null eine Operation repräsentiert. Dazu soll die passende Rechnung gefunden werden. Dilovan deutet die Darstellung als 1 – 2 = 0,1 bzw. 0,1 + 2 = 1 (s. Abb. 2). Im Interview erklärt er auf Nachfrage, wie er auf die Idee gekommen sei, den linken Strich als 0,1 zu deuten: „Dann habe ich mir ausgedacht: einfach 0,1.“ Das Zahlzeichen ist damit für Dilovan keine Konvention, sondern seine subjektive Bezeichnung des entsprechenden Objekts. Auch Dilovan verwendet wie Laura „0,“ im Sinne eines Vorzeichens für die Zahlen links der Null an Zahlengerade bzw. Rechenstrich.

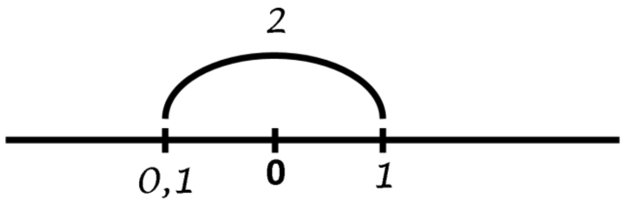

Abbildung 2: Dilovans Rechenstrichaufgabe

Stacey, Helmke & Steinle (2001) versuchen das auftretende DLZ-Phänomen mit der im Rahmen der kognitiven Metapherntheorie entwickelten Spiegelmetapher zu erklären. In drei Bereichen der Zahlvorstellung ist die Spiegelmetapher von entscheidender Bedeutung. (a) An der Zahlengerade stellen die positiven Zahlen die realen Objekte, die Null die Spiegelposition und die negativen Zahlen die Spiegelbilder der realen Objekte dar. (b) Die natürlichen Zahlen und deren Kehrwerte verhalten sich am Zahlenstrahl bei 1 als Spiegelposition wie reale Objekte und deren Spiegelbilder. (c) Schließlich kann in der Stellentafel die Einer-Spalte als Spiegelposition betrachtet werden, sodass sich die Zehnerpotenzen mit positivem und die mit negativem Exponenten spiegelbildlich zueinander verhalten. Kommt es zwischen den metaphorischen Konzeptualisierungen (a) und (b) oder (a) und (c) zu Vermischungen, äußert sich dies im DLZ-Phänomen. Inwieweit diese Erklärung in einer systematischen Metapheranalyse begründet ist, lässt sich anhand der von Stacey, Helmke & Steinle (2001) veröffentlichten Daten nur schwer beurteilen.

Der Erklärungsversuch dieser Forschergruppe liefert allerdings keine Begründung für das bei Alina, Yasmina, Laura und Dilovan auftretende Phänomen, da diese Lernenden die entsprechenden metaphorischen Konzeptualisierungen bisher kaum aufgebaut haben werden. Diese Lernende suchen vielmehr nach passenden Zeichen für die neuen Objekte in den Aufgabenstellungen. Bei Alina und Yasmina stehen diese Objekte beziehungslos neben den bekannten Zahlen, während bei Laura und Dilovan bereits erste Beziehungen zu den bekannten Zahlen erkannt und genutzt werden. Während Alina und Yasmina eher einen neuen Zahlenraum geschaffen haben, der vom bekannten Raum der natürlichen Zahlen getrennt existiert, haben Laura und Dilovan den bekannten Zahlbereich um die Zahlen kleiner bzw. links der Null erweitert.

Literatur

Archer, S. & Condon, C. (1999). Decimals: Addressing Students‘ Misconceptions. In N. Scott (Hrsg.). *Mathematics across the ages. Mathematical Association of Victoria for the 36th annual conference* (S. 46-54). Brunswick: Mathematical Association of Victoria.

Irwin, K. (1996). Making Sence of Decimals. In J. Mulligan & M. Mitchelmore (Hrsg.). *Children's Number Learning* (S. 243-257). Adelaide: MERGA & AAMT.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K. & Bana, J. (2001). Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4(3).* S. 205-225.

Stacey, K., Helme, S. & Steinle, V. (2001). Confusions between Decimals, Fractions and negative Numbers: A Consequence of the Mirror as a conceptual Metaphor in three different ways. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 217-224). Utrecht: Utrecht University, Freudenthal Institute.

Steinle, V. & Stacey, K. (2001). Visible and Invisible Zeros: Sources of Confusion in Decimal Notation. In J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Hrsg.). *Numeracy and beyond. Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Bd. 2, S. 434-441). Sydney: MERGA.

Roche, A. & Clarke, D. M. (2004). When does successful comparison of decimals reflect conceptual understanding? In I. Putt, R. Farragher & M. McLean (Hrsg.). *Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (S. 486–493). Townsville: MERGA.

Widjaja, W., Stacey, K. & Steinle, V. (2011). Locating negative decimals on the number line: Insights into the thinking of preservice primary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 30. S. 80-91.