

Anne SCHILL, Karlsruhe

Wege zu einem tragfähigen Variablenverständnis

Ziel des Forschungsvorhabens ist es, Erkenntnisse zu gewinnen über Lernprozesse von mathematisch schwachen Schülerinnen und Schülern im Umgang mit Variablen in Sachsituationen und diese für die Entwicklung eines Unterrichtsdesigns nutzbar zu machen.

Dafür ist es notwendig, den Lerngegenstand zu spezifizieren, ein Unterrichtsdesign zu entwickeln, zu erproben und auszuwerten, sowie daraus resultierend die Theorieentwicklung voranzutreiben. Diese einzelnen Arbeitsbereiche entstammen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung, die diesem Projekt seinen Rahmen gibt (Hußmann 2013). Sie sind vielfältig miteinander verknüpft und bauen jeweils aufeinander auf, sodass erst das mehrfache Durchlaufen der Arbeitsbereiche zu vertieften theoretischen Erkenntnissen und praxistauglichen Unterrichtsdesigns führen kann.

Dieser Artikel möchte eine erste Annäherung an die Strukturierung des Lerngegenstandes, sowie Entwicklung und Auswertung eines Unterrichtsdesigns vorstellen, die in noch folgenden Forschungszyklen weiter ausdifferenziert und fokussiert werden. Hierauf soll am Ende des Beitrags ein Ausblick gewährt werden.

Der Lerngegenstand:

Ein tragfähiges Variablenverständnis lässt sich grob als das Vermögen beschreiben, unterschiedliche Variablenaspekte im Umgang mit Sachsituationen flexibel zu verwenden und dabei die algebraische Symbolsprache angemessen zu nutzen. Hier wird Bezug genommen auf die Unterscheidung der Variablen als unbekannte Zahl, als allgemeine Zahl und als Veränderliche (Ursini & Trigueros & Reyes 1996). Diese drei Aspekte können als erste grobe Strukturierung eines inferentiell gegliederten Wissensnetzes (Hußmann 2013) zum tragfähigen Variablenverständnis angesehen werden. Des Weiteren wurden notwendige den Lerngegenstand erschließende Kernideen identifiziert (*Wie kann ich Terme aufschreiben, wenn sich Zahlen immer wieder ändern? Wie kann ich variable Größen von festen Größen unterscheiden? Wie kann ich unbekannte Zahlen finden?*). Darüber hinaus wurde die Strukturierung mit Hilfe eines sprachanalytischen Ansatzes (Hußmann 2013) in sprachliche Bausteine (so genannte Urteile) ausdifferenziert, wodurch eine normative Beschreibung des Lerngegenstands sowie ein deskriptiver Zugriff auf die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler ermöglicht werden. Die an den Anfang gesetzte normative Ausdifferenzierung der Urteile muss sich im Forschungsprozess anhand der Untersuchung In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1063–1066). Münster: WTM-Verlag

des Variablenverständnisses von Schülerinnen und Schülern bewähren und gegebenenfalls restrukturiert werden.

Entwicklung des Unterrichtsdesigns

Ein Unterrichtsdesign zur Erreichung eines Basisniveaus im Umgang mit Variablen in Sachsituationen muss bekannte Lernvoraussetzungen und Lernhürden berücksichtigen. So ist zu beachten, dass algebraisches Denken nicht erst mit Einführung der Buchstabenvariablen einsetzt. Anhand von verbalen Beschreibungen, Handlungen, Gesten und Zeichnungen können bereits unbekannte, allgemeine und veränderliche Zahlen erkannt und mit ihnen umgegangen werden (Radford 2001, 2011 u.a.).

Auf der anderen Seite müssen vielerlei Konventionen, die dem fortgeschrittenen Mathematiker als selbstverständlich erscheinen, mühsam erlernt und mit Bedeutung gefüllt werden. (Malle 1993, Rosnick 1981 u.a.)

Vom arithmetischen Denken tief geprägt, bringen die Lernenden in der Regel Denkweisen mit, die einerseits Voraussetzung für einen gelingenden algebraischen Lernprozess sind und andererseits, bei zu starker Fixierung darauf, auch hinderlich sein können. So wurde vielfach ein zu starkes Festhalten an operationalen Denkmustern festgestellt (Carpenter et al 1980, Sfard 1991). Die Schülerinnen und Schüler sind es gewohnt, Operationszeichen und Gleichheitszeichen als Aufforderung zum Ausrechnen eines festen Ergebnisses zu sehen, während es ihnen schwer fällt, Terme in ihrer zugrundeliegenden Struktur wahrzunehmen (Sfard 1991) oder die zwei Seiten eines Gleichheitszeichens in ihrer Beziehung zueinander zu erkennen (Rittle-Johnson et al 2011).

Das entwickelte Unterrichtsdesign versucht nun einerseits, die zu entwickelnden Variablenaspekte, Kernideen und Urteile anzubahnen und andererseits, an konkrete operationale Denkweisen anzuknüpfen, sowie algebraische Denkweisen anhand unterschiedlicher Ausdrucksweisen zu ermöglichen und anzubahnen und zu standardisierten Schreibweisen von Buchstabenvariablen hinzuführen.

Zentrale Darstellungsmittel waren hierzu im ersten Designzyklus Tabellen und farbige Hervorhebungen der veränderlichen Werte (in der Abbildung auf der nächsten Seite die grau hinterlegten Personenanzahlen). Ein mögliches Urteil in diesem Zusammenhang könnte sein: „Die Werte, die sich innerhalb einer Spalte der Tabelle verändern, lassen sich allgemein mit einer Variablen bezeichnen“. Zur Beschreibung des Lernprozesses ist von Bedeutung, worauf der Lernende fokussiert, um zu diesem Urteil zu kommen. In diesem Fall wird der Fokus auf die Tabellenspalten gelenkt. Von Interesse ist hier auch, wie stabil dieses Urteil über mehrere Situationen

(Aufgabentypen) hinweg ist. Bleibt das Urteil bestehen, wenn mehrere Größen variieren? Bleibt es bestehen, wenn die variierende Größe nicht in der ersten, sondern in der zweiten Spalte steht? Zur (Weiter-)Entwicklung des Unterrichtsdesigns sind diese Fragen von Bedeutung.

Till schlägt einen Ausflug ins Schwimmbad AquaToll vor und berechnet die Kosten für verschiedene Personenzahlen:



Anzahl Personen	Anfahrt pro Person	Eintritt pro Person	Gesamtkosten pro Person (Term)	Gesamtkosten pro Person (Ergebnis)
10	150€:10	15€	150€:10+15€	30,00€
15	150€:15	15€	150€:15+15€	25,00€
20	150€:20	15€	150€:20+15€	22,50€
25	150€:25	15€	150€:25+15€ =	21,00 €
30	150€:30	15€	150€:30+15€ =	20,00 €
x	150€:x	15€	150 €: x + 15€ =	

Durchführung und Auswertung des Designexperiments

Im Anschluss an den in einer achten Werkrealschulklasse durchgeführten Unterricht, standen die mit 4 Schülerpaaren durchgeführten Leitfadenterviews unter folgendem Forschungsfokus:

- 1) Welche Fokussierungen nutzen die Schülerinnen und Schüler (welche sind hilfreich?), um das Variable einer Situation zu erfassen?
- 2) Was sind verschiedene Situationsklassen (welche helfen im Lernprozess weiter?), in denen Variablen in unterschiedlichen Deutungen erfasst werden müssen?

Beobachtungen und Schlussfolgerungen aus den Interviews:

Um das Variable einer Situation zu erfassen, wurden, wie im Vorfeld durch die bereitgestellten Materialien intendiert, die Farbmarkierungen und die Tabellenspalten genutzt. Jedoch konnte vereinzelt auch beobachtet werden, dass allein auf die Personenanzahl fokussiert wurde, unabhängig davon, ob dies der Sachsituation entsprach. Dementsprechend sind Situationen mit veränderlicher Personenanzahl von solchen mit anderen veränderlichen Größen zu unterscheiden.

Um zu entscheiden, wofür die Variable x stehen kann, wurde teilweise auf *beliebige* Werte fokussiert, wobei hier im weiteren Forschungsprozess noch besser verstanden werden muss, welche tragfähigen Vorstellungen dann jeweils dahinter stecken, oder ob es sich nur um eine aus dem Unterricht wiederholte Floskel („x wie x-beliebig“) handelt.

Teilweise wurde zur Erklärung, wofür x stehen kann, auch auf diejenigen Werte fokussiert, „die man nicht weiß“. Hier wurde einerseits ein starker Hang dazu festgestellt, die Variable als Unbekannte zu interpretieren, andererseits wurde x von einigen Schülerinnen und Schülern *innerhalb eines Terms für unterschiedliche* unbekannte Werte eingesetzt. Für die Überarbeitung des Unterrichtsdesigns ist hier die Unterscheidung zwischen Situationen mit *einer* aber auch mit *mehreren* Variablen notwendig.

Ausblick

Da die Schülerinnen und Schüler Variablen vorrangig für unbekannte Werte nutzten, sowie bei der Identifizierung veränderlicher Größen vorrangig auf die sich verändernden Zahlen fokussierten und noch kaum die dahinterliegenden allgemeinen Strukturen explizit machten, ist im weiteren Forschungsverlauf der Variablenaspekt der allgemeinen Zahl stärker in den Fokus zu nehmen. Die normative Ausdifferenzierung der Urteile zum Aspekt der allgemeinen Zahl wird der nächste Schritt im beschriebenen Forschungsprojekt sein, dem dann eine entsprechende Überarbeitung und Evaluation des Unterrichtsdesigns folgt.

Literatur

- Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., Reys, R. (1980): Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school. *The mathematics teacher* 73(5), 329-338.
- Hußmann, S. (2013): *The theory of inferential structured (conceptual) webs of focuses, judgements and situations*. Preprint.
- Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., Ralle, B. (2013): Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Kormorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S.25-42). Münster: Waxmann.
- Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.
- Rittle-Johnson, B., Percival, G., Matthews, T., Roger, S., McEldoon, K. L. (2011): Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence. A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, 103 (1), 85-104.
- Rosnick, P. (1981): Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher*, 74 (6), 418-420, 450.
- Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Trigueros, M., Ursini, S., Reyes, A. (1996): College students' conceptions of variable. *Proceedings of the XX PME International Conference, Bd. 4*, 315-322.