

Maike SCHINDLER, Hannover

## **Empirische Studie zum Vorwissen von Fünftklässlerinnen und Fünftklässlern zu negativen Zahlen**

Bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den ganzen Zahlen handelt es sich um einen bedeutsamen Moment in der *Zahlbegriffsentwicklung* von Schülerinnen und Schülern, der teilweise mit Änderungen von Zahlvorstellungen einhergeht. Dabei können Lernende beim Umgang mit den „neuen“ Zahlen auf der einen Seite ihr Vorwissen zu natürlichen Zahlen, zu Rechenoperationen etc. aktivieren und nutzen (vgl. Malle 2007), gleichzeitig sind verschiedene Schwierigkeiten und Hürden im Lernprozess möglich (vgl. Winter 1989, Bruno 2001), die z.T. gerade mit der Aktivierung des je vorhandenen Vorwissens in Zusammenhang stehen.

Im Zusammenhang mit möglichen schulischen Lehrgängen zur Thematisierung ganzer Zahlen kommt *lebensweltlichen Kontexten* (vgl. Van den Heuvel-Panhuizen 2005) und ihrer Aktivierung eine bedeutsame Rolle zu: Diese werden vielfach genutzt – zumindest für die Erarbeitung erster Zahlvorstellungen und die Thematisierung der Ordnungsrelation – mit dem Ziel, einen intuitiven, nach Möglichkeit verständnisorientierten Zugang zur „Welt der negativen Zahlen“ zu ermöglichen. Inwiefern jedoch die verschiedenen gängigen Kontexte – wie Guthaben-und-Schulden, Temperaturen oder Aufzüge – jeweils tatsächlich dazu beitragen, dass Lernende lebensweltliches Vorwissen einbringen und gewinnbringend nutzen können, wurde bislang kaum empirisch untersucht.

Für eine schulische Behandlung ganzer Zahlen sind drei Darstellungsebenen und die Wechsel zwischen ihnen von großer Bedeutung (vgl. Bruno 2001): die formal-symbolische Darstellungsebene („-3“, „+2“); die kontextuelle Darstellungsebene, in der Zahlen in lebensweltlich-kontextuellem Bezug stehen („2. Untergeschoss“, „-1°C“); sowie die Ebene der Zahlengerade, in der die Reihenfolge oder Lage der Zahlen auf der Zahlengerade oder in anderen ordinalen Darstellungen („-3 -2 -1 0 1“) zentral ist.

Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, das Vorwissen der Lernenden vor einem schulischen Lehrgang zu ganzen Zahlen zu erheben. Das Forschungsinteresse betrifft im Speziellen die *Ordnungsrelation* für ganze Zahlen, die zu Beginn der schulischen Thematisierung ganzer Zahlen angesiedelt ist. Während eine Ordnungsrelation der Form „Je weiter rechts auf der Zahlengerade, desto größer ist die Zahl“ mathematisch tragfähig ist und angestrebt wird, stellt diese für Lernende durchaus eine Herausforderung dar (vgl. Winter 1989): Vielfach ist eine spiegelbildliche Zählordnung der

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1067–1070). Münster: WTM-Verlag

Form „Je weiter weg von der Null, desto größer ist die Zahl“ bei Lernenden vorhanden und für diese viabel (Malle 2007). Hinausgehend über eine Betrachtung der Art der Zählordnung (durchgängig vs. spiegelbildlich) soll im Fokus der vorliegenden Untersuchung stehen, welches (lebensweltliche) Vorwissen Schülerinnen und Schüler beim Vergleich je zweier Zahlen aktivieren und welche Herangehensweisen sich dabei zeigen. Es soll zum einen untersucht werden, wie Lernende beim Vergleich *formal-symbolisch* dargestellter Zahlen vorgehen, inwiefern sie auf lebensweltliche Kontexte oder eine ordinale Darstellung zurückgreifen. Zum anderen werden die Herangehensweisen der Lernenden beim Vergleich ganzer Zahlen in verschiedenen vorgegebenen *lebensweltlichen Kontexten* erhoben.

Zur Untersuchung dieser Fragestellungen wurde eine im Projekt **LENI** (**LE**rnvoraussetzungen zu **NE**gativen Zahlen) angesiedelte Interviewstudie mit 60 niedersächsischen Schülerinnen und Schülern der 5. Jahrgangsstufen (Integrierte Gesamtschule, Gymnasium, Hauptschule) durchgeführt. In halbstandardisierten, klinischen Einzelinterviews erhielten die Lernenden Aufgaben, in denen sie jeweils zwei ganze Zahlen verglichen und die größere bestimmten – u.a. Aufgaben mit je einer positiven und einer negativen Zahl (bspw. -5 und 3) sowie mit zwei negativen Zahlen (bspw. -1 und -4). Zunächst verglichen die Lernenden formal-symbolisch dargestellte Zahlen, anschließend wurden Zahlvergleiche in lebensweltlichen Kontexten (Temperaturen, Guthaben-und-Schulden, Aufzüge) vorgenommen. Nach der Transkription der Interviews wurden die Herangehensweisen der Lernenden – d.h. die Gesamtheit der sprachlichen und nicht-sprachlichen Handlungen, die sie vornahmen, um die gegebenen Situationen (hier den Größenvergleich je zweier ganzer Zahlen) zu bewältigen – mit einem kategorienentwickelnden Vorgehen (Beck & Maier 1994) erhoben. Dabei wurden Sinneinheiten in den Transkripten isoliert und klassifiziert (ebd.), die Herangehensweisen wurden mit einem Schlagwort und Erläuterungstext versehen und einer Liste von Herangehensweisen zugefügt, die nach der Analyse jedes Interviews sukzessiv ergänzt wurde und sich iterativ weiterentwickelte.

In Bezug auf den Vergleich *formal-symbolisch* dargestellter Zahlen (erstes Forschungsinteresse) zeigten sich verschiedene Herangehensweisen, die sich in fünf Oberkategorien bündeln lassen:

*Orientierung an der Lage der Zahlen / Richtungen.* Viele Lernende orientierten sich beim Zahlvergleich an der Lage der Zahlen: Beim Vergleich je einer positiven und einer negativen Zahl fokussierten die Lernenden oftmals auf die Lage über und unter der Null bzw. vor und hinter der Null. Beim Vergleich zweier negativer Zahlen betrachteten die Lernenden viel-

fach die graduelle Entfernung der Zahlen von der Null. Sowohl beim Vergleich einer positiven und einer negativen Zahl wie auch zweier negativer Zahlen orientierten sich einige Lernende an der Lage der Zahlen ohne Berücksichtigung des Vorzeichens.

*Kontextuelles Wissen nutzen.* Auf lebensweltliche Kontexte griffen nur wenige Lernende explizit zurück. Die aktivierten Kontexte waren u.a. Temperaturen, Spielstände, Guthaben-und-Schulden.

*Rechenoperationen zum Zahlvergleich durchführen.* Bei diesen Herangehensweisen war die Deutung des Minuszeichens als Rechenzeichen vielfach dominierend. Es gab Lernende, die die zu vergleichenden Zahlen voneinander subtrahierten und anschließend die Differenz mit einer der beiden zu vergleichenden Zahlen verglichen. Andere Lernende subtrahierten die negativen Zahlen bspw. von einer gleichen Bezugzahl (teilweise der Null) und kamen über den Vergleich der beiden Differenzen zu der Erkenntnis, welche der beiden Zahlen größer war.

*Wissen zu Zahlen und Zahlbereichen aktivieren.* Viele Lernende griffen auf bereits vorhandenes, schnell abrufbares Wissen zu Zahlen und Zahlbereichen zurück, das sie nicht weiter begründeten (bspw. „Null ist die kleinste Zahl“ oder „Negative Zahlen sind immer kleiner als positive Zahlen“). Teilweise fokussierten die Lernenden auf die Größe der Zahlen ohne Vorzeichen – d.h. den Betrag –, indem sie das Minuszeichen entweder nicht explizit erwähnten oder dieses bewusst ausblendeten (z.B. „Ich weiß auch nicht was das Minuszeichen soll. Und dann guck ich mir einfach die größten, die Zahlen an.“).

*Vorgehen mit kardinalem Bezug.* Wenige Lernende nahmen beim Zahlvergleich die Mächtigkeit von Mengen in den Blick (bspw. Punktmengen).

Zusammenfassend lässt sich für den *Vergleich formal-symbolisch dargestellter Zahlen* festhalten, dass die Lernenden aus ihrem Vorwissen heraus vielfach auf die Lage der Zahlen bzw. Richtungen zurückgriffen – es schienen sog. „Richtungsschemata“ (vgl. Malle 1988) vorhanden zu sein. Auch Vorwissen zu Zahlen und Zahlbereichen wurde häufig genutzt, dabei betrachteten die Lernenden teilweise die Größe der Zahlen ohne Vorzeichen bzw. die Beträge. Teilweise deuteten die Lernenden das Minuszeichen als Rechenzeichen (vgl. Vlassis 2004). Lebensweltliche Kontexte wurden indes nur selten aktiviert.

In Bezug auf den *Zahlvergleich in verschiedenen lebensweltlichen Kontexten* (zweites Forschungsinteresse) zeigten sich ähnliche Herangehensweisen, jedoch mit unterschiedlichen Ausprägungen: Im *Kontext Temperaturen* wurde sehr häufig auf die Lage und Richtungen verwiesen. Die Ler-

nenden aktivierten häufig kontextbezogenes Wissen (z.B. der Form „Wo es kälter ist, da ist es kleiner.“). Die Tragfähigkeit der Herangehensweisen war insgesamt sehr hoch. Im *Kontext Aufzüge* waren die Verweise auf Lage und Richtungen dominierend, jedoch war die Tragfähigkeit weit weniger hoch als im Kontext Temperaturen: Die Lernenden betrachteten häufig die Lage der Zahlen ohne Vorzeichen oder ordneten das Untergeschoss ebenfalls oberhalb des Erdgeschosses an. Die Realsituation, dass Stockwerke unterhalb des Erdgeschosses liegen können, war für einige Lernende offenbar schwer zu fassen. Der – im Vergleich zum Kontext Aufzüge – noch engere Bezug des Kontextes Temperaturen zur Lebenswelt vieler Lernender scheint mit der größeren Tragfähigkeit der Herangehensweisen in diesem lebensweltlichen Kontext in Zusammenhang zu stehen. Für den *Kontext Guthaben-und-Schulden* war erwartbar, dass die Lernenden durch den fehlenden Bezug zur Zahlengerade weit weniger häufig auf die Lage der Zahlen verweisen. In der Tat fokussierte keiner der Lernenden auf die Lage der Zahlen; es wurde vielmehr Zahlwissen (u.a. Größe der natürlichen Zahlen) und sehr kontextbezogenes Wissen aktiviert, welches jedoch vielfach nur begingt tragfähig war. Für einige Lernende schien gerade die Thematik der Schulden noch wenig bekannt. Teilweise griffen sie – ähnlich wie beim Vergleich formal-symbolisch dargestellter Zahlen – auf Rechenoperationen zurück. Die Erkenntnisse im Zusammenhang mit *lebensweltlichen Kontexten* deuten *insgesamt* darauf hin, dass eine Vertrautheit mit dem lebensweltlichen Kontext Lernenden hilft, ihr lebensweltliches Vorwissen intuitiv gewinnbringend für den Vergleich ganzer Zahlen nutzen können.

## Literatur

- Beck, C. & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung* (S. 43-76). Köln.
- Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 4(1), 415-427.
- Malle, G. (2007). Die Entstehung negativer Zahlen. Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denkobjekten. *mathematik lehren*, H. 142, 52-57.
- Malle, G. (1988). Die Entstehung neuer Denkgegenstände – untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Band 16* (S. 259-319). Wien.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 2-9.
- Vlassis, J. (2004): Making Sense of the Minus Sign or Becoming Flexible in ‘Negativity’. *Learning and Instruction*, H. 14, 469-484.
- Winter, H. (1989). Da ist weniger mehr – die verdrehte Welt der negativen Zahlen. *mathematik lehren*, H. 35, 22-25.