Simeon SCHLICHT, Köln

Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs auf der Grundlage einer Videographie mit Drei- bis Vierjährigen

Die Entwicklung mathematischen Verständnisses im Vorschulalter wird in letzter Zeit vermehrt auch durch Forschungen in der Mathematikdidaktik in den Blick genommen. Einen Ausgangspunktpunkt für mein, dem Beitrag zu Grunde liegenden, Dissertationsprojekt bildet die These von Burscheid und Struve (2010), dass Lernende mathematische Theorien gleichsam wie eine naturwissenschaftliche (d.h. eine *empirische Theorie*) vermittelt bekommen, bedingt durch einen entsprechenden (und teilweise notwendigen) Aufbau der Schulbücher. Ziel meines Vorhabens ist u.a. zu prüfen, welche Vorbedingungen die Lernenden für die schulische Sozialisation mitbringen. Haben sie beispielsweise die Mathematik bereits als eine empirische Theorie kennen gelernt? Welche Begriffe (*theoretischer* und *nicht-theoretischer* Art) haben sie bereits erworben? Wie entwickelt sich die Theorie? Dieses Vorhaben wird an der Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs konkretisiert.

Im Rahmen von *mathematikhaltigen Spielsituationen* (vgl. Schwank 2010) wird das Verhalten von Kindern beobachtet. Ausgehend von den Handlungen der Kinder im Spiel werden Rückschlüsse auf deren (mathematisches) Verständnis gezogen. Eine theoretische Grundlage zur Beschreibung des Wissens der Kinder bietet hierbei der Ansatz der Rekonstruktion des Verhaltens der Kinder als Verfügen über Eigentheorien (vgl. Schlicht & Witzke 2013). Begründet auf kognitionspsychologische (vgl. Gopnik & Meltzoff 1997) und wissenschaftstheoretische (vgl. Stegmüller 1979) Grundlagen, können mit Hilfe der Rekonstruktion der *empirischen Theorie* über Mengen und Zahlen (vgl. Burscheid & Struve 2010) und dem Ausmachen der *theoretischen Begriffe* innerhalb dieser Theorien, die Handlungen der Kinder erklärt und mögliche Schwierigkeiten im Erwerb der Begriffe identifiziert werden.

Eine tiefgreifende Analyse der Begriffe und zu Grunde liegenden Theorien ist hier nicht möglich, sodass im Folgenden erste Eindrücke aus der Videographie auf der Phänomenebene diskutiert werden.

Videographie

Im September 2013 und Januar 2014 wurden in einer Kindertagesstätte mathematische Spielsituationen mit mehreren Kindern durchgeführt (Dauer: ca. 30 bis 45 Minuten pro Kind). Im Rahmen der Spielsituationen konnten

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1071–1074). Münster: WTM-Verlag

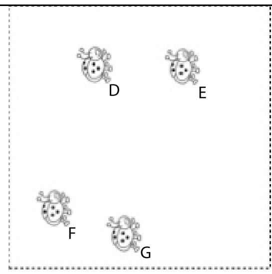
die Kinder eigene Vorgehensweisen aufzeigen. Exemplarisch sei im Folgenden eine Spielsituation mit Marc (4;1) thematisiert:

Marc und der Spielleiter (SL) haben zusammen ein Memory erkundet. Dieses besteht aus 8 Karten, auf denen Marienkäfer abgebildet sind. Die Karten unterscheiden sich in der Anzahl der Marienkäfer (ein bis vier Stück), wobei je zwei kongruente Karten mit gleicher Anzahl von Marienkäfern vorhanden sind. Marc und SL haben sich gemeinsam die Aufgabe gestellt die „passenden“ Karten nach dem Umdrehen und Mischen der 8 Karten wieder zu finden. Somit liegt, zumindest explizit, keine kompetitive Situation vor. Der Terminus „passend“ wurde von Marc und dem SL ausgehandelt, indem Kartenpaare gebildet wurden. Hierbei hat Marc Karten mit jeweils derselben Anzahl von Marienkäfern nebeneinander gelegt.

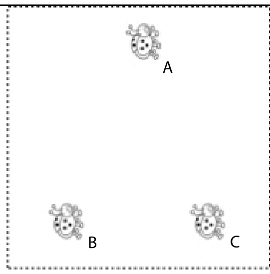
Erste Erwartung an die Vorgehensweisen beim Spiel waren das Abzählen der Objekte bzw. das Nutzen der spontanen Zahlerfassung (vgl. Feigenson et al. 2004) um zu dem Urteil zu kommen, ob die Karten „passen“ oder nicht. Marc zeigt jedoch interessante andere Vorgehensweisen auf:

1. Vorgehen

Die Karten wurden von Marc und SL gemischt und nunmehr dreht Marc zwei Karten (s. Transkript) um, eine mit drei Käfern und eine mit vier Käfern.[1] Auf die Frage ob die beiden Karten passen, antwortet Marc aber mit Ja. Darauf ereignet sich folgende Situation:

SL	ja’, wieso’ zähl mal nach.. wie viele sind auf der einen drauf’	
Marc	*(Fokussiert sofort die Karte mit vier Marienkäfern. Mit Zeigefinger und Daumen auf (D,F) tippend)* eins *(Mit Zeigefinger und Daumen auf (E,G) tippend)* zwei	

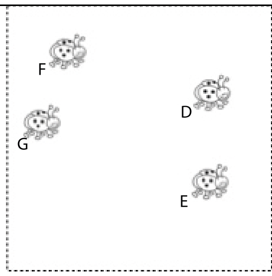
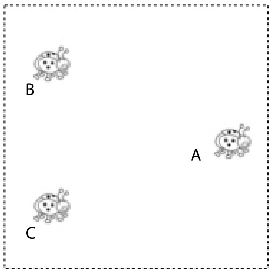
[1] Die Buchstaben neben den Marienkäfer sind zur deutlicheren Auszeichnung der Zeigebewegungen im Transkript nachträglich hinzugefügt worden. Karten sind jeweils aus Marcs Blickrichtung angegeben. Für Transkriptionsregeln vgl. Meyer (2007).

Marc	*(Fokussiert im Anschluss sofort die Karte mit drei Marienkäfern. Mit Zeigefinger und Daumen auf (A,B) tippend)* eins *(Mit Zeigefinger und Daumen auf (A,C) tippend)* zwei.. *(Darauf nimmt er die Hand von den Karten weg)* zwei	

Marc fokussiert hier *Paare von Objekten*, wobei er beim Abgreifen der Paare die *Standardzahlwortreihe* durchläuft. Die Paare sind bei ihm jedoch nicht disjunkt; Marienkäfer *A* wird in Marcs zweitem Turn in zwei verschiedenen Paaren verwendet. Das Durchlaufen der Standardzahlwortreihe (im Folgenden: ZWR) kann durch die Aufforderung „zähl mal nach" seitens des SLs ausgelöst worden sein. Eine weitere Auffälligkeit entdeckt man in der Paarbildung: Bei beiden Karten werden nicht die nahe beieinander liegenden Marienkäfer als Paare zusammengefasst, sondern die weiter entfernten.

2. Vorgehen

Im späteren Verlauf des Spiels zeigt Marc folgendes Vorgehen auf:

SL	und hier' *(dreht die Karte mit vier Marienkäfern und deutet auf diese)*	
Marc	*(auf F tippend)* einer.. *(mit Zeigefinger und Daumen auf (F,G) tippend)* zwei *(mit Zeigefinger und Daumen auf (D,E) tippend)* zwei	
	(direkt im Anschluss) aber hier sind kei- *(wechselt zur Karte mit drei Marienkäfern)* aber... hier.. *(deutet mit dem rechten Zeigefinger auf die freie Stelle über A)* hier ist keiner dabei und hier, *(zeigt auf B)* aber. das sind zwei aber hier *(fährt mit dem rechten Zeigefinger über die rechte Seite der Karte)* ist keiner..	

Hier geht Marc ähnlich zum 1. Vorgehen vor. Er thematisiert wiederum Paare, nennt hierbei jedoch die Anzahl der Elemente im Paar („zwei"), anstatt die Zahlwortreihe (ZWR) beim Abgreifen der Paare zu durchlaufen. Im Vergleich zur vorherigen Szene scheint er nun disjunkte Paare zu betrachten. Die Paare werden also anders als beim 1. Vorgehen gebildet, was sich zudem darin äußert, dass Marc nunmehr die näher beieinander liegenden Marienkäfer zusammenfasst. Für *A* ist jedoch „keiner dabei“. Eventuell nutzt Marc hier die Kongruenz der Karten (maW: das den Karten inhärente geometrische Muster) aus: Wenn bei *A* ein weiterer Marienkäfer dabei wäre, dann wären die Karten deckungsgleich, da sich zwei Paare von Marienkäfern bilden lassen.

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurden zwei Vorgehensweisen rekonstruiert: (1) Eine Fokussierung auf Paare zusammen mit dem Durchlaufen der ZWR und (2) eine disjunkte Paarbildung mit Nennung der Kardinalität eines jeden Paares. Bemerkenswert ist die Möglichkeit des Mengenvergleichs über den Vergleich der zugrundeliegenden (geometrischen) Muster.

Im weiteren Forschungsverlauf werden dieses und weitere Vorgehen analysiert und mit Hilfe der strukturalistischen Metatheorie eine Rekonstruktion der empirischen Theorie über Mengen und Zahlen durchgeführt.

Literatur

Burscheid, H. J. & Struve, H. (2010). Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung. Hildesheim: Franzbecker.

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core System of Number. Trends in cognitive sciences 8(7), S. 307 – 314.

Gopnik, A. & Meltzoff, A. (1997). Words, thoughts and theories. Cambridge MA: MIT Press.

Meyer, M. (2007). Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Hildesheim: Franzbecker.

Schlicht, S. & Witzke, I. (2013). Zur Problematik der Diagnose des Invarianzbegriffes im Kindergarten. In: Meyer, M., Müller-Hill, E. & Witzke, I. (Hrsg.): Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik. Hildesheim: Franzbecker. S. 205 – 231.

Schwank, I. (2010). Erlebniswelt Zahlen – Spielereien an der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V..

Stegmüller, W. (1979). Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, Bd. II, Dritter Teilband: Die Entwicklung des neuen Strukturalismus seit 1973. Heidelberg: Springer.